第23卷 第3期 力学进展 Vol.23 №3
1993年8月25日 ADVANCES IN MECHANICS Aug. 25, 1993

运动稳定性的研究进展和趋势

舒仲周 王照林
西南交通大学，成都（邮政编码610031） 清华大学，北京（邮政编码100084）

提要 本文概述运动稳定性学科在力学系统、控制系统、大系统、冲击系统、不确定系统以及一般理论等方面的研究进展和趋势.

关键词 运动稳定性；Ляпунов 函数；绝对稳定性；鲁棒稳定性；分叉；混沌

运动稳定性学科是由 A M Ляпунов 创立的，它研究运动是否稳定的问题. 所谓运动，不限于物体的运动，任何事物的变化都是一种运动，都存在是否稳定的问题. 因此运动稳定性研究遍及多个领域并得到了不断的发展. 当前研究最活跃的几个方面是力学系统的稳定性、控制系统的稳定性、大系统的稳定性、鲁棒稳定性以及 Ляпунов 函数的构造等. 研究的趋势是由简单到复杂，由小到大，由局部到全局，由确定到不确定，由单一到分叉、混沌.

1 力学系统的稳定性

力学是运动稳定性研究的发祥地，也是它的传统研究领域. 近年来，由于航天、机械、军事工程的发展需要，对于线性、非线性力学系统、刚-弹-液耦合系统和碰撞振动系统的稳定性以及与之密切相关的分叉和混沌问题的研究，都取得了较大的进展.

1.1 线性力学系统 主要研究有陀螺力存在的线性系统[1]

$$M\ddot{x}+(D+G)\dot{x}+(K+C)x=0 \tag{1}$$

这里 x 是 n 维矢量，M 为质量矩阵，K 为有势力矩阵，G 为陀螺矩阵，D 和 C 分别为耗散、约束阻尼矩阵. 这类系统之所以为人们关注，是因为大量在应用上重要的力学系统可以简化成这种形式. 从理论上说，系统（1）的稳定和渐近稳定的充要条件早已知晓，只要算出它的特征谱或利用 Hurwitz 判据即可. 但对于大的空间结构，系统（1）的阶数很高，需要寻求简便的，特别是具有力学意义的判别方法. 著名的 KTC 定理（没有约束阻尼）是这方面的最早成果，只要根据由有势力矩阵 K 算出的 Poincaré 不稳定度的奇偶性即可判定陀螺力能否对系统起到镇定作用. 这种判据漂亮而简便. 如何推广这个定理就成为以后的研究目标.

KTC 定理在 Poincaré 稳定系数有零时失效，而这一情况会在卫星姿态控制中出现，卫星可能因分叉而失稳，王照林[1]用提取零因子的方法解决了这个问题，从一个方面推广了

这个定理。从另一方面推广的有 Yang 等[2]。他们采用变换 $x=A(t)y$（$A(t)$是周期函数）消去约束阻力 $C\dot{x}$。

与此有关的是构造二次型 Ляпунов 函数研究系统（1）的稳定性[1,3,4]。

以上研究结果和充要条件相比仍有很大距离，因此对系统（1）还有很多工作可作。

1.2 *非线性力学系统* 利用一次近似判别系统的稳定性在临界情况失效，KTC 定理也存在这个问题。所以直接研究非线性系统，特别是非线性陀螺系统的稳定性就成为必要的了。但由于难度太大，只能对自由度不多，有特定条件的系统利用能量、动量矩积分或其他 Ляпунов 函数以及小参数方法等加以解决，如[5—9]。

应当说，若能把 KTC 定理推广到非线性陀螺系统，将解决一大片问题。自然这个工作的难度很大。其中一个原因是Lagrange-Dirichlet 平衡稳定定理的逆命题一般是不成立的，而在什么条件下成立又是一个棘手问题[10]。自从 Четаев 平衡不稳定定理出现以后，一直在研究中，最近的如[11]。

1.3 *刚-弹-液耦合系统* 由于航天器携带液体燃料和柔性部件以及充液陀螺的广泛使用刺激了这方面的研究。Румянцев 首先用能量函数和 Ляпунов 方法研究充液腔体的定点运动的稳定性，以后的研究基本上遵循这一途径。我国有王照林[1]、李骊[12]、朱如曾[13]等多人研究它。C-O Chang(常)[14]等研究了带水银环阻尼器的自由进动陀螺稳定性。

对于具有对称性的简单力学系统（即具有形式为动能加势能的 Hamilton 函数在正则相空间的变换群作用下保持不变的系统）的相对平衡的稳定性，Arnold，Smale 和 Marsden等根据李群和辛几何理论创立了约化能量——Casimir 方法，它是 Lagrange-Dirichlet 定理在无穷维空间的推广，把属于这方面的耦合系统的稳定性研究提到了一个新的理论高度。最近又发展成为能量-动量方法[15]，克服了Casimir函数不好寻求甚至不存在的缺点。Bloch[16]利用它研究了刚-弹耦合系统的稳定性。如果对称性破缺，需要引进半直积结构。这些方法无论理论和应用都是值得继续研究和拓广的。

实际的航天技术需要解决更为复杂的耦合系统的稳定性问题（例如王照林[17,18]领导研究的充液复杂系统晃动动力学与控制）。对于它们完全解析的方法几乎是不可能的，这方面另有专文介绍[56]。

1.4 *多体碰撞振动系统* 多体碰撞振动系统的运动微分方程是

$$\left.\begin{array}{l} M\ddot{x}+D\dot{x}+Kx=F(t,\delta),\quad t\neq\tau_i(x) \\ \dot{x}(\tau_i^+)=B\dot{x}(\tau_i^-),\quad t=\tau_i(x) \end{array}\right\} \tag{2}$$

这里

$$F(t,\delta)=(F_1\sin(\omega_1 t+\delta_1),\cdots,F_n\sin(\omega_n t+\delta_n))^T$$

由于碰撞的存在，系统的运动变得十分复杂，Пиукумович，Marsri 等对单体或某些特殊碰撞振动研究过周期运动、稳定条件和消振方法，但未考虑多体多碰撞和多激励的一般情况。这个问题最近得到解决[19]。

1.5 *分叉与混沌* 周期运动或平衡点在分叉后有的保持稳定，有的失稳，而多次分叉通向混沌。因此研究运动稳定性不能不考虑分叉与混沌现象，否则无法对系统的动力响应作出全面的分析。

Meijaard等[20]研究了列车轮对跟轨道的碰撞振动，结论是，随着运行速度的增大，轮对

的运动由定常变为周期的，再由周期倍化分叉通向混沌状态，产生奇怪吸引子。Shaw等[21]对受激的倒摆和两个固定壁的碰撞振动研究一次分叉和二次分叉，用 Melnikov 方法给出全局分叉产生马蹄的条件。Li等[22]研究零刚度碰撞振子的一种简单周期运动的分叉与混沌。林锐、黄克累与陆启韶[23,24]、陈予恕[25]、朱如曾[26]等也从事这方面的研究。其中[23]用 Melnikov 方法研究两类非线性振子得出失稳引起亚谐分叉而无限失稳导致混沌的结论；[26]对充液陀螺斜转态给出详细的稳定性图、分叉图和突变流形的解析表达式。舒仲周将动力系统的几何理论推广到多体碰撞振动系统（2），发现有界运动只能有4种运动形态，从而得到产生混沌的必要条件是存在非周期的回复运动[27]，并将这一结果推广到一般非自治的冲击动力系统（包括无冲击的非自治的动力系统）。

分叉与混沌的研究虽然发展迅速，但还有许多问题需要解决，例如高余维分叉、全局分叉、复杂系统的分叉和混沌问题等。研究的前景是广阔的。

2 控制系统、大系统和不确定系统的稳定性

2.1 Лурье 控制系统的绝对稳定性　控制系统的一种典型形式是 Лурье 控制系统

$$\dot{x} = Ax + bf(\sigma),\quad \sigma = c^T x \tag{3}$$

这里 x 是 n 维列矢，σ 是控制信号，$f(\sigma)$ 是扇形区域

$$0 < \sigma f(\sigma) < k \leqslant \infty \quad (\sigma \neq 0)\ ,\ f(0) = 0 \tag{4}$$

上的任一连续函数，具体形式不知道。式（3）的稳定性称为绝对稳定性。

一般采用 Лурье 型 Ляпунов 函数

$$v(x,\sigma) = x^T P x + 2\beta\int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma \tag{5}$$

研究式（3）的绝对稳定性。由于 σ 对于 x 不是独立的，还要加上所谓 S 步骤使 $\dot{v}$ 成为 x 的负定函数，后来改进为半空间法［赵素霞、朱思铭（1979）］，在某个半空间上研究 $\dot{v}$ 为负定的条件。所得结果只是充分的，而且矩阵 P 待定，不便于应用。为了减少研究的难度，限制 A,b,c（第一、第二标准型或其他简化形式[10]）或者限制 $f(\sigma)$（Barabanov[28]）。

和 Лурье 型函数（5）平行的有 Popov 频率法[29]，已经证明凡能用后者判别的绝对稳定性问题也能用前者解决。但频率法在复平面上具有几何意义，有其优点。

这两种方法都可以推广到多个控制信号系统(例如［30，31］)：

$$f(\sigma) = (f_1(\sigma_1),\cdots f_m(\sigma_m))^T$$

绝对稳定性问题的核心是寻求它的充要条件，但直到现在只能得到理论性的存在条件，如 Грунич（1980），Molchanov 和 Pyatnitskii（1986）。廖晓昕证明绝对稳定性和部分变元的绝对稳定性等价[32]，并进一步论证这一充要条件可以表示为：矩阵 $A+\theta bc^T$（$\theta=1$ 或 0）稳定和存在一个 Ляпунов 函数 $V_f(x)$[33]。

Айзерман 提出一个猜想（1949）：系统（3）绝对稳定的充要条件是它在域（4）上的每一个线性化系统［令 $f(\sigma)=k\sigma$ 所得系统］是渐近稳定的。这一猜想简单明了而又实用，虽然已经发现几个反例表明猜想的充分性不成立，但也仅仅是“几个”反例而已。绝对稳定性的最终解决是圆满回答在什么条件下 Айзерман 猜想成立。直到现在，在这个紧要问题上取得的进展很少。但既然外围战斗已经打了这么久(40多年)，正反经验都已积累不少，要突破这个顽固堡垒也不是不可能的。

2.2 大系统的稳定性　大系统指的是规模庞大、结构复杂、功能众多的系统．对它的研究是近20年兴起的．这是科学技术和生产实践向综合发展的重要标志．由于大系统的维数很高，用常规方法求解稳定性是不实际的，甚至是不可能的．一般采用分解集结法．

第一步，分解．将大系统分解成

$$\dot{x}_i = f_i(t,x_i) + h_i(t,x),\quad i=1,\cdots,m<n \tag{6}$$

这里 x_i 是 n_i 维列矢，$n_1+\cdots+n_m=n$．假设孤立子系统

$$\dot{x}_i = f_i(t,x_i)\qquad (i=1,\cdots,m) \tag{7}$$

是渐近稳定的（否则进行镇定使其成为稳定的）．

第二步，集结．寻求使大系统稳定内联项 $h_i(t,x)$ 需要满足的条件．有两种集结方法．

一是构造矢量 Ляпунов 函数 $v=(v_1,\cdots,v_m)^T$，这里 v_i 是子系统（7）的 Ляпунов 函数．从式（6）导出微分不等式 $\dot{v}\leqslant g(t,v)$，$g(t,v)$ 有较强的条件．于是得比较方程

$$\dot{u} = g(t,u) \tag{8}$$

原大系统的稳定性完全由式（8）的决定，因此研究式（8）的稳定性判别方法就成为问题的关键．

式（8）的最简单形式是 $\dot{u}=Au$（A 为常矩阵）．它为渐近稳定的充要条件（$-A$ 为 M 矩阵）是早已知晓的，因此过去一般集结成这一形式，但损失很多，只能判别指数稳定．Ohta (1980)，Мартынюк[34] 等进一步研究比较方程

$$\dot{u} = A(u)u \tag{9}$$

其中 $-A(u)$ 是 M 函数，在限制条件下得到了渐近稳定的充分性判据．舒仲周[35] 研究一般自治比较方程

$$\dot{u} = g(u) \tag{10}$$

得到渐近稳定或全局渐近稳定的充分必要条件是在相空间存在一条负曲线（其上每点有 $\dot{u}<0$）．它的一个推论是，只要 $-A(u)$ 是 M 函数，式（9）就是渐近稳定的．最近又把这一结果推广到非自治比较方程（8）．Lakshmikantham 等[36] 将 u 分为两组得到了式（8）为渐近稳定的充分条件．

另一集结方法是简单地对所有 v_i 加权求和得 $V=c_1v_1+\cdots+c_mv_m$，避免了前一法推导微分不等式带来的损失．但 $\dot{V}$ 的负定性很难判别，只能在限制条件下得到一些判据，是其缺点[10,32]．

其他解法还有 Ляпунов 矩阵函数法[37]、交叠分解法（Ikeda 与 Siljak 1981）、分块迭代法[32]、多层结构（高为炳[38]）等．

由于比较方程（8）的渐近稳定性已经得到解决，如何使集结微分不等式的步骤减少损失是值得研究的．

2.3 不确定系统的鲁棒稳定性　实际系统都含有参数 q，即

$$\dot{x} = f(t,x;\ q),\quad q\in Q\subset R^m \tag{11}$$

通常假定 q 固定，但实际并非如此．以单自由度的强迫振动为例，频率比（激振力频率比固有频率）和激振力频率、振体质量以及弹簧刚度三者有关，它们的每一个都是可以改变的，即频率比可以改变．从而可能改变系统的稳定性质．在参数空间（m 维），每个 q 值是一个点，如果对某个区域 Q 内的每个点 q，式（11）是渐近稳定的，则称它是鲁棒稳定的．

当前人们集中研究线性系统（自治的）的稳定性，而这一研究是从矩阵A的特征多项式

$$P=\sum_{i=0}^{n}a_is^i,\ \ a_i\in[\underline{a}_i,\bar{a}_i] \tag{12}$$

开始的．参数变化区域Q是一个箱体．Харитонов（1977）发现：每个P是H（Hurwitz）稳定的（即系统渐近稳定），当且仅当箱体的4个项点是H稳定的[16]．这一结果很精彩，因为只用4个多项式就判定了无穷多个多项式的H稳定．Chapellat 与 Bhattacharryya[39]将它推广到多项式族

$$y(s)=Q_1(s)P_1(s)+\cdots+Q_m(s)P_m(s) \tag{13}$$

［这里P_i是形如式（12）的区间多项式，Q_i是给定的多项式］，得到箱体定理．H稳定指的是多项式的零位于左半复平面上，Barmish[40]取消了这个限制，并且放宽式（12）的系数a_i是m维参量q的线性函数，$q\in Q$．

Харитонов定理是对Q为箱体而言的，Bartlett，Hollot 与黄琳[41]把它推广到凸多面体，并设a_i是q的线性函数，得到棱边定理：每个P是H稳定的，当且仅当棱边集上的每个点是H稳定的．黄琳与王龙[42]又进一步推广为边界定理，Q不限于是凸的．

但是实际的a_i．一般是q的非线性函数(例如前面提到的频率比)，极少见到线性的，更难见到彼此独立的a_i．对于非线性$a_i(q)$如何判别P的H稳定性是需要进一步研究的问题．至于棱边定理和边界定理还需解决有限判别问题．

更有用的是直接研究线性系统

$$\dot{x}=A(q)x,\ \ q\in Q\subset R^m \tag{14}$$

的鲁棒稳定性（robust stability）．当然它的难度很大，但仍然取得了一些成果．利用矩阵Kronecker乘积的有 Qin 与 Davison[43]等，利用Ляпунов函数的详见 Siljak 的综述[44]以及[32]．

3 运动稳定性的一般理论

3.1 稳定概念的推广和Ляпунов函数的构造 稳定性概念有多种推广．由Румянцев证明的部分变元的稳定性是较早的一种．它比全部变元的稳定性有时更为有用．例如陀螺的旋转运动的稳定性就属于这种类型．Румянцев的专著[45]全面论述了近30年的部分变元稳定性的研究发展．

Мовчан 和 Salvadori 等提出两个量度的稳定性：(h_0,h)稳定性．这里h_0和h是时间t和变量x的函数．它把部分变元的稳定性、不变集的稳定性等多种概念包括在内[46]．

构造Ляпунов函数是判别稳定性的关键．如果在研究中只用一个函数$v(t,x)$(标量)，需要满足很强的条件，不易构造．而且由它只能判别一致渐近稳定，限制了应用范围．Матросов，Salvadori 等采用两个以至多个Ляпунов函数推广了渐近稳定定理[10]．Lakshmikantham 等[46]提出扰动Ляпунов函数族：$v_1(t,x)+v_{2,\eta}(t,x)$，其中$v_{2,\eta}(t,x)$依赖于参数η，用以判别(h_0,h_1)等度渐近稳定[46,47]和通常的等度渐近稳定[48]．利用这些函数虽然推广了渐近稳定定理，但如何构造它们仍是一个难题．

应当说如何找到Ляпунов函数的具体结构才是我们的最终目标．Wall和Moe提出广义能量法[10]，由扰动运动微分方程$\dot{x}=f(x)$试凑一个全微分，积分即得Ляпунов函数$v(x)$．[49]作了改进，减少了试凑的程度，Banks[50]把线性系统$\dot{x}=Ax$的二次型函数

$\dot{v}(x)=x^T\dot{P}x$（矩阵P满足 Ляпунов 矩阵方程 $\dot{P}A+\dot{A}^T\dot{P}=\dot{I}$）推广到非线性系统 $\dot{x}=f(x)$，相当于解一系列矩阵方程 $P_mA_m+A_m^TP_m=I_m$，这些 Ляпунов 函数都是用来判别渐近稳定的。

对于不稳定的研究有所不同。Персидский，Massera 和 Laloy 等将不稳定概念进行分解，采用扇形集和推出集相结合的方法，推广了不稳定定理。但它们定义的扇形集过于复杂，而且不能用它解决相反的问题：解在扇形集内向原点趋近。[10]中作了改进。

3.2 冲击系统的稳定性 冲击系统是一般系统加上冲击：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}=f(t,x),\quad t\neq\tau_i(x)\\ \Delta x=I_i(x),\quad t=\tau_i(x)\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

这里x是n维列矢，多体碰撞振动系统（2）属于它。式（15）的解$x(t)$是分段连续的。冲击时刻由 $t=\tau_i(x(t))$ 确定。判别系统（15）的稳定性存在双重困难：一是解 $x(t)$ 不知道；另一是式（15）的右端函数不连续。由于冲击的存在使运动变得十分复杂。一般只能对某些特殊情况采用分段 Ляпунов 函数等方法给出稳定性判别定理。

对于冲击时刻$\tau_i(i=1,2,\cdots)$固定的情况（即τ_i和x无关），Kulev 与 Bainov[51] 用分段连续的 $v(t,x)$ 给出强稳定的判别定理；Lakshmikantham 与 Liu[52] 用标量比较方程判别 (h_0,h) 稳定性。

对于系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}=f(x),\quad x\overline{\in}M\\ \Delta x=I(x),\quad x\in M\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

这里M是相空间的 $n-1$ 维流形，Simeonov 与 Bainov[53] 研究了周期运动的轨道稳定性。

对于系统（15），Kulev 与 Bainov 用一个分段连续的 Ляпунов 函数给出集合稳定的判别定理[54]，还用两个分段连续函数判别 $x=0$（假使 $f(t,0)\equiv0$）的稳定性[55]。

如何对冲击系统（15）建立统一的稳定性理论是今后研究的目标。

4 结束语

当前世界范围的新技术革命正在向深度和广度的更高层次发展。在这里运动稳定性也将大有作为。但运动稳定性的如何进一步发展和现代化问题，也是大家所关注的。现提出以下几点看法供参考。

①与高技术相结合。因为航天技术是一切新技术和高技术的集中表现，在这里运动稳定性理论也有用武之地，所以应尽量利用这个广阔的空间来应用和发展运动稳定性研究。另外，也要把地面物理或半物理实验、空间观测与理论分析、数值仿真等密切地结合起来。

②与现代数学方法相结合。这里可以引进现代数学理论（如微分拓扑学、非线性系统分析等），以及现代计算技术（如电子计算机程序自动化、现代建模方法的计算机实现等）。另外，利用电子计算机研究分布参数大系统的算子谱，应用电脑来构造非线性大系统的 Ляпунов 函数等，也是一个发展方向。

③结合高新技术的发展以及现代的实验技术，把运动稳定性理论渗透到生命科学、生态、社会、经济等领域中，从而推进它的进一步发展。从综合理论的观点上看，运动稳定性理论与突变论、耗散结构论、协同论等相结合，将为用统一的理论和方法来进一步解释生命和非生命的一般规律性，开拓一个光辉的前景。

参 考 文 献

1 王照林．运动稳定性及其应用．高等教育出版社（1992）

2 Yang S M, Mote C D. *J. Sound & Vibration*, **147** (1991) : 453—464

3 Агафонов С А. Механика Твердого Тела, 1 (1986) : 47—51; 3 (1988) : 3—8

4 Walker J A. *J. Appl. Mech.*, **58** (1991) : 229—232

5 Беликов С А. ПММ, **50** (1986) : 73—82

6 Воротников В И. Механика Твердого Тела, 3 (1986) : 25—30

7 Бирюкова М П. *ibid*, 2 (1987) : 12—19

8 Liu Y Z (刘延柱). *Acta Mechanica*, **79** (1—2) (1989) : 43—51

9 杨海兴．中国科学（A），10（1990）：1103—1112

10 舒仲周．运动稳定性．西南交通大学出版社（1989）

11 Furta S D. *Sov. Appl. Mech.*, **27**, (1991) : 204—208

12 李骊．见：中国力学学会主编，第17届国际理论与应用力学大会中国学者论文集锦．北京大学出版社（1991）

13 朱如曾．中国科学（A）19（1987）：1161—1168

14 Chang C-O, Chou C-S, Lin L-Z. *J. Sound & Vibration*, **146**, 3 (1991) : 491—506

15 Simo J C, Lewis D, Marsden J E. in Arch. Rational Mech Anal., **115**. Spring-Verlag (1991) : 15—59

16 Bloch A M. *Acta Appl. Math.*, **15** (1989) : 211—234

17 王照林，金斌，邓重平，王士敏．宇航学报，2（1991）：1—8

18 ——，匡金炉．宇航学报，2（1992）：49—55

19 Shu Zhongzhou (舒仲周). in Proc. Int. Conf. Dynamics, Vibration & Control. Peking Univ. Press (1990) : 930—936

20 Meijaard J P, De Pater A D, *Int. J. Nonlinear Mech.*, **24**, 1 (1989) : 1—17

21 Shaw S W, Rand R D. *ibid*, **24**, 1 (1989) : 41—56

22 Li G X, Rand R D, Moon F C. *ibid*, **25**, 4 (1990) : 417—432

23 Lin Rui (林锐), Lu Qishao (陆启韶), Huang Kelei (黄克累). in Advances in Appl. Math. & Mech. in China, Vol. 3 (eds. Chien & Fu), IAP (1991) : 85—94

24 Lin Rui, Huang Kelei, Lu Qishao. *J. Sound & Vibration*, **147**, 2 (1991) : 265—282

25 Chen Yushu (陈予恕). *Acta Mechanica Sinica*, **4**, 4 (1988)

26 Zhu Ruzeng (朱如曾). *Int. J. Non-Linear Mech.*, **27**, 3 (1992) : 477—487

27 Shu Zhongzhou. *Acta Mechanica Sinica*, **7**, 4 (1991) : 369—375

28 Barabanov N E. *Sibirsk Math., Zh.* **28**, 2 (1987) : 21—34

29 谢惠民．绝对稳定性理论与应用．科学出版社（1986）

30 Yunger I B. *Automat. Remote Control*, **50**, 2 (1989) : 186—197

31 程述纪．数学学报，**33**，3（1990）：289—294

32 廖晓昕．稳定性的数学理论及应用．华中师范大学出版社（1988）

33 ——．数学学报，**33**，6（1990）：841—852

34 Мартынюк А А, Крапивный Ю Н. Прикл. Механика, **23**, 4 (1987) : 75—80

35 舒仲周．数学年刊（A）**7**，6（1986）：676—684

36 Lakshmikantham V, Leela S, Ram Monan Rao M. *Nonlinear Analysis*, **16**, 3 (1991) : 255—262

37 Grujic L T, Martynyuk A A, Ribbens-Pavella M. Large scale systems stability under structural and singular perturbations. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag (1987)

38 高为炳．非线性控制系统导论．科学出版社（1988）

39 Chapellat H, Bhattacharryya S P. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **34**, 3 (1989) : 306—311

40 Barmish B R. *ibid*, **34**, 2 (1989) : 157—165

41 Bartlett A C, Hollot C V, Huang Lin (黄琳). *Math. Contr., Signals Syst.*, **1** (1988) : 61—71

42 黄琳，王龙．中国科学，8（1991）：839—847

43 Qin L, Davison E J. in Proc. 27th Conf. on Decision & Control, Austin (1988)

44 Siljak D D. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **34**, 7 (1989) : 674—688

45 Румянцев В В, Озиранер А С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. -М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. (1987)

46 Lakshmikantham V, Leela S, Martynyuk A A. Stability Analysis of Nonlinear Systems. Marcel Dekker, New York (1989)

47 ——, Liu X Z. *J. Math. Anal. & Appl.*, **140** (1989) : 107—114
48 Agase S B, Leela S. *Nonlinear Analysis*, **16**, 4 (1991) : 315—319
49 叶伯英. 应用数学学报, 4 (1987) : 455—463
50 Banks S P. *Int. J. Systems Sci.*, **19**, 4 (1988) : 629—636
51 Kulev G K, Bainov D D. *Int. J. Theor. Phys.*, **27**, 6 (1988) : 745—755
52 Lakshmikantham V, Liu X Z. *J. Math. Anal. & Appl.*, **137** (1989) : 591—604
53 Simeonov P S, Bainov D D. *Int. J. Systems Sci.*, **19**, 12 (1988) : 2561—2585
54 Kulev G K, Bainov D D. *Int. J. Theor. Phys.*, **28**, 2 (1989) : 195—207
55 ——, ——. *J. Math. Anal. & Appl.*, **140** (1989) : 324—340
56 Wang Zhaolin (王照林), Xu Jianguo (徐建国). *Science in China* (Series A), **36**, 1 (1993) : 36—47

ADVANCES AND TRENDS OF STUDIES ON STABILITY OF MOTION

Shu Zhong-zhou　　Wang Zhao-lin
South-Western Jiaotong University　　Tsinghua University

Abstract In this paper the advances and trends of studies on stability of motion are reviewed in the field of mechanics system, control system, large-scale system, shock system, indeterminate system etc.

Keywords *stability of motion; function of Liapunov; absolute stability; robust stability; bifurcation; chaos*

书 刊 评 介

《二相流体动力学》

刘大有著　高等教育出版社，北京（1993）

二相流的研究始于本世纪50年代，在70至80年代得到了迅速发展．它在化工、冶金、环境、水利、燃烧学、传热学以及材料科学等方面均有广泛的应用，已引起人们越来越大的兴趣．

中国科学院力学研究所刘大有研究员所著的《**二相流体动力学**》一书已由高等教育出版社作为国家八·五重点图书——工程力学丛书之一，于1993年夏季出版，这对二相流的研究必将起到促进作用．

二相流的类型很多，内容丰富，涉及面广．作为流体力学的一个新兴分支学科，在它的