第24卷 第3期 力学进展 Vol. 24 No. 3
1994年8月25日 ADVANCES IN MECHANICS Aug. 25, 1994

广义协调技术与双参数法*

卜小明
天津大学（邮政编码300072）

提要 本文对最近几年发展出的基于修正势能泛函的广义协调方法作一概述，并进一步介绍了作为这类方法更一般化的双参数有限元法。

关键词 修正势能泛函；广义协调；双参数有限元

1 引言

尽管简洁实用的常规位移元在精度、变化形式、甚至在收敛性上有时还不够满意，但是对许多偏于实用的结构工程师和优化设计师的广泛应用来说，它们是任何形式的多变量有限元所无法取代的。况且多变量有限元实现过程繁杂，而且有时还会出现零能模式、刚阵不正定等问题。致使一些只想简单地利用有限元而不想深究有限元理论的工程师们望而却步。因此，如何从多类变量的变分泛函中提炼出简洁、高效、实用、收敛的单变量位移型有限元列式，对于广泛的工程应用和实际的结构计算来说确实是很有意义的。

2 从分区广义变分原理到修正势能泛函

如果每个分区都定为势能区，则由分区广义变分原理的一般形式[1]可得

$$\pi=\sum_{m}\pi_p+\sum_{S_{ab}}H_{pp} \tag{1}$$

这里π_p为单元的广义势能[1]，而

$$H_{pp}=\iint\limits_{S_{ab}}T_i^{(a)}(u_i^{(b)}-u_i^{(a)})ds \tag{2}$$

为相邻单元a和b交界面的势能附加项，式中S_{ab}为这两个单元的共同边界。若在式（2）中引入表征S_{ab}上公共位移的变量$\tilde{u}_i$，则

$$H_{pp}=\iint\limits_{S_{ab}}T_i^{(a)}[(u_i^{(b)}-\tilde{u}_i)-(u_i^{(a)}-\tilde{u}_i)]ds \tag{3}$$

注意到在相邻单元a和b的交界面S_{ab}上应有

---

* 国家自然科学基金和天津市21世纪青年科学基金资助项目.

$$T_i^{(a)} = -T_i^{(b)} \tag{4}$$

于是得

$$H_{pp} = -\iint_{S_{ab}} T_i^{(a)}(u_i^{(a)} - \tilde{u}_i)ds - \iint_{S_{ab}} T_i^{(b)}(u_i^{(b)} - \tilde{u}_i)ds \tag{5}$$

因此有

$$\sum_{S_{ba}} H_{pp} = -\sum_m \oint\!\!\!\oint_{\partial v_m} T_i(u_i - \tilde{u}_i)ds \tag{6}$$

将式（6）代入式（1），并且事先使在位移边界上的公共位移变量$\tilde{u}_i$满足位移边界条件，则

$$\pi = \sum_m \left\{ \iiint_{v_m} \left(\frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \bar{F}u_i\right)dv - \iint_{S_{\sigma m}} \bar{T}_i\tilde{u}_i ds - \oint\!\!\!\oint_{\partial v_m} T_i(u_i - \tilde{u}_i)ds \right\} \tag{7}$$

这个修正势能泛函也用于建立杂交位移模式的广义变分泛函[2]。

对于板弯曲问题，经过适当的分部积分后，相应于式（7）的泛函将是

$$\pi_b = \sum_m \left\{ \iint_{\Omega_m} \left(\frac{1}{2}D_{\alpha\beta\lambda\theta}w_{,\alpha\beta}w_{,\lambda\theta} - qw\right)d\Omega + \int_{S_{\sigma m_1}} \bar{M}_n\tilde{w}_{,n}ds + \int_{S_{\sigma m_2}} (\bar{M}_{ns}\tilde{w}_{,s} - \bar{Q}_n\tilde{w})ds - \oint_{\partial\Omega_m} \left[M_n(w_{,n} - \tilde{w}_{,n}) - \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\right)(w - \tilde{w})\right]ds + \sum_j \Delta M_{nsj}(w_j - \tilde{w}_j) \right\} \tag{8}$$

为避免ΔM_{nsj}在泛函中出现，可以事先使

$$w_j - \tilde{w}_j = 0 \tag{9}$$

满足。于是式（8）成为

$$\pi_b = \sum_m \left\{ \iint_{\Omega_m} \left(\frac{1}{2}D_{\alpha\beta\lambda\theta}w_{,\alpha\beta}w_{,\lambda\theta} - qw\right)d\Omega + \int_{S_{\sigma m_1}} \bar{M}_n\tilde{w}_{,n}ds + \int_{S_{\sigma m_2}} (\bar{M}_{ns}\tilde{w}_{,s} - \bar{Q}_n w)ds - \oint_{\partial\Omega_m} \left[M_n(w_{,n} - \tilde{w}_{,n}) - \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\right)(w - \tilde{w})\right]ds \right\} \tag{10}$$

这个修正势能泛函对于建立能保证收敛且列式简洁的常规位移单元和具有对称列式的双参数单元是非常有用的。

3 广义协调方法

对于平面问题，因为常规的位移元比较成功，有关这方面的广义协调技术的运用可见文献[3]。

对于C^1类板弯曲问题，虽然数学理论业已一般地证明[4]，可以引入高阶结点参数建立协调元[5]，但是比起计算量所付出的代价来，其效果并不够理想，而且给边界条件的处理

带来了麻烦．鉴于常规的结点协调位移元未必能保证收敛[6]．因此，在认为泛函式（10）中 Lagrange 乘子 M_n 和 $Q_n+(\partial M_{ns}/\partial s)$ 完全独立的基础上，董平[2]建立了多变量的杂交位移模型．由于这类多变量单元存在前文所述的弱点，Kikuchi 为了使列式简单化，将 Lagrange 乘子 M_n 和 $Q_n+(\partial M_{ns}/\partial s)$ 视为可以由挠度变量导出的非独立变量，从而提出了简化杂交位移元[7]．但后来的例子表明，此法并不可靠[8]．事实上，Lagrange 乘子 M_n 和 $Q_n+(\partial M_{ns}/\partial s)$ 在泛函式（10）中确应是定义在单元边界上各自独立的非零变量，在单元边界 ij 上，它们将是边界坐标 s 的函数，即

$$M_n=M_n(s),\qquad \text{在 } ij \text{ 边} \tag{11}$$

$$Q_n+(\partial M_{ns}/\partial s)=V_n(s),\qquad \text{在 } ij \text{ 边} \tag{12}$$

但是，从内在关系上，它们又客观地表征着与位移场变量 w 密切相关的弯矩和剪力．因为，如果 w 表征了单元的真实位移，则通过几何物理关系求得的 M_n 和 $Q_n+(\partial M_{ns}/\partial s)$ 也应该表征真实的弯矩和剪力．正是这种既"独立"又"相关"的原因，使杂交元在假设各种场变量时，必须考虑变量的合理匹配问题[3]．

作为解决这一问题的折中手段，并且希望多变量有限元单变量化，我们将式（11）和（12）沿单元边界 ij 作泰勒展开

$$M_n=c_0+c_1s+c_2s^2+\cdots \tag{13}$$

$$Q_n+(\partial M_{ns}/\partial s)=d_0+d_1s+d_2s^2+\cdots \tag{14}$$

在单元充分小时，只需取级数前几项即可．如果考虑与 w 的相关因素，则可视所设 w 的多项式的次数来确定 M_n 等级数的大致项数．例如，w 是一个3次多项式，那么，如果这个3次多项式表征了 w 的真解，则可知一个不大于1次的多项式可以精确地表征 M_n．因此就只要取 M_n 的泰勒级数的前1－2项即可．

同时，考虑 Lagrange 乘子的独立因素，就应该认为 $c_k, d_k\,(k=1,2,\cdots)$ 独立地变化．将式（13）和（14）代入式（10），出于希望 Lagrange 乘子不进入有限元列式而成为单一变量的位移有限元，且又充分地计入界面附加能，并顾及到 c_k、d_k 的独立性，为此我们建立了如下的协调形式

$$\int_{ij}(w_{,n}-\bar{w}_{,n})s^k ds=0\qquad (k=0,1,2,\cdots,n_1) \tag{15}$$

$$\int_{ij}(w-\bar{w})s^k ds=0\qquad (k=0,1,2,\cdots,n_2) \tag{16}$$

来达到这一目的．这里的 n_1 和 n_2 表示泰勒级数所取的项数．

广义协调技术最初是基于势能原理建立单元边平均协调的[10]，但其协调条件的不对称是其本身的一个弱点．最近陈万吉教授[11]对[10]的不对称协调关系进行了研究，并提出了改进途径．后来提出的常内力广义协调元[12]以较弱的协调形式取得了很好的效果．根据式(15)，(16)以及进一步的改进形式[16-18]可以发展出一些列式非常简洁、精度高、对称实用的位移有限元[13-15]，而且它们可以保证收敛[19]．特别是作为位移元较难实现的厚薄板通用单元，广义协调技术便表现出更大的灵活性和优越性[20-24]，并且显示了良好的计算精度．广义协调技术也同样引入到了壳体问题[25]．

4 双参数法

由于常规位移元的自由度既是有限元离散的未知量（故希望取得简便而且数量尽可能的少），又要使基于这些自由度的插值函数在单元边界上具有某种连续性，因此有时就很难两者兼顾．为了克服这一困难，陈绍春和石钟慈[26]提出了双参数法，它将自由度的两种职能分开．取一套自由度为

$$D(w)=(d_1(w),\cdots,d_r(w))^T \tag{17}$$

其中$d_1,\cdots,d_r$是$H^k(m)$上的线性泛函，$k\geqslant 1$．而另取一套结点参数为

$$Q(w)=(q_1(w),\cdots,q_l(w))^T \tag{18}$$

其中$q_1,\cdots,q_l$是$H^k(m)$上的线性泛函，$k\geqslant 1$．

若取w为

$$w=\sum_{t=1}^{r}\alpha_t\Gamma_t \tag{19}$$

而

$$\Gamma_t\in\bar{P}^{(m)}=\mathrm{Span}\{\Lambda_1,\cdots,\Lambda_r\} \tag{20}$$

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)^T\in R^r \tag{21}$$

这里Γ_t和$\Lambda_t(t=1,\cdots,r)$为线性无关的多项式．将（19）式代入（17）式得

$$D(w)=C\alpha \tag{22}$$

同时将自由度式（17）数值离散化成结点参数的线性组合，即

$$D(w)=GQ(w)+\varepsilon(w) \tag{23}$$

这里$\varepsilon(w)$为离散余项，G为离散系数矩阵．略去余项$\varepsilon(w)$，并引入新的参数组$\bar{Q}(w)=(\bar{q}_1(w),\cdots,\bar{q}_l(w))^T$后可得

$$C\alpha=G\bar{Q}(w) \tag{24}$$

若$\det C\neq 0$，则

$$\alpha=C^{-1}G\bar{Q}(w) \tag{25}$$

这也便确定了位移场式（19）中的待定系数．

其优点在于可以独立地选取双参数组，以使单元简单，收敛，自由度少．同时还可以避免如何从一个完整多项式空间中合理地选取一个不完整多项式函数作为位移函数的困难．并且可以事先知道这种单元的收敛性[19]．

石钟慈等通过双参数法还研究了9参数拟协调元[27]和广义协调元[10]的收敛性问题[28,29]，并且找出了这两种单元之间的一些联系[29]．卜小明根据泛函式（10）提出了使双参数法列式对称化的途径[30-32]，证明了对称列式的双参数元与广义协调元是一致的[30,32]，同时建立了更一般化的双参数法[34]．

5 结　语

广义协调元由于其简明、高效而已被工程应用所接受[33]．作为更广意义的双参数法如何将多类变量的有限元法也都纳入其统一的数学框架之下，提炼出高效实用的简单有限元形式，以发挥这些有限元面向工程应用的实际价值，还需要计算数学和力学工作者作出更进一步的努力．

笔者感谢龙驭球教授和严宗达教授的鼓励和指导．

参　考　文　献

1 龙驭球. 上海力学, **2**, 2 (1981) : 1—9
2 Tong P. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **2** (1970) : 73—83
3 Long Y Q, Huang M F. *Appl. Math. Mech.*, **9**, 10 (1988) : 926—936
4 Zenisek A. *Numer. Math.*, **15** (1970) : 283—296
5 Bell K. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **1** (1969) : 101—122
6 Bazeley G P, et al. Proc. Conf. on MMSM, WPAFB, Ohio (1966) : 547—576
7 Kikuchi F, et al. *Nucl. Eng. Des.*, **23** (1972) : 155—178
8 Mang H A, et al. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11** (1977) : 145—167
9 Pian T H H, et al. *ibid*, **19** (1983) : 1741—1752
10 Long Y Q, Xin K Q. *Finite Element in Ana. and Des.*, **5** (1989) : 15—30
11 陈万吉, 杨晓林. 计算结构力学及其应用, **9**, 3 (1992) : 245—252
12 Long Y Q, Zhao J Q. *Comm. Appl. Num. Meth.*, **4** (1988) : 781—792
13 卜小明, 龙驭球. 土木工程学报, **24**, 1 (1991) : 17—22
14 ——, ——. 清华大学学报 (自然科学版), **3**, 2 (1991) : 9—16
15 ——, ——. 力学学报, **23**, 1 (1991) : 53—60
16 ——, ——. 计算结构力学及其应用, **8**, 2 (1991) : 208—213
17 龙驭球, 卜小明. 清华大学学报 (自然科学版), **30**, 5 (1990) : 9—15
18 卜小明, 龙驭球. 工程力学, **8**, 2(1991): 20—24
19 Shi Z C. *Math. Comput.*, **49** (1987) : 391—405
20 Bu X M. 3rd World congress on comput. Mech., Tokyo, Aug. 1—5, 1994
21 卜小明. 土木工程学报, **26**, 1 (1993) : 53—58
22 Bu X M, Long Y Q. *Acta Mechanica Sinica*, **9**, 2 (1993) : 163—170
23 卜小明. 力学学报, **26**, 3 (1994)
24 Bu X M. Comm. Num. Meth. Eng. (to appear)
25 辛克贵等. 土木工程学报, **23**, 2 (1990) : 11—20
26 陈绍春, 石钟慈. 计算数学, **13**, 3 (1991) : 286—296
27 唐立民等. 大连工学院学报, **19**, 2 (1980) : 19—35
28 石钟慈, 陈绍春. 计算数学, **12**, 1 (1990) : 76—84
29 ——, ——. 同上, **13**, 2 (1991) : 193—203
30 卜小明. 计算数学, **15**, 4 (1993)
31 Bu X M. *Chin. J. of Num. Math. & Appl.*, **16**, 2 (1994)
32 卜小明. 计算数学. **16**, 4 (1994)
33 张志良等. 土木工程学报, **23**, 1 (1990) : 12—22
34 卜小明. 计算数学 (即将发表)

THE TECHNIQUE OF GENERALIZED COMPATIBILITY AND DOUBLE SET PARAMETER METHOD

Bu Xiao-ming

Tianjin University, Tianjin, 300072

Abstract The technique of generalized compatibility on the basis of modified potential energy functional is reviewed and a more generalized procedure of double set parameter method is briefly described in this paper.

Keyword *modified potential energy functional; generalized compatibility; double set parameter finite element*