

# 金属成形过程中的塑性失稳

汪凌云

重庆大学 (邮政编码630044)

**提要** 本文评述了金属成形过程中塑性失稳现象(剪切带、颈缩、皱曲)研究的最新进展和仍存在的问题,着重讨论了塑性失稳预报和本构关系选择的密切关系,指出了塑性失稳预报结果取决于所选择的本构关系。还讨论了材料各向异性、应变率敏感性、不均匀性及其幅度、惯性等因素对塑性失稳的影响。除此之外,对作为分析塑性失稳的基本理论工具——Hill分叉准则亦作了简要讨论。

**关键词** 塑性失稳; 成形极限; 本构关系

## 1 引言

塑性失稳现象的研究,近年来一直受到广泛的关注。许多著名固体力学工作者和金属成形工作者都在进行此项工作。其原因,一方面是因为塑性失稳现象本身具有重要的实际意义,它发生在金属成形过程(或某些金属试验过程)中,并且控制了这些过程的进行。例如,金属板冲压时,板所能承受的应变量、受拉伸区的颈缩和压缩区的皱曲这些塑性失稳现象的控制,而颈缩、皱曲的发生意味着塑性断裂或失效即将来临,成形达到了极限。根据塑性失稳预报结果作出的成形极限图是制订金属成形规范的科学依据。另一方面是因为塑性失稳现象的研究涉及非线性(材料非线性,几何非线性)连续介质力学的基本理论,特别是本构理论,从某种意义上讲,能推动非线性连续介质力学向前发展。第三方面是因为计算技术的发展使得这个问题的有效研究成为可能。

塑性失稳现象的研究已经取得了很大进展,但仍有许多问题。本文的目的就是试图评述已取得的进展,并指出仍存在的问题,以便为今后的研究提供一个参考。

本文首先简要讨论了分析塑性失稳现象的基本理论工具——Hill分叉准则。接着综述了发生在金属成形过程中的塑性失稳现象——剪切带、颈缩、皱曲的研究成就和存在问题,其中着重阐明了塑性失稳预报和本构关系选择的联系,指出了塑性失稳预报结果取决于所选择的本构关系。除此之外,本文还讨论了材料各向异性、应变率敏感、不均匀性及其幅度、惯性等因素对塑性失稳的影响。

## 2 分析塑性失稳的基本理论——Hill分叉准则

分析弹塑性材料有限塑性变形时的失稳现象通常是依据Hill<sup>[1]</sup>提出的增量边值问题解

的唯一性和分叉准则进行的。

首先讨论增量边值问题解的唯一性。该增量边值问题的形式是：在物体  $V$  的表面  $S$  的一部分  $S_T$  上给定了名义表面应力增量  $\dot{\mathbf{T}}$ ，在表面  $S$  的其余部分  $S_u$  上给定了位移增量  $\dot{\mathbf{u}}$ 。设材料是率无关的，且其本构关系可表示为

$$\dot{\eta}_{ij} = M_{ijkl} \dot{\tau}^{kl}, \quad \dot{\tau}^{ij} = L^{ijkl} \dot{\eta}_{kl} \quad (2.1)$$

或

$$\dot{\tau}^{ij} = \partial V / \partial \dot{\eta}_{ij}, \quad \dot{\eta}_{ij} = \partial V^o / \partial \dot{\tau}^{ij} \quad (2.2)$$

式中  $\dot{\eta}$  为 Lagrange 应变率张量， $\dot{\tau}$  为 Kirchhoff 应力率张量， $\mathbf{M}$  为材料的弹性柔度张量， $\mathbf{L}$  为材料的弹性刚度张量， $V = \frac{1}{2} L^{ijkl} \dot{\eta}_{ij} \dot{\eta}_{kl}$ ， $V^o = \frac{1}{2} M_{ijkl} \dot{\tau}^{ij} \dot{\tau}^{kl}$ ，它们都是势函数。

对名义应力率  $\dot{\mathbf{t}}$  而言，则为

$$\dot{t}^{ij} = \partial U / \partial \dot{u}_{j,i}, \quad \dot{u}_{j,i} = \partial U^o / \partial \dot{t}^{ij} \quad (2.3)$$

式中  $U(\dot{\mathbf{u}})$ ， $U^o(\dot{\mathbf{t}})$  也是势函数，并且

$$U(\dot{\mathbf{u}}) = V + \frac{1}{2} \tau^{ij} \dot{u}_{j,i} \dot{u}_{k,j} = \frac{1}{2} \dot{t}^{ij} \dot{u}_{j,i} \quad (2.4)$$

若对某给定载荷增量而言，非单值或分叉是可能的，则至少有两个解存在。如设其分别为  $\dot{\mathbf{u}}^{(a)}$ ， $\dot{\mathbf{u}}^{(b)}$ ，则两解的差为

$$\dot{\mathbf{u}}^* = \dot{\mathbf{u}}^{(b)} - \dot{\mathbf{u}}^{(a)}, \quad \dot{\mathbf{t}}^* = \dot{\mathbf{t}}^{(b)} - \dot{\mathbf{t}}^{(a)} \quad (2.5)$$

但

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}^* &= 0, && \text{在 } S_u \text{ 上} \\ \dot{\mathbf{T}}^* &= \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{t}}^* = 0, && \text{在 } S_T \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式中  $\mathbf{n}$  是初始构形中表面元  $dS_T$  上的单位矢。因为

$$\dot{\mathbf{T}} = n_i \dot{t}^{ij} \mathbf{g}_j = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{t}}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_i \mathbf{g}^i \quad (2.7)$$

(式中  $\mathbf{g}_i$  是相对于初始构形的基矢量， $\mathbf{g}^i$  是对偶基矢量)，故

$$\int_S \dot{\mathbf{T}}^* \cdot \dot{\mathbf{u}}^* dS = \int_S n_i \dot{t}^{ij*} \dot{u}_j^* dS \quad (2.8)$$

根据散度理论，有

$$\int_S n_i \dot{t}^{ij*} \dot{u}_j^* dS = \int_V \dot{t}^{ij*} \dot{u}_{j,i}^* dV \quad (2.9)$$

故上述增量边值问题解的唯一性的充分条件，对于所有满足 (2.6) 的  $\dot{\mathbf{u}}^*$ ， $\dot{\mathbf{t}}^*$  而言，是

$$\int_S n_i \dot{t}^{ij*} \dot{u}_j^* dS = \int_V \dot{t}^{ij*} \dot{u}_{j,i}^* dV > 0 \quad (2.10)$$

根据 (2.3)，(2.10) 又可写为

$$\int_V \dot{t}^{ij*} \dot{u}_{j,i}^* dV = \int_V \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{u}_{j,i}^*} \right)^* \dot{u}_{j,i}^* dV > 0 \quad (2.11)$$

(2.10)，(2.11) 都是解的唯一性的充分条件的表达式。应该指出，当材料是非线性时，(2.11) 或 (2.10) 中的被积函数是多值的，在实用上有诸多不便。为此，Hill 引进比较线性固体的概念，即假定在可能发生非唯一（即分叉）的瞬间，没有弹性卸载发生，这样，本构关系 (2.1) 中的刚度张量  $\mathbf{L}$  便相当于已屈服区内的塑性加载部分，这意味着  $U^*$  是  $\dot{u}_{j,i}^*$  的

二次函数。因此，对唯一解而言，(2.11) 可表示为

$$\int_V U^*(\dot{u}^*) dV > 0 \quad (2.12)$$

根据 (2.4)，Hill 关于解的唯一性充分条件可进一步表示为

$$F(\dot{u}^*) = \int_V \left[ V^*(\dot{u}_i^*) + \frac{1}{2} \tau^{ij} \dot{u}_i^* \dot{u}_{i,j}^* \right] dV > 0 \quad (2.13)$$

(2.13) 是实际使用的表达式。解的唯一性充分条件亦称解的唯一性准则。

再讨论解的非唯一性或分叉。当 (2.13) 中的泛函  $F$  等于零时，解的非唯一性或分叉便成为可能，临界场  $\dot{u}^*$  是使  $F$  取得最小值的  $\dot{u}$ ，于是，在分叉的瞬间，有

$$\left. \begin{aligned} F(\dot{u}^*) &= \int_V \left[ V^*(\dot{u}_i^*) + \frac{1}{2} \tau^{ij} \dot{u}_i^* \dot{u}_{i,j}^* \right] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \left[ L^{ijkl} \dot{\eta}_{ij}^* \dot{\eta}_{kl}^* + \tau^{ij} \dot{u}_i^* \dot{u}_{i,j}^* \right] dV \\ \delta F(\dot{u}^*) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

(在  $S_u$  上， $\dot{u}^* = 0$ )，这即是分叉准则。它可以用来确定分叉临界应力  $\tau_{ij}^*$ ，临界位移增量  $\dot{u}^*$  代表相应的分叉状态，而求分叉状态相当于求增量边值问题

$$\left. \begin{aligned} \dot{t}_{ij}^* &= 0, \quad \dot{t}^{ij*} = (\partial U / \partial \dot{u}_{j,i})^*, \quad \text{在 } V \text{ 内} \\ \dot{\eta}^{ij*} &= n_i \dot{t}^{ij*} = 0, \quad \text{在 } S_T \text{ 上} \\ \dot{u}_i^* &= 0, \quad \text{在 } S_u \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

( $\dot{t}_{ij}^* = 0$  是平衡方程，忽略了体积力率) 的解。

再一次强调，唯一性准则 (2.13) 和分叉准则 (2.14) 都是对比较线性固体而言的。

### 3 剪切带 (材料) 失稳

现在讨论剪切带失稳发生的条件。这种类型的失稳常称为材料失稳，因为它可作用在物体内部的任一材料元中，而与元的大小、总体载荷及运动条件无关。

在载荷作用下发生均匀变形的固体中考虑一微元。剪切带的开始相当于从平衡状态发生分叉。采用现时直角坐标系，这种类型分叉的变形状态是<sup>[28]</sup>

$$\dot{u}_i^* = f_i(\nu_k x_k) \quad (3.1)$$

式中  $\nu$  是剪切平面的法矢， $x_k$  是直角坐标， $u_i^*$  是分叉瞬时带内外位移增量的差值。对应于 (3.1) 的速度梯度为

$$\dot{u}_{i,j}^* = f_i^{\cdot j} \nu_j = g_i \nu_j \quad (3.2)$$

根据  $\dot{\tau}_{ij}$  和  $\dot{t}_{ij}$  的关系  $\dot{t}_{ij} = \dot{\tau}_{ij} + \tau_{ik} \dot{u}_{j,k}$  及 (2.1)，横过带面名义应力率的变化(差值)为

$$\dot{t}_{ij}^* = \dot{\tau}_{ij}^* + \tau_{ik} \dot{u}_{j,k}^* = K_{ijkl} \dot{u}_{l,i}^* = K_{ijkl} \nu_l g_k \quad (3.3)$$

式中

$$K_{ijkl} = L_{ijkl} + \delta_{ik} \tau_{jl} \quad (3.4)$$

式中  $\delta_{ik}$  是 Kronecker 记号。分叉开始时带的平衡条件需要名义表面引力率的变化(差值)  $\dot{T}^*$  为零：

$$\dot{T}_j^* = \nu_i \dot{t}_{ij}^* = \nu_i K_{ijkl} \nu_l g_k = 0 \quad (3.5)$$

当

$$D = \det(\nu_i K_{ijkl} \nu_l) = \det(\nu \cdot K \cdot \nu) = 0 \quad (3.6)$$

时, 剪切带形式的分叉便成为可能<sup>[3,4]</sup>。剪切带的取向  $v$  是使  $3 \times 3$  阶行列式 (3.6) 取最小值的  $v$ 。根据 (3.4), 剪切带开始发生时的临界应力  $\tau_{ij} = \sigma_{ij}$  由下式确定:

$$D = \det[v_i v_l (L_{ijkl} + \delta_{jk} \sigma_{il})] = 0, \quad \delta D = 0 \quad (3.7)$$

(3.6) 或 (3.7) 的推导过程是将 (3.1) 代入泛函 (2.14), 化简整理即可得到。

Hill 和 Hutchinson<sup>[5]</sup> 对矩形板的平面应变拉伸时的各种分叉形式作过透彻的分析。他们把材料看作不可压缩和初始各向同性的, 并假定板的侧面没有受力, 端面受均匀拉应力作用而无剪应力作用, 这意味着在均匀伸长后的增量响应仅受两个瞬时模量即瞬时切线模量  $E_t$  (它联系着  $\sigma$  的增量和自然应变增量) 和瞬时剪切模量  $\mu$  的控制。

上述情况的剪切带分叉的临界应力, 由 [1] 和 [6] 知为

$$\sigma = E_t (4\mu/E_t - 1)^{1/2} \quad (3.8)$$

若  $E_t \ll \mu$ , 则 (3.8) 可近似地表示为

$$\sigma = 2\sqrt{\mu E_t} \quad (3.9)$$

对于单调增加的伸长而言, 均匀预分叉状态的切线模量  $E_t$  单调地减小。然而,  $\mu$  值取决于所采用的本构关系, 对于任何基于光滑屈服表面的塑性本构模型而言,  $\mu$  必然是弹性剪切模量, 因此, (3.9) 意味着剪切带分叉仅仅在非真实应力水平上发生, 其数量级为弹性模量级。在另外一方面, 对于采用有角点的屈服面塑性本构模型而言, 在均匀预分叉情况下,  $\mu$  将随应力的增大而减小。通常, 当采用有角点的屈服面时, 使用塑性变形理论来代替塑性流动理论<sup>[7]</sup>, 这时, 剪切模量近似地由下式确定:

$$\mu = E_s/3 \quad (3.10)$$

式中  $E_s$  是等效单轴应力-应变曲线的割线模量。这样, 根据塑性变形理论, 剪切带分叉在更真实的  $\sigma$  水平发生。这个结果与上面用流动理论所得结果是相反的。

#### 4 板的颈缩

在金属板的成形过程中, 局部颈缩现象经常控制着某种成形过程能否进行下去。因此分析和预报颈缩的发生和发展具有重要的实际意义。到目前为止, 分析金属板的颈缩发生和发展一般有两种方法, 一种是均匀板中颈缩带开始的分叉分析, 另外一种是在板中假定存在着初始几何或材料不均性, 随后发展成为颈缩。大部分工作是在假定板处于平面应力条件下进行的。颈缩失效的临界条件经常表示为成形极限图, 它是颈缩处两临界主应变坐标系中的曲线。

4.1 均匀板的颈缩 对承受比例应变的理想均匀板作分叉分析, 两个主应变的关系为

$$\varepsilon_2 = \rho \varepsilon_1 \quad (4.1)$$

式中  $\varepsilon_1$  是两个主应变中较大的一个。对于初始各向同性板而言,  $\rho$  的变化范围是  $-1/2 < \rho < 1/2$  (在此范围内失稳由颈缩控制), 单轴拉伸时  $\rho = -1/2$ ; 平面应变拉伸时  $\rho = 0$ ; 平面等向应力时  $\rho = 1$ ; 分析时认为在颈缩带内应力和应变是变化的, 而在带外不变。因为已假定是平面应力, 故带的宽度必定比板的厚度大些。

颈缩分析的早期结果见 Hill<sup>[8]</sup>。他认为材料是刚塑性的, 采用  $J_2$  流动理论, 材料的单轴行为由指数关系式

$$\sigma_u = K \varepsilon_u^N \quad (4.2)$$

控制。式中  $K$  是材料常数,  $N$  是加工硬化指数。分析的结果是当  $-1/2 < \rho < 1/2$  时, 颈缩带在

$$\varepsilon_1 = N/(1+\rho) \quad (4.3)$$

时发生。带的法线与应变主轴成  $\text{tg}^{-1}\sqrt{-\rho}$ 。当  $\rho > 0$  并采用光滑屈服面时，在刚塑性固体中将无分叉发生（即无法预报颈缩的发生）。

为了避免  $\rho > 0$  时的困难，Stören 和 Rice<sup>[9]</sup> 采用在屈服面的加载点上有角点的理论，并根据塑性变形理论来确定瞬时模量，结果预报了  $0 < \rho < 1$  时的颈缩带在垂直于主应变轴的方向形成，形成时的

$$\varepsilon_1 = \frac{3\rho^2 + N(2+\rho)^2}{2(2+\rho)(1+\rho+\rho^2)} \quad (4.4)$$

预报时材料的单轴行为仍假定由 (4.2) 控制。当  $\rho = 0$  时，流动理论和变形理论给出的结果是相同的，(4.3) 和 (4.4) 都给出了  $\varepsilon_1 = N$ 。当  $\rho = 1$  时，(4.4) 给出

$$\varepsilon_1 = (1+3N)/6 \quad (4.5)$$

结果  $\varepsilon_1 > N$  (若  $N < 1/3$ )。当  $\rho < 0$  时，Stören, Rice 的预报，即 (4.4) 给出的结果比 (4.3) 稍低一些，但差别不大。

虽然 Stören 和 Rice 没有强调，但若应用他们所用的本构关系，则 (4.4) 将不能适用于  $N$  的整个范围。若  $\rho = 1$ ,  $N > 1/3$ ，则颈缩带的失稳将在比 (4.5) 的  $\varepsilon_1$  值小时发生。

Hutchinson 和 Neale<sup>[10]</sup> 应用有限应变变形理论研究颈缩问题。Stören 和 Rice<sup>[9]</sup> 所使用的本构模型是小应变范围内的真变形理论（即非线性弹性固体），而 Hutchinson 和 Neale<sup>[10]</sup> 所使用的本构模型是大应变范围内的真变形理论。对于比例加载而言，在有限应变范围内，Hutchinson, Neale 所得到的结果和 Stören, Rice 所得结果是一样的。两个理论的差别表现在由 Hutchinson, Neale 所得瞬时剪切模量要比由 Stören, Rice 所得的大些。当  $\rho < 0$  时，由 Hutchinson, Neale 所得结果处于由 Hill (4.3) 和由 Stören, Rice 所得结果之间。而当  $0 \leq \rho \leq 1$  时 Hutchinson, Neale 结果和 Stören, Rice 结果相同。进一步而言，根据 Hutchinson, Neale 颈缩形式的分叉先于剪切带的形成，即使  $N$  值很大时亦如此。

4.2 非均匀性及其幅度的影响 为了避免  $\rho > 0$  时按  $J_2$  流动理论理想均匀板中无颈缩发生的预报，M-K (Marciniak 和 Kuczynski)<sup>[11]</sup> 引入了不均匀性的概念，即认为在板中存在某种几何或材料的不均匀性（缺陷）。根据这种观点，他们对板的颈缩作分析时，假定在颈缩内外都是平面应力，材料满足  $J_2$  塑性流动理论。若不均匀性以几何厚度变化或材料性能沿垂直于带长方向变化形式存在，则问题是 1 维的（1 维不均匀）。因为有平面应力的假设，颈缩最小点处的应力应变增量可根据颈缩外的给定应变增量直接求解。他们按这种方式计算了颈缩以外的极限应变与不均匀幅度的关系，结果发现，对于  $\rho > 0$  而言，不均匀性的存在导致一定的极限应变，但是，所预报的极限应变值和实验资料吻合得不是很好。Hutchinson 和 Neale<sup>[12]</sup> 应用 M-K 不均匀性的概念作过许多分析。他们在分析中使用  $J_2$  变形理论描写材料特性，分析结果表明，不均匀性的存在使极限应变减小，这种减小对于所有  $\rho$  值大致是相同的。

在平面应变和  $\rho = 0$  情况下，两个塑性理论给出相同的预报。对于简单拉伸时材料特性由 (4.2) 描述的材料，在颈缩外可达到的应变和厚度微小不均性的关系，根据 Hutchinson, Neale<sup>[12]</sup> 的计算为

$$\varepsilon_1/N = 1 - \sqrt{(2\xi)/N} \quad (4.6)$$

式中  $\xi$  是带的最薄处的厚度减缩率。

到目前为止还不能用实验方法确定哪个本构关系式最适合分析板的颈缩。当假定应变率的影响可以被忽略，材料是各向同性时，一般的结论是变形理论给出极限应变的下限，流动理论给出极限应变的上限。困难在于当  $\rho > 0$  时两种理论给出的结果差别很大。若用随动强化理论代替各向同性强化理论，则给出的结果更接近实际。

不均匀性的具体形式对极限应变亦有不同影响。关于几何不均的具体形式，到目前为止共有 3 种模型：一种是标准的 M-K 模型（长沟槽模型），另一种是 1984 年 Bate 和 Wilson<sup>[13]</sup> 提出的由许多断面为圆紧密排列而成的圆模型，第三种是 Neglo 等<sup>[14]</sup> 在 1987 年提出断面为椭圆的椭圆模型。根据 Neglo 等<sup>[14]</sup> 应用其所提出的椭圆模型对双向受拉金属板的分析结果表明，在一般情况下，具有椭圆形不均的双向受拉金属板的极限应变要比具有标准的 M-K 模型的大，比具有圆模型的小。但当椭圆长短半轴长大于 8，其对极限应变的影响与标准的 M-K 模型的相同，而圆模型则可看作是长短半轴相等的椭圆。

4.3 应变率敏感性和惯性的影响 Hutchinson 和 Neale<sup>[15,12]</sup> 研究了应变率敏感对颈缩滞后的影响。考虑平面应变 ( $\rho = 0$ ) 情况，设单轴拉伸时材料的响应为

$$\sigma_u = K \varepsilon_u^N \dot{\varepsilon}_u^M \quad (4.7)$$

式中  $M$  是材料的应变率相关性的量度。又设

$$d\varepsilon_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_1 |_{M=0} \quad (4.8)$$

表示应变率相关性所引起的颈缩滞后或极限应变。根据他们的分析，应变率敏感性对增大颈缩前应变有很大影响，即使  $M$  值很小，也使极限应变有很大增加。

在以上的研究中，都没有考虑惯性的影响。

1978 年 Taylor 等<sup>[16]</sup> 用 1 维流体动力学相似理论研究了率敏感材料板的动力失稳问题。1986 年 Regazzoni 等<sup>[17]</sup> 用数值方法分析了与率及温度有关的轴对称固体中惯性对失稳的影响。1989 年 Needleman<sup>[18]</sup> 研究了包含惯性影响的粘塑性固体中剪切带的发展，并在分析中考虑了由于变形热而诱发的软化影响。1990 年 Tugcu 等<sup>[19]</sup> 用有限元法研究了圆棒受拉时惯性力对颈缩发展的影响，所采用的是大变形弹粘塑性本构关系，模拟出了整个载荷-变形-时间响应。所有的研究表明，有惯性力存在条件下颈缩的基本特征与静力条件下不一样。图 1 是 Tugcu<sup>[19]</sup> 提供的有无惯性力存在时的响应的差别。由图 1 可以看出，载荷-变形历史的早期阶段，二者基本无差别，之后，当  $L/L_0 > 0.180$  时，惯性力对颈缩有滞后作用。图中横箭头处指示颈缩单元。

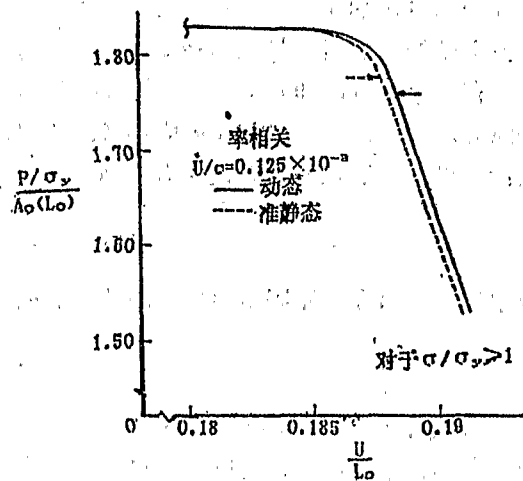


图 1 率相关固体的静态和动态拉伸响应比较  
 $P$  载荷,  $\sigma_y$  拉伸屈服极限,  $A_0$  初始面积,  
 $L_0$  初始长度,  $U$  端面位移

4.4 各向异性参数的影响 Bassani<sup>[20]</sup>, Neale<sup>[21]</sup> 等研究过材料各向异性对板局部颈

缩的影响。在他们的研究中，材料的各向异性用 Hill<sup>[22]</sup> 平面应力各向异性屈服函数

$$|\sigma_1 + \sigma_2|^n + (1 + 2R)|\sigma_1 - \sigma_2|^n = 2(1 + R)\sigma_e^n \quad (4.9)$$

和 Bassani<sup>[23]</sup> 平面应力各向异性屈服函数

$$|\sigma_1 + \sigma_2|^n + \frac{n}{m}(1 + 2R)\sigma_e^{n-m}|\sigma_1 - \sigma_2|^m = \left[1 + \frac{n}{m}(1 + 2R)\right]\sigma_e^n \quad (4.10)$$

描述。(4.9) 和 (4.10) 中的  $R$  是材料的各向异性参数,  $m, n$  是材料参数,  $\sigma_e$  是等效应力, 在单轴拉伸时  $\sigma_e$  即是实时流动应力 (这时  $\sigma_e = \sigma_u$ )。研究的结果表明, 在双向拉伸范围 ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) 内, 成形极限曲线对 (4.9), (4.10) 中参数  $m, n$  非常敏感, 但是在平面应变  $\rho = 0$  情况下没有影响。为了作进一步的研究, Neale 和 Chater<sup>[24]</sup> 采用 Budiansky<sup>[25]</sup> 横向各向同性屈服函数

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_s} = g(\varphi) \sin \varphi, \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_b} = g(\varphi) \cos \varphi \quad (4.11)$$

(式中  $\sigma_s, \sigma_b$  是纯剪和等值双向拉伸时的实时屈服应力) 和  $J_2$  塑性变形理论, 并认为材料的单轴本构关系仍为 (4.2)。结果得到临界颈缩应变为

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_b = (N/2)[1 - 1/(NC_b)] \quad (4.12)$$

式中  $C_b$  是屈服表面的局部曲率, 它为

$$C_b = \sigma_b \frac{d^2\sigma_2}{d^2\sigma_1} \Big|_{\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_b} \leq 0 \quad (4.13)$$

如使用 Hill 各向异性屈服函数 (4.9) 和 Bassani 各向异性屈服函数 (4.10), 则  $C_b$  的变化范围为  $C_b = 0$  到  $C_b = -\infty$ , 结果导致理论临界颈缩应变从  $\varepsilon_b = \infty$  到  $\varepsilon_b = N/2$ 。根据其他塑性理论 (例如流动理论) 分析的结果亦显示与变形理论相同的趋势, 即所预报的颈缩局部应变对描写材料各向异性的屈服函数中的参数相当敏感。

在 Neale 和 Chater<sup>[26]</sup> 的最近研究中, 采用了 Budiansky<sup>[25]</sup> 广义屈服函数来描写板的各向异性, 并检验了它对理论成形极限图的适用性。他们采取 Bassani<sup>[27]</sup> 按 Bishop-Hill 方法计算出的屈服轨迹, 并在应力空间中配备一极坐标参数的屈服函数

$$g(\alpha) = \sum_{n=0}^l a_n \cos(2n\alpha) \quad (4.14)$$

应用这个各向异性屈服函数所得的结果表明, 不存在应用过去那些函数时常常看到的不规律现象。

## 5 皱 曲

以皱曲 (wrinkling) 形式存在的表面歪扭经常发生于金属板的成形中。由于高强度薄板的成形愈来愈广泛, 所以皱曲已成为非常普遍而又难于处理的失效形式。

到目前为止, 预报薄板皱曲失稳所用的方法主要是经验性的。Yoshida<sup>[30]</sup> 试验已作为评估薄板皱曲的一个方法。在这个方法中, 一个方试件承受对角线拉伸, 以使在板中心发生局部皱曲。曾经试图使皱曲高度及皱曲载荷与材料性质联系起来。不幸的是, 这个方法不可能考虑所有引起皱曲的参数。作为例子, Hutchinson 和 Neale<sup>[28]</sup> 已经揭示, 板的局部曲率与板的皱曲准则有很大关系。然而, 这个重要参数的影响在 Yoshida 试验中没有反映。

分析皱曲的一个方法是 Hutchinson 和 Neale<sup>[28]</sup> 最近提供的。后来, Neale<sup>[29]</sup> 又把它

发展到包括考虑各向异性的影响。这个方法的要点是从曲面金属板中割出一小块，并用薄壳的塑性分叉分析方法确定皱曲的临界条件。

皱曲可以看作作为一种屈曲 (buckling) 现象，在这种屈曲现象中，屈曲的波长在某一个方向非常短。进一步说，当成形过程中发生皱曲时，它一般限于薄板的局部区域。因此，屈曲模式取决于板的局部厚度和曲率，取决于材料的性质和局部应力状态。Hutchinson 和 Neale<sup>[28]</sup> 按塑性屈曲模式分析了局部皱曲，并且指明可用 Mushtari-Vlasov 薄壳理论进行分析。但这个薄壳理论局限于分析特征波长比板厚大，比板的局部曲率半径小的屈曲状态。

[28]中的公式是非常一般性的，能够处理任意加载条件。结果，当假定皱曲以前的应力状态是均匀的薄膜状态，且其主轴与曲率主轴重合时，可得出关于皱曲的应力公式。因此，Neale 考虑了这样的一个薄板元，这个薄板元在成形的实时阶段达到了具有主曲率半径  $R_1$ ,  $R_2$ ，厚度  $t$ ，膜应力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  (压力) 的双曲状态，分析限于板中不与模具接触的部分。

对于与一主方向一致的皱曲，已得到了一些简单的结果，例如，垂直于 1 方向的皱曲临界主应力为

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{t}{R_2} \right) (L_{11}L_{22} - L_{12}^2)^{1/2} \quad (5.1)$$

式中  $L_{\alpha\beta}$  是本构关系

$$\dot{\sigma}_\alpha = L_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (5.2)$$

中的增量模量。变换 (5.1) 中的指标  $1 \rightarrow 2$ ，便得出垂直于 2 方向的皱曲临界主应力  $\sigma_2$ 。

上述结果显示了局部几何参数 ( $t/R$ ) 对皱曲的重要影响。这个影响在 Yoshida 试验中并没有模拟。它也表明曲率半径  $R_1$  对临界主应力  $\sigma_1$  没有影响。虽然  $\sigma_2$  没有出现在 (5.1) 中，但它也影响  $\sigma_1$ ，因为  $L_{\alpha\beta}$  与  $\sigma_2$  有关。

假如预加载历史是成比例的，并且塑性变形理论可用来模拟材料的行为，则 (5.1) 的结果可进一步简化。对于各向同性和不可压缩材料，本构关系如 (5.1) 所示的材料，且比例应变路径为  $\epsilon_2/\epsilon_1 = \rho = \text{const}$  时，可得到<sup>[29]</sup> 垂直于 1, 2 方向的皱曲临界主应变

$$\epsilon_1 = \frac{\sqrt{N}}{(2+\rho)} \cdot \frac{t}{R_2}, \quad \epsilon_2 = \frac{\sqrt{N}}{(2+\rho^{-1})} \cdot \frac{t}{R_1} \quad (5.3)$$

由于在上面的分析中作了许多人为的假定，所以简化准则 (5.3) 有很大局限性。然而，这些结果表明，局部几何形状和材料性质如何影响皱曲。它也表明，为什么高强度 (低  $N$ ) 薄板成形时经常伴随皱曲失效发生。

## 6 结论

本文讨论了塑性失稳现象的最新研究情况。但是，正如文中所能看到的那样，当涉及问题的定量分析和定量预报时，困难很大，同一现象若用不同的塑性理论分析则所得的结果非常不同。描述材料各向异性参数的轻微变化也可能导致结果的巨大变化，这对板的颈缩失稳而言尤其如此。除此之外，应变率敏感性、不均匀性、惯性等因素也都有重要影响。

现在分析塑性失稳的主要困难是如何选择合适的本构关系。到目前为止，还没有足够的实验资料来说明哪个本构关系更能适合于某个特定的现象。因此，进行这方面的实验研究，无疑是当前研究塑性失稳问题的具有头等重要意义的任务。



## 参 考 文 献

- 1 Hill R. *J. Mech. Phys. Solids*, **6** (1958) : 236—249
- 2 —. *ibid*, **7** (1959) : 209—225
- 3 Rice J. in *Theoretical and Applied Mechanics* (ed Koiter W). North Holland, Amsterdam (1977): 207—220
- 4 Needelman A, Rice J. in *Mechanics of Sheet Metal Forming* (ed Koistinen D, Wang N-M) . Plenum Press, New York (1978) : 237—267
- 5 Hill R, Hutchinson J. *J. Mech. Phys. Solids*, **23** (1975) : 239—254
- 6 Hutchinson J. in *Proc. 8th U. S. Nat. Cong. of Appl. Mech.* (ed Kelly R) . Western Periodicals CO. North Hollywood (1979) : 87—98
- 7 —. *Adv. Appl. Mech.*, **14** (1974) : 67—144
- 8 Hill R. *J. Mech. Phys. Solids*, **1** (1952) : 19—30
- 9 Storen S, Rice J. *ibid*, **23** (1975) : 421—441
- 10 Hutchinson J, Neale K. in *Mechanics of Sheet Metal Forming* (eds Koistinen D, Wang N-M) . Plenum Press, New York (1978) : 127—153
- 11 Marciniak Z, Kuczynski K. *Int. J. Mech. Sci.*, **9** (1967) : 609—620
- 12 Hutchinson J, Neale K. in *Mechanics of Sheet Metal Forming* (eds Koistinen D, Wang N-M) . Plenum Press, New York (1978) : 269—285
- 13 Bate P, Wilson D. *Int. J. Mech. Sci.*, **26** (1984) : 363—372
- 14 Neglo K, et al. *ibid*, **29** (1987) : 807—821
- 15 Hutchinson J, Neale K. *Acta Meta.*, **25** (1977) : 839—846
- 16 Taylor J, et al. *ASME J. Appl. Mech.*, **45** (1978) : 105—110
- 17 Regazzoni G, et al. *ibid*, **53** (1986) : 519—528
- 18 Needelman A. *ibid*, **56** (1989) : 1—9
- 19 Tugcu P, et al. *Int. J. Solids Structures*, **26** (1990) : 1275—1285
- 20 Bassani J, et al. in *Metal Forming Plasticity* (ed Lippmann H). Springer Verlag (1979) : 1—13
- 21 Neale K, Chater E. *Int. J. Mech. Sci.*, **22** (1980) : 563—574
- 22 Hill R. *Math. Proc. Cambridge Philosophical Society*, **85** (1979) : 179—191
- 23 Bassani J. *Int. J. Mech. Sci.*, **19** (1977) : 651—660
- 24 Neale K, Chater E. *Proc. 8th Canadian Cong. of Appl. Mech.* Elsevier Sci. Publishers, Amsterdam (1981) : 255—256
- 25 Budiansky B. in *Mech. of Mat. Behavior* (ed Dvorak G, Shield R) . Elsevier Science Publishers, Amsterdam (1984) : 15—29
- 26 Neale K, Chater E. *Mechanical Behaviour of Materials-IV*. Pergamon Press, Oxford (1984): 681—685
- 27 Bassani J. *Int. J. Mech. Sci.*, **19** (1977) : 651—660
- 28 Hutchinson J, Neale K. in *Plastic Instability* (ed Salecon J) . Presses Ponts et Chaussees, Paris (1985) : 71—78
- 29 Neale K. in *Mechanical Behaviour of Materials-V* (ed Yan M-G et al) . Pergamon Press (1987): 177—182
- 30 Yoshida K. *Acta Meta.*, **6** (1974) : 474—482

## PLASTIC INSTABILITY IN METAL FORMING PROCESS

Wang Ling-yun

Chongqing University

**Abstract** Recent progress and unsettled problems concerning the plastic instability (shear band, necking, wrinkling) in metal forming processes are reviewed in this paper. The close relation between the prediction of plastic instability and the choice of constitutive laws is emphasized. It is pointed out that the predicted results strongly depend on the assumed constitutive laws. The effects of anisotropy, strain rate sensitivity, imperfection and its amplitude and inertia on plastic instability are discussed. Besides, the Hill's bifurcation criterion—a basic theoretical tool for analysis of plastic instability is also discussed briefly.

**Keywords** *plastic instability; forming limit; constitutive law*