第23卷 第3期　力学进展　Vol. 23 No. 3
1993年8月25日　ADVANCES IN MECHANICS　Aug. 25, 1993

现代力学中的现代数学方法

刘浔江
湖南大学邵阳分校（邮政编码422004）

提要　本文简要介绍了力学与数学再次结合趋势的历史背景和现状．根据当代科学技术向力学提出的问题，简要综述了现代力学所涉及的现代数学领域和方法．

关键词　现代力学；现代数学

1　力学与数学再次结合的趋势

50年代，钱学森[1]就指出：科学发展的早期，自然科学家和工程师本就是一家人，只是到了19世纪中叶，由于科学和技术的迅速发展，每一方面的工作因发展而变得更复杂、工作量更大而无法一一兼顾，他们才不得不分手去忙自己领域的事情．这其中作为自然科学的数学和作为技术科学的力学也不例外．还在Newton和Cauchy时代，它们间就一直是形影不离，关系密切．当时一个力学家也常同时是一个数学家．Newton，Lagrange，Laplace，Euler，Hamilton等无一不是这些一身而二任的优秀代表．牛顿力学体系的建立与微积分的创立，最速降线问题、短程线问题及等周问题与变分原理的奠立，广义位移的引进与高维流形的研究等都是这样地密切，以致在当时，数学已几乎成为力学的同义语．历史证明，力学与数学的这种结合使它们相得益彰，互相促进它们自身的发展和新领域的诞生[2]．19世纪中叶以后一段时间内，数学和力学二位一体的学者仍不乏其人，但毕竟由于上面钱学森所述的原因，它们的分家就成了这一时期的主流．

1983年，美国机械工程师协会主办的应用力学学报（*Journal of Applied Mechanics*）为纪念创刊50周年，邀请37位专家撰写了29篇综述评论文章出了一期特辑．这些文章几乎遍及现代力学各个分支．由于现代力学问题的复杂性，这些文章除反映现代力学多学科交缘这一特性外，还显示出适应这一局面的力学和数学的再次结合趋势．如[3]涉及的理性力学，[4]中以匹配渐近展开法处理边界层相互作用的三重结构，[5]中用线性和非线性规划方法解决结构优化设计问题等．显然，这是继力学与数学分家一段时间后，而对古典分析工具不足以应付现代力学问题的复杂性而再次出现的力学数学结合趋势，而且这个趋势自本世纪60年代以后更加明显．其中特别值得注意的是下面两个主流．

其一是理性力学的产生和发展．理性力学的产生可以溯源到17世纪．牛顿的《自然哲学的数学原理》便可以视作是第一本理性力学著作，1743年d'Alembert提出了“力学必须像

几何学那样建立在显然正确的公理上，且其结论都应有数学证明”这一理性力学原则. 其后直到本世纪初，理性力学都是指的按这一原则对力学问题进行的所有研究. 如 1788 年 Lagrange 创立分析力学及其前后 Bernoulli, Jacobi, Cauchy 及 Euler 等对连续介质运动普遍规律的研究等. 这一段期间的特点表明，早期力学家和数学家都比较注意在较大范围内去发展有关理论、概念及其数学描述. 但从本世纪初到本世纪中期，由于科学技术迅速发展造成的分工，人们大多局限于在各自的范围中工作，尤其是力学家这时主要着眼于传统力学在生产实际中的应用，因而忽略了力学与数学的联系及其共同基础的研究. 这种情况直至 1945 年 M Reiner 和 1948 年 R S Rivlin 的工作方始发生变化. 人们进一步认识到那种脱离整体认识的过度专门化研究难以富有生命力. 从此理性力学进入一个复兴时期. 这期间特别值得称道的是积极提倡复兴“理性力学”的美国科学家 C A Truesdell. 他于 1952 年主编了“理性力学分析学报 (*J. Rational Mech. Anal.*)”[1957 年易名为“理性力学分析集刊 (*Arch. Rational Mech. Anal.*)”]. 在他的倡导下，一批数学和力学工作者加入了系统研究理性力学的行列. 如果说 Reiner 和 Rivlin 等对橡胶材料大变形的研究及其后 J G Oldrody 对流变物质状态方程的研究，是为逐步形成近代理性力学创造了条件的话，那么 C A Truesdell, W Noll 和 B D Doleman 等从 1958 年以来提出更完善的构造物质运动本构方程的公理体系，以及建立各类物质本构方程的严密数学模型，便可以说已使理性力学形成了一个比较完美的理论体系. 1960年 Truesdell 和 Toupin 的《经典场论》[6]，系统地论述了理性力学的基本原理. 1965 年 Truesdell 和 Noll 的《非线性力学场论》[7] 出版. 这两部专著的相继问世标志着理性力学理论的确立和复兴时期的结束. 1962 年 Eringen 的《非线性连续介质力学》[8] 出版，理性力学进入高等学府课堂. 此后，从1966 年以来，理性力学进入一个和当代科技发展总趋势相呼应的发展时期. 它一方面和其他学科相互渗透成为一门横贯性的学科，另一方面它又更加紧密地结合着现代数学，而使力学研究更深入理论本质并概括更广泛的现象，以至形成一股力学与数学再次结合的潮流. 所以郭仲衡[9] 认为，“理性力学的复兴和发展就是这股‘结合’潮流的前兆”.

其二是 1977 年在波兰 Koiubnik 成立了“国际力学与数学交缘学会”. 这是自 1954 年国际数学研究会上 A N Kolmogorov 的报告[10] 后直到 1975 年在意大利 Lecce 召开第一次“纯数学在力学中应用趋向”讨论会以来的必然趋势. 交缘学会提出其宗旨是“最广泛地支持力学与数学的一切交缘活动. 给力学家系统提供实用的、抽象的数学新方法；给数学家系统介绍近代力学的、要求发展数学相应领域且对数学家有启发的概念和问题”. 这期间前后除1975年起每 2 年召开一次“纯数学在力学中应用趋向”国际讨论会外，各国学术界都加强了这方面的活动. 在我国，中国力学学会还成立了“理性力学和力学中的数学方法”专业委员会1)；英国牛津大学继 1975 年以后也设立了“应用数学”研究生课，研究偏微分方程理论及其在力学中的应用 (A B Tayler[12] 的《应用力学中的数学模型》即其研究总结之一). 此外，近数十年来，基于高层次数学理论与方法的力学教材和专著的大量涌现都反映了上述趋向强劲势头. 其中有代表性的，前者如 В И Арнольд[13] 为莫斯科大学所写的三

1) 中国学者还不失时机地为迎接数学力学再次结合的热潮积极地开展工作. 在该会的组织下自1986年迄今就现代数学和力学的结合已举行过 4 次讨论会. 此外由他们提交给第 16 届国际理论与应用力学大会 (ICTAM) 的论文也可见其工作之一斑[11].

年级应用力学教材，就已包含了流形、辛几何及 Lie 群等现代数学工具，不失为力学工作者涉足现代数学的一本优秀参考书；后者如[10]，全书用微分流形、辛几何作工具，对经典力学作了现代化的全面总结，系统地叙述了现代流形分析理论，并用它阐述了分析力学、动力系统及天体力学的经典成果，是一本不可多得的力学结合现代数学的优秀著作。除此以外，在众多的这类专著中，不但有奇异摄动理论和用于不易作解析处理的非线性发展方程等内容，而且还频繁地出现泛函分析、拓扑学、Hilbert 空间、随机过程等现代数学工具。

随着国际学术界掀起的数学与力学再次结合的热潮，力学的数学水平进一步得到了提高，数学与力学两家也重新得到了沟通：数学家看到了“许多现代数学理论是源于力学中的问题”[13]这一事实，而力学家和工程师也认识到不能再像以往那样只满足于提出问题而后坐等数学解。他们的重新合作提出了不少既属力学又属数学的新课题（如有限元法，孤立波，分岔及混沌问题等）。而且在这些课题中，有不少课题的意义远超出数学与力学的领域，其理论和方法广泛深入其他学科领域（如最早发现于力学中的突变和分岔理论之应用于经济学及生态科学等）。

因此，为了将我国力学工作提到一个新的高度，力学工作者应进一步了解、应用及参与现代数学的发展；数学工作者也应进一步了解或研究现代力学中的数学问题。

2 现代力学中的现代数学方法[1)]

文献[9,14]等就二次大战后，特别是近 20 年来当代科学技术的发展给力学提出的新课题，对其考虑之问题的角度作了如下综合。

①从线性分析转到非线性分析。当代科学技术（如能源、空间等领域）要求系统处于高速、高温、动载、强载下工作，所采用的构件材料的本构关系是非线性的。对此，以往行之有效的线性化处理不再适用。又如对低、中强度的韧性材料，由于存在着较大的塑性区，就必须考虑其非线性效应。[15]给出了非线性断裂问题的基本解与 J 积分的估算方法。如要了解流体流动状态转换的全过程及其机理，也须研究非线性流动稳定性理论。此外，塑性动力学、晶体塑性流、流变学、复合材料等问题无一不是非线性的[16-22]。

②从古典分析转到凸分析，进而到非凸分析。应用凸分析理论，可更深刻地描述弹塑性系统的物理本质，使其在形式上具有更完美的对偶性和互补性。当考虑弹性变形影响时，屈服面还可能是非凸的[23,24]。

③从光滑分析转到非光滑分析。[9]指出：作为一种集值映射的次微分推广了经典的导数概念，它能方便地处理塑性力学带角点的屈服条件。当严格考虑钢筋混凝土中钢筋的逐渐失效或钢结构铆接点摩擦力的被克服时，力和变形的关系出现锯齿形非光滑曲线。

④从固定边界转到运动或自由边界。力学、工程中的许多问题都有自由边界，如土坝渗流表面、冰的融化表面以及弹塑性分界面等，研究它们不仅有重要的理论意义，且有不可忽视的实际意义[25,26]。

⑤从双面约束转到单面约束。[9]根据[27]认为单面约束是自然界的普遍规律，而双面约束不过是一种例外而已。

⑥从单相分析转到多相及可出现相变的分析。如二相流动的稳定性及多相流等[28]。

1）参阅：郭仲衡主编．近代数学与力学．北京大学出版社（1987）．

⑦从解的唯一性转到分岔以至混沌现象．现已知道分岔（bifurcation）现象普遍存在于自然界中，准确地掌握系统在分岔点附近的行为就能使我们从总体性质上认识系统的变化规律．例如对结构稳定性问题，求分岔点及对分岔后结构的非线性行为的分析已成为其有决定意义的任务[29]．吸引子为奇点或非闭轨的现象也是近来为力学家和工程师所瞩目的研究领域．这由第16届ICTAM交流重点之一——动力系统混沌特性的研究与进展，也可见其盛况之一斑[30,31]．

⑧从实验模拟转到数值模拟．本世纪50年代以前因计算工具的计算速度和功能等的限制，人们还只能依靠实验模拟．实验模拟设备建造周期长，造价昂贵，受相似条件限制，通常还只能模拟一二个主要参数．50年代以后，随着计算机速度、容量及功能的提高，计算力学应运而生，力学面貌从此大为改观．它改革了力学中一些古老计算方法以适应计算机，同时也促进了数值方法的发展1）和力学家数学水平的提高2）．因而我们可以说：应运而生的计算力学也促进了力学与数学的再结合；其次在计算机的帮助下，人们对许多力学现象［如非线性力学研究的两个前沿领域(孤立子和混沌)］也逐渐清晰起来，同时部分常规实验模拟也逐渐被数值模拟所代替．

随着需要解算的科学和工程问题日益庞大，计算机，尤其是巨型机一直朝超高速方向发展着．如庄逢甘等[32]指出，到本世纪末，计算机内存约可达10^{11}个字，浮点运算速度可达每秒10^{12}次，计算空气动力学运动方程的时间和空间的分辨率比现在提高好几个量级，这样就使计算机可以作为一个很好的数学模拟气体流动的设备．[33—38]还指出了计算机的高速发展和力学发展间的密切关系，而它们间的密切关系和自身的发展又反过来对数学方法提出了更高的要求．

现代数学可以说包括三大部分：几何（拓扑及微分几何），分析（泛函分析及高等近似分析方法）及代数（近世代数）．代数中除群论在物理中专门应用外，它主要是作为几何和分析的工具被应用到数学物理中的．因此我们认为目前力学所涉及的现代数学主要是微分几何和泛函分析两个方面．

①微分几何方面．现代微分几何所研究的对象是微分流形，再具体赋以某种附加结构，即成某种流形，如引进辛结构，则成辛流形等．微分形式概念与微分流形思想相结合，已成为现代数学的一块基石出现在偏微分方程、代数拓扑和微分几何理论中，并在现代力学中有了广泛的应用．当使用这些现代数学工具来表述力学问题时，其许多复杂之处就可变得简单而易于理解，并给出优美而简洁的公式．例如往常力学的一种可能几何处理是以矢量场描述动力系统．但当力学的一些基本性质用与坐标的选取无关的形式表述时，按照现代微分几何的语言，一个力学系统的数学模型就应由如下要素构成：1）构形空间$Q=Q^n$（一个n维微分流形，n为系统的自由度数）；2）在相空间$P=TQ$（Q的切丛，即速度空间）或$P=T^*Q$（Q的余切丛，即动量空间）的辛结构（或Hamilton结构）Ω；3）在TQ上的

1）无论计算机怎样向大型化、高速化发展，如果相应的数学方法和数值方法得不到发展，有些问题（如相当大数量的偏微分方程组的积分问题等）仍然难于求解．在处理高维问题时，也常需引入有效的数值解法（譬如用Peaceman-Rachford在1955年提出的兼具经济和易解优点的差分方法）．

2）钱学森[1]曾指出，"每一个技术科学的工作者首先必须掌握数学分析和计算的方法"，他们"除了掌握现有的数学方法以外，还必须经常注意数学方面的发展……快速地加以利用"．

一个可微函数 T（Riemann 动能度量）；4）在 Q 上由 1 形式给出的一个力场[10,13]。

郭仲衡[39]曾指出，应用动量相空间的自然辛结构，不仅可由它很容易地得出Hamilton力学的现有全部结论，而且这一几何方法还可推广到无限自由度的连续统力学。

作为代数分支之一的 Lie 群，其理论最早是作为变换在微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=a_i\ (x(t)),\quad i=1,2,\cdots,n$$

的研究中出现的。为得到一个 Lie 变换群，上式要求对所有的 x 都有一个解。这表明，Lie 群 G 应为一拓扑空间，其上，群运算是可微的。换句话说，G 是一个拓扑群，并且在 G 的幺元素的某邻域上定义了一个坐标系。这样，一个 Lie 群便呈现了代数和几何两方面的性质，所以也是一类非常重要而又特殊的微分流形。

刚体力学中，刚体绕质心的转动可归结为对应于不变度量的 Lie 群的讨论[40]。此外 Lie 群在量子力学中（H Weyl 早已在其名著《群论和量子力学》中利用 SO(3) 的线性表示将 Lie 群应用于量子力学中），在连续介质力学中（如非均匀弹性体的物质联络问题等），在本构关系中（如同格群问题）等也有着重要的应用。[41]还介绍了 Lie 群在分岔理论中的应用。该书从微分形式入手，涉及拓扑学、微分几何、流形上的张量分析等，叙述简洁，面向应用，也可作为一本入门读物[10,13,42]。

微分拓扑方面，自20—30年代分别出现点集、代数拓扑的第一本教科书以来，微分拓扑已经成为拓扑学研究微分流形和可微映射的一个分支并渗入到了许多领域。其中以研究可微流形在可微同胚下不变性质的微分拓扑的理论和方法，已用于非线性动力学等问题的研究上。用微分拓扑定性地研究非线性动力学问题，国际上称为可微动力学（differentiable dynamics）。它自身的发展也要涉及动力系统的矢量场、结构稳定性及分岔等问题的讨论。这些已被用于对称系统、梯度系统、有限及无限自由度系统和 Hamilton 系统的研究上。它们的研究还对工程技术、生物系统等方面有较大的实用价值[43-46]。

②泛函分析方面。泛函分析是研究无穷维线性空间上的泛函空间与算子理论的数学分支。无穷维线性空间是描述具有无穷多自由度系统的工具，因此泛函分析也就可以定量地用于研究连续介质力学等一类具有无穷多自由度的力学系统。所谓泛函空间就是带有某类拓扑和代数结构等的抽象集。根据不同的拓扑和代数结构，力学常用的泛函空间有度量空间、线性拓扑空间、线性赋范空间、Banach 空间、内积空间、Hilbert 空间及 Sobolev 空间等。研究这些泛函空间上线性和非线性算子特性，并将其与力学结合起来就能使它们更深刻和广泛地反映力学规律。例如 Cauchy-Schwarz 和 Bessel 不等式之应用于弹性力学[47,48]，泛函分析之应用于变分法[48-50]，Courant-Weierstrass 方法之处理小振动和经典弹性稳定理论导致线性算子的特征值问题（其中并用到正自共轭算子的谱分析），Lusternik-Schnirelman 理论以变分法应用于非线性特征值问题[51]等。

不等式在泛函分析中有着重要的地位。经典弹性问题的变分法常归结为变分等式，但对单面接触问题、有摩擦的弹塑性理论等，其相应变分公式却又呈不等式形式。此外广义弹性力学问题[52]、弹粘塑性理论[53]中也有变分不等式不同形式的推广和应用。关于变分不等式及其应用，[54]及所列文献[3,4—11,23—25]均有总结。

对固体平衡与变形的研究过去提出过 3 维、2 维、1 维与离散等模型，经典固体理论也

只是立足于上述诸模型求解它们的各种具体问题．Oliveira 则以有限元、板壳等理论为依据提出“结构的数学理论”．它以泛函为工具建立一般响应模型，观察各模型的类同性，并研究由一模型生产另一模型的可能性与合理性．

上面提到的接触问题，若其解被约束在凸集K中，则属自由边界问题．自由边界问题的研究有很广泛的实际背景．这类问题除表现为相截面外（如 Stefan 问题），也可定义为解与某已知函数的分离集或重合集的边界（如在外力作用下绷在已知障碍上的膜平衡问题）．除这两类自由边界问题外，渗流力学，塑性力学，射流等方面也都提出了各种形式的定常和非定常自由边界问题[55,56]．

系统研究线性拓扑空间的凸集、（凸）多包形和凸函数的凸分析[57]，自本世纪 H Minkowski，C Carathéodory 等创始并奠定有关基本理论以来，到本世纪中叶，由于最优理论等的发展，已日益受到重视．此外，凸分析的形成和发展中有些概念还是出于明确的力学背景，这就更加促进了它的发展．它的许多成就已深入到变分学、势论、拓扑线性空间的一般理论、优化和变分不等式、近似理论、单调算子和非线性半群、经济学等领域中，其中如变分不等式、近似理论、单调算子和非线性半群等又是现代力学理论研究及数值分析的基础．在弹塑性系统的理论研究中凸分析也日益得到广泛的应用[20,24]．

随着非线性问题的深入研究，分岔和混沌问题成为60年代以来国际上十分活跃的应用分支．所谓分岔现象，即当非线性系统参数变化时，系统的性质发生质的变化．例如近年来，在结构的弹塑性动力响应的数值计算中所出现的分岔现象，流体力学中两圆柱间流体旋转运动的 Taylor 问题和热对流的 Bénard 问题，以及受外压球壳上屈曲纹的形成而出现的分岔现象等．所谓混沌则系非线性系统吸引子为非奇点或非闭轨的现象．这是自然界中普遍存在的现象，是非线性系统中局部线性和整体非线性相互作用的结果，它使非线性系统表现出内在随机性．

因研究分岔现象涉及泛函分析、群论、拓扑和几何方法，以及计算分岔的数值方法等，特别是近年来由于实际问题中不断涌现出大量的分岔问题，以及在理论上建立了较系统地处理这类问题的方法，分岔已发展成为一个独立的数学分支——分岔理论．V I Arnol′d 评介这一理论时说：“在对力学及其他系统分析其与参数的依赖性时，分岔理论所起的作用，类似于振动理论中动力学系统相图定性理论的作用”[30]．

[30]列举了若干现代分岔理论应用于力学的例子．较系统而全面地介绍非线性系统的分岔问题（如余维是 0,1,2 的分岔）的[31]还介绍了分岔理论在近海结构次调和共振、粒子加速器和 Hamilton 动力学等中的应用．此外，目前它已用于杆、板、壳等的失稳以及流动稳定性和湍流等方面的研究．

自 Lorenz 1963 年发现第一个混沌实例以来，科学家们相继被吸引到了混沌领域，混沌研究也随之渗透到了自然科学各个领域．随着这一研究的深入，不仅使某些计算与测量变得简单容易，而且还进一步揭示了力学系统中普遍存在着的混沌和随机性．目前，力学家已往往能从解的数值计算、Lyapunov 指数、维数、拓扑熵和功率谱的分析等结果去判断一个力学系统是否处于混沌状态；而恰好“最重要的问题”就是要“确定一个系统何时出现混沌的判据，以及预测混沌运动频谱性质的分析方法”[58]．[58] 综述了出现混沌动态和奇怪吸引子的非线性动力系统中若干例子及其相关数学模型，[31]就碰撞系统的混沌运动等也作了详

细的描述。

综合上述若干侧面可以看出，泛函分析在半个多世纪来一方面不断以其他众多学科所提供的素材来提取自已的研究对象和某些研究手段，并形成自已的许多重要分支，另一方面它又强有力地推动着其他学科特别是力学的发展。1975年9月IUTAM和IMU在法国联合召开了“泛函分析方法在力学问题中的应用”专题讨论会，展示了现代泛函分析方法在力学中的应用动向，[59]已有较详细的介绍。系统总结论述泛函分析及其应用的专著近年亦不断涌现，较为人熟悉的为Oden的著作如[60,61]等以及[62,63]等。

3 结 语

近代力学如果从Felix Klein算起，其发展不过80余年历史。而现代力学迄今只不过20余年历史，但却已使力学学科跃上了一个新的台阶。当然这还只是一个开端。在生产发展、科学发展内在规律及工程技术和力学间相互作用的推动下，现代力学更趋蓬勃发展，大批新兴力学分支如雨后春笋般涌现。随着它们的发展，力学工作者自本世纪50年代中以后，越出航空、航天方面理论和实验研究的藩篱，向着更广阔的应用与基础科学领域进军，并更为重视力学研究的基础部分[64]。这使得他们也就更加重视力学和数学的结合。

本文承国防科学技术大学华天瑞教授仔细审阅，在此表示深切感谢。

参 考 文 献

1 钱学森．论技术科学．科学通报，4（1957）：97—104
2 谈镐生．力学和它的发展．力学学报，3（1978）：242—250
3 Germain P, Nguyen Q S, Suquet P. Continuum thermodynamics. *J. Appl. Mech.*, 50, 4b (1983). 连续介质热动力学（郭仲衡译）．应用力学最新进展（上册），科学出版社（1987）：1—32
4 Messiter A F. Boundary layer interaction theory. *ibid*, 50, 4b (1983)．边界层干涉理论（魏中磊译）．应用力学最新进展（上册），科学出版社（1987）：211—240
5 Olhoff N, Taylor J E. On structural optimization. *ibid*, 50, 4b (1983)．论结构优化（程耿东译）．应用力学最新进展（下册），科学出版社（1987）：22—58
6 Truesdell C, Toupin R. The Classical Field Theories. Handbuch der Physik, Bd. Ⅲ/1. Springer-Verlag (1960).
7 ——, Noll W. The Nonlinear Field Theories of Mechanics. Handbuch dar Physik, Bd, Ⅲ/3. Springer-Verlag (1965)
8 Eringen A C. Nonlinear Theory of Continuous Media. McGraw-Hill (1962)
9 郭仲衡．略谈数学在力学理论研究中的作用．力学与实践，1（1987）：17—18
10 Abraham R, Marsden J E. Foundations of Mechanics (2nd ed). The Benjamin Cummings, Reading, (1978)
11 中国力学学会编．第十六届国际理论与应用力学大会（ICTAM）中国学者论文集锦．大连工学院出版社（1986）
12 Tayler A B. Mathematical Models in Applied Mechanics. Clarendon (1986)
13 Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer-Verlag, New York (1978)
14 林同骥，浦群．现代力学的发展．力学进展，20，1（1990）：1—10
15 Hutchinson J W. Fundamentals of the Phenomenological theory of nonlinear fracture mechanics. *J. Appl. Mech.*, 50, 4b (1983)．非线性断裂力学唯象理论的原理（杨卫译）．应用力学最新进展（下册），科学出版社（1987）：207—231
16 Diprima R C, Stuart J T. Hydrodynamic stability. *ibid*, 50, 4b (1983)．流体运动的稳定性（李家春译）．应用力学最新进展（上册），科学出版社（1987）：151—174
17 Clifton R J. Dynamic plasticity. *ibid*, 50, 4b (1983)．塑性动力学（诸德超译）．应用力学最新进展（下册），科学出版社（1987）：345—375
18 Asaro R J. Crystal plasticity. *ibid*, 50, 4b (1983)．晶体塑性（徐秉业，蒋方辉译）．应用力学最新进

展（下册），科学出版社（1987）：265—305
19 Tanner R I. Recent progress in rheology, *ibid*, **50**, 4b（1983）. 流变学最近的进展（董务民，范椿译）. 应用力学最新进展（上册），科学出版社（1987）：357—386
20 Willis J R. The overall elastic response of composite materials. *ibid*, **50**, 4b（1983）. 复合材料的全弹性响应（刘方龙译）. 应用力学最新进展（下册），科学出版社（1987）：59—83
21 王仁，黄克智，朱兆祥. 塑性力学进展. 中国铁道出版社（1988）
22 Campbell D K（黄永念译）. 非线性科学——从范例到实用. 力学进展，**19**，2，3，4（1989）
23 岑燕明. 弹塑性矩阵的基本性质及弹塑性应力位移的存在唯一性. 固体力学学报，2（1987）：97—107
24 Moreau J J（俞鑫泰译）. 凸分析在弹塑性系统中的应用. 力学进展，**14**，2（1984）：217—232
25 Fasano A, Primicerio M (Eds). Free Boundary Problems: Theory and Applications, Vol. Ⅰ, Ⅱ. Pitman, London (1983)
26 Bossavit A, Damlamian A, Fremomd M. Free Boundary Problems: Theory and Applications, Vol. Pitman London (1985)
27 Piero G Del, Macero F. Unilateral Problems in Structural Analysis. Springer-Verlag, Wien (1985)
28 周光垌，张有敬. 关于多相流. 力学进展，**9**，1，（1979）：1—7
29 Budiansky B. Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures. *Adv. in Appl. Mech.*, **14** (1974)：2—65
30 Arnol'd V I（朱照宣译）. 数学和力学中的分叉和奇异性. 力学进展，**19**，2（1989）：217—231
31 Thompson J M T, Stewart H B. Nonlinear Dynamics and Chaos. John Wiley&Sons (1986)
32 庄逢甘，张涵信. 计算空气动力学的回顾和展望. 力学进展，**13**，1（1983）：1—18
33 Gallagher R H. 固体力学中的计算方法. 应用力学（二）（1981）：20—28
34 孙金文. 我国计算力学的发展. 力学进展，**11**，2（1981）：193—196
35 濑口靖幸. 固体力学最近的进展，应用力学（二）（1981）：16—19
36 傅德薰. 计算空气动力学述评. 力学进展，**11**，3（1981）：199—214
37 吴学谋. 数学进展的某些问题. 计算机应用与应用数学，11（1976）：46—60
38 Самарский А А（程屏芬译）. 数学模拟和计算实验. 力学进展，**10**，1（1980）：74—80
39 郭仲衡. Hamilton 力学的几何理论. 近代数学与力学. 北京大学出版社（1987）
40 董华，郭仲衡. Lie 群和刚体力学. 近代数学与力学. 北京大学出版社（1987）
41 Sattinger D H, Weaver O, L. Lie Group & Algebra with Applications to Physics, Geometry & Mechanics. Springer-Verlag (1986)
42 李松年，黄执中. 非线性连续统力学. 北京航空学院出版社（1987）
43 郭乾荣. 微分拓扑在非线性动力学中的应用. 近代数学与力学，北京大学出版社（1987）
44 Chillingworth D R J. Differential Topology with a View to Application (1978)
45 Nitecki Z. Differentiable Dynamics. MIT Press, Cambridge, Mass. (1971)
46 Hirsch M W. Differential Topology. Springer-Verlag (1976)
47 Diaz J. Bound. Probl. Diff. Eqs. (ed Langer E). University of Wisconsin, Press, Madison (1960)：47—83
48 Komkov V. Variational Principles of Continuum Mechanics with Engineering Applications, Vol. I. Reidel (1986)
49 钱伟长. 广义变分原理. 知识出版社（1985）
50 郭仲衡. 非线性弹性理论变分原理的统一理论. 应用数学和力学，**1**，5（1980）
51 Berges M S. Nonlinearity and Functional Analysis. Academic Press (1977)
52 郭仲衡. 非线性弹性理论. 科学出版社（1981）
53 Duvaut G, Lions J L. Inequalities in Mechanics and Physics. Springer-Verlag (1976)
54 Kinderlehrer D, Stampacchia G. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Academic Press, New York (1980)
55 Elliott C M, Ockendon J R. Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems. Pitman, London (1982)
56 Fasano A, Primicerio M (Eds). Free Boundary Problems: Theory and Applications, Vol. Ⅰ, Ⅱ. Pitman London (1983)
57 Rockafellar R T. Convex Analysis. Princeton Univ. Press (1970)
58 Holmes P J, Moon F C. Strange attractors and chaos in nonlinear mechanics. *J. Appl. Mech.*, **50**, 4b（1983）. 非线性力学中的奇怪吸引子和浑沌（朱照宣，陈守吉译）. 应用力学最新进展（上册），科学出版社（1987）：33—64
59 陆章基. 泛函分析在力学和工程中的应用. 近代数学和力学，北京大学出版社（1987）
60 Oden J T. Qualitative Methods in Nonlinear Mechanics. Prentice-Hall (1986)

61 ——, Reddy J N. An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. Wiley (1976)
62 ——（陆章基译）. 应用泛函分析——供力学和工程科学学生用基本教程. 复旦大学应用力学系 (1984)
63 关肇直, 张恭庆, 冯德兴. 线性泛函分析入门. 上海科学技术出版社 (1985)
64 郑哲敏. 高瞻远瞩加强力学基础研究. 力学进展, 18, 3 (1988): 293—300

MODERN MATHEMATICAL METHODS IN MODERN MECHANICS

Liu Xun-jiang
Hunan University, Shaoyang Branch

Abstract This paper outlines the tendency of connection between mechanics and mathematics, its historical background and the present state. According to the problems that the modern science and technology put before mechanics, we have briefly reviewed the domain of the modern mathematics and methods related to the modern mechanics.

Keywords *modern mechanics; modern mathematics*