

# 粘弹塑性本构理论及其应用\*

杨挺青

华中理工大学, 武汉(邮政编码430074)

**提要** 本文综述粘弹塑性材料力学行为的研究概况和近期进展, 探讨粘弹塑性本构关系的研究途径和表达形式, 阐述粘弹塑性理论研究的重要意义和广阔的应用前景。

**关键词** 粘弹塑性; 弹粘塑性; 粘塑性; 粘弹性; 本构关系

## 1 引言

许多工程材料, 包括金属、高聚物、土壤和复合材料等等, 在某些条件下往往呈现兼具弹性、粘性和塑性的性能。描述这类材料的力学行为, 确立其本构关系, 是固体力学的重要研究内容。随着近代技术的发展, 在材料工程、机械工程、宇航工程、生物工程、地下工程和核动力工程中, 粘弹塑性本构理论的研究有很大的发展, 并逐步得到广泛的应用。

本文第2, 3节分别叙述粘弹塑性材料和弹粘塑性材料的本构方程。第4, 5节分别评述考虑材料晶体结构的非弹性物理理论和不以屈服条件存在为前提的无屈服面理论。最后介绍粘弹塑性理论的应用和国内研究简况。

## 2 粘弹塑性材料的本构关系

粘弹塑性材料屈服前为粘弹性体, 由于粘性及载荷历史同时间相关, 所以当应力空间中沿相同的加载路径加载时, 会因通过该路径的时间长短不同而在不同点达到屈服状态; 即使通过加载路径所用时间相等, 也可能因加载历程中应变率变化规律不一样而在不同应力 $\sigma_{ij}(t)$ 处进入塑性状态。为了描述粘弹塑性材料的屈服问题, Naghdi 和 Murch<sup>[1]</sup>假定总应变可表示为弹、粘、塑性应变之和, 即 $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^v + \epsilon_{ij}^p$ ; 引入连续可微的屈服函数或加载函数 $f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \kappa, \beta)$ , 其中 $\kappa = \kappa(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p)$ 为应变硬化参数,  $\beta = \beta(\dot{\epsilon}_{ij}^v)$ 表示粘性效应; 并给出加载、卸载和中性变载条件。由于粘性效应, 中性变载时应力增量方向不再沿着流动面的切向。此外, 有的学者提出用能量变化情况说明粘弹性材料是否屈服<sup>[2]</sup>。

当塑性应变率方向沿瞬时流动面外法向时, 本构关系表达为<sup>[1,2]</sup>

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \begin{cases} 0, & f < 0 \\ \frac{1}{h} \langle \mathcal{L}(\dot{\sigma}_{ij}) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, & f = 0 \end{cases} \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金资助项目。

其中

$$\bar{k} = - \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{mn}^p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{mn}^p} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \right]^{-1} \quad (1a)$$

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\mathcal{L}(\dot{\sigma}_{ij}) = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \dot{\beta} \quad (3)$$

为了考虑  $\varepsilon_{ij}^p$  方向与流动曲面法线之间夹角的影响, 在 [2] 中阐述了两种处理方法。Crochet<sup>[3]</sup> 曾用上述粘弹塑性本构关系分析圆筒轴对称问题。

在小变形粘弹塑性理论中, 有的学者采用粘弹、粘塑性模型表达本构关系。例如, Wierzbicki<sup>[4]</sup> 在弹粘塑简化模型基础上用 Maxwell 元使材料在屈服前呈现粘性行为; Ottosen<sup>[5,6]</sup> 用粘弹性 Burgers 元和粘塑性 Bingham 体串联进一步表达材料粘弹塑性行为 (体变部分为弹性响应), 并用于容器计算; Ghoneim 和 Chen<sup>[7]</sup> 采用线粘弹体串联 1 个修正的塑性模型表述粘弹塑本构方程。

为了克服粘弹塑小变形理论和纯力学行为分析的不足, Green 和 Naghdj<sup>[8]</sup> 在弹塑性连续体一般理论及其热力学原理研究的基础上, 提出适于大变形的 1 种粘弹塑性本构方程。当材料的力学热学性质满足一定条件时, 引入屈服函数或加载函数  $f$ , 令

$$f(T_{ij}, E_{ij}, E_{ij}^p, \theta) = k \quad (4)$$

其中  $T_{ij}$  为对称的 Piola 应力张量;  $E_{ij}$  为 Lagrange 应变;  $E_{ij}^p$  表示塑性应变, 在叠加刚体运动时不变;  $\theta (> 0)$  为温度;  $k$  为标量函数, 满足

$$\dot{k} = h_{ij}(T_{mn}, E_{mn}, E_{mn}^p, \theta) \dot{E}_{ij}^p$$

本构关系中塑性应变率为

$$\dot{E}_{ij}^p = \begin{cases} 0, & f = k \text{ 且 } \dot{k} = 0, \dot{f} \leq 0 \\ f < k \text{ 且 } \dot{k} = 0 \\ \alpha_{ijmn} T_{mn} + \beta_{ijmn} \dot{E}_{ij} + \gamma_{ij} \dot{\theta} + \lambda_{ij}, & f = k, \dot{f} > 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial T_{mn}} T_{mn} + \frac{\partial f}{\partial E_{mn}} \dot{E}_{mn} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta}$$

系数  $\alpha_{ijmn}, \dots, \lambda_{ij}$  对称, 是  $T_{ij}, E_{ij}, E_{ij}^p, \theta$  和  $k$  的函数。在 [8] 中论述了本构表达式满足热力学定律, 讨论了线性等温的特殊情形。

Perzyna<sup>[9]</sup> 引述大量文献综述了连续体热力学理论 (thermomechanic theory) 的各种方法, 着重探讨了粘弹塑性体的内变量热力学理论, 通过内部状态变量对粘弹塑性材料作一般描述, 给出了热力学过程的一系列响应函数和粘性系数, 以及它们应满足的关系和耗散不等式。该文还讨论了粘塑性物理基础, 概述了若干实验研究结果。

### 3 弹粘塑性本构方程

许多情况下, 工程材料特别是金属材料在弹性阶段的粘性效应微弱, 而在屈服后出现明显的粘性性质, 因而人们注重研究这种弹粘塑性的本构关系。早在 1951 年, Malvern<sup>[10]</sup> 将应变率表示为弹性和塑性部分, 认为弹性应变与应变率无关, 塑性应变率决定于过应力——瞬时动态应力与相应于该应变的静载应力之差。Shieh<sup>[11]</sup> 作过弹粘理想塑性材料结构分析, 后来采用类似于 Malvern 公式的本构表达式, 分别考虑轴力与应变率、弯矩与曲率变化率的

关系, 用于平面刚架分析<sup>[12]</sup>。

继Hohenemser和Prager<sup>[13]</sup>等人的研究之后, Perzyna<sup>[14,15]</sup>提出弹粘塑性本构表达, 引入静力屈服函数  $F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = [f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)/\kappa] - 1$ , 式中  $\kappa = \kappa(w_p)$  为强化参量, 率敏感塑性强化材料的本构关系式为<sup>[2]</sup>

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

式中  $s_{ij}$  和  $\sigma_{kk}$  分别为应力偏量和体应力;  $\gamma$  为材料粘性常数; 函数  $\phi(F)$  根据动载试验结果而定。这种理论实质上是1维过应力理论的推广。此后, 有一般强化的本构关系<sup>[16]</sup>; Gilat<sup>[17]</sup>采用 Perzyna 的本构表达和 More 强化模型给出1种非等向强化的弹粘塑性本构方程并用于冲击试验研究。其试验结果和已有的一些结果<sup>[18]</sup>作了分析比较。Berest和Nguyen-Minh<sup>[19]</sup>引述研究结果表明, 岩盐体现瞬时弹性和随动强化的粘塑性行为。他们采用弹簧和修正 Bingham 体串联模型表达本构关系, 并用于实例计算。

为了考虑瞬时塑性性质, Cristescu<sup>[20,21]</sup>提出了拟线性率型本构关系。

由于过应力理论中屈服函数与应变率无关, 未反映率相关的屈服强度, Rubin<sup>[22]</sup>说明 Perzyna 和 Cristescu 论述中一些模糊之处, 强调初始屈服强度与应变率有关。根据连续体热力学理论<sup>[23]</sup>, 考虑有限变形<sup>[24]</sup> Rubin<sup>[22]</sup>提出一种屈服强度率相关的热弹粘塑性模型, 在应变空间中表示屈服函数  $f$ , 一般地写作

$$f(E, E^p, \theta, \kappa, \dot{E}, \dot{\theta}) = 0 \quad (7)$$

式中  $\kappa$  为强化参量, 其他变量含义同式(4)。本构表达中塑性应变率为

$$\dot{E}^p = \begin{cases} 0, & \text{弹性响应 } (f < 0) \\ 0, & \text{卸 载 } (f = 0, \dot{f} < 0) \\ 0, & \text{中性变载 } (f = 0, \dot{f} = 0) \\ \mu A \dot{f}, & \text{加 载 } (f = 0, \dot{f} > 0) \end{cases} \quad (8)$$

$$\dot{\kappa} = M \cdot \dot{E}^p$$

$$\text{式中} \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial E} \dot{E} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial f}{\partial \dot{E}} \ddot{E} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} \ddot{\theta}$$

$\mu, A$  和  $M$  均为  $E, E^p, \theta, \kappa, \dot{E}, \dot{\theta}$  的函数。进而给出较具体的本构方程, 并用于单轴应变过程。Rubin<sup>[22]</sup>和Naghdi<sup>[25]</sup>均论述了弹粘塑本构表达式满足热力学理论及其限制条件。

1986年, Rubin<sup>[26]</sup>提出一种可用于大变形的弹粘塑性本构模型。它不表示为屈服函数而是用一组演化方程

$$\dot{E}^p = A, \quad \dot{\kappa} = M \cdot \dot{E}^p - m, \quad \dot{\beta} = \mathcal{B} \dot{E}^p - B \quad (9)$$

来表示, 其中  $A, M, m, \mathcal{B}, B$  决定于一组变量  $\{E, E^p, \kappa, \beta, \theta\}$ 。令人感兴趣的是, 在某些具体本构方程中, 全部材料常数和函数可利用小变形下的结果。Rubin考虑Clifton<sup>[27]</sup>关于平板高压撞击的试验研究, 新近给出1种高压下的弹粘塑性模型<sup>[28]</sup>, 他以

$$x_1 = (1 - at) X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

的单轴应变为例, 分析了高压压缩率 ( $a = 10^4, 10^8 s^{-1}$ ) 和超高压压缩率 ( $a = 10^{12} s^{-1}$ ) 情况下的

应力和温度, 所得结果有效地反映材料动力特性。

弹粘塑性本构关系还有许多其他的表达形式, 如: Perzyna<sup>[29,30]</sup>考虑材料缺陷, 反映不稳定塑性流动, 结合细观分析得到 Perzyna 修正本构方程; Krempl 和 Cernocky<sup>[31-34]</sup>兼容过应力、基于微小总应变的模型; Chaboche 和 Rousselier<sup>[35]</sup>评述一系列本构关系后选择某些弹粘塑性理论, 兼用某些参量的本构关系; Rohde 和 Swearingen 在[36]及所述有关文献中阐明的用于各种合金的非弹性变形模型; Lataillade 和 Pouyet<sup>[37]</sup>用 Hopkinson 杆测试结果表述某些聚合物在高应变率作用下的流变行为和弹粘塑性本构方程; Perzyna<sup>[38]</sup>, Nemes<sup>[39]</sup>论述高应变率变形与考虑材料损伤的本构关系和 Voyiadjis<sup>[40]</sup>讨论蠕变-损伤耦合的本构关系, 等等。

#### 4 粘弹塑性细观理论

在宏观唯象研究的同时, 许多学者考察固体变形的细观机理, 探索宏微观结合的途径。

McMahon<sup>[41]</sup>, Gilman<sup>[42]</sup>和 Asaro<sup>[43]</sup>在其论著和所引用的大量文献中较全面地论述了基于晶体位错的研究, 从金属物理角度出发来讨论塑性流动的微观机理和探讨建立本构关系的工作。位错运动引起塑性流动, 塑性应变率决定于平均位错速度  $v$ , 可动位错密度  $N_m$  和 Burgers 矢量值  $b$ 。由 Orowan 公式, 塑性剪应变率为

$$\dot{\gamma}^p = N_m b v \quad (10)$$

其中  $N_m$  依赖于应力, 且因位错增殖还与  $v$  有关;  $v$  随应力和温度而变化, 且由于强化还决定于总的位错密度。式(10)内涵及有关论述详见[41]中 Gilman 撰写的“塑性微观动力学”, 其中导出含若干参量与宏观应力应变的一般方程。Gilman 指出, 宏观蠕变行为、应力应变曲线和冲击试验结果均可用微观位错理论为基础的应变率方程加以解释。率相关流动规律的细观理论还可见 Asaro<sup>[43]</sup>的综述。

4.1 小应变细观理论 在 Taylor G I, Orowan E, 和 Hill R 关于晶体滑移理论的基础上, 70年代以来, Rice<sup>[44]</sup>, Brown<sup>[45]</sup>和 Hutchinson<sup>[46]</sup>等许多学者通过各种途径与方法, 将塑性本构理论成果用于研究时间相关的非弹性行为, 建立晶粒集合体宏观非弹性应变与单晶细观滑移变形之间的关系, 给出一系列有意义的结果。然而在 Brown 和 Hutchinson 的推导中, 忽略瞬态蠕变, 未很好考虑单晶流动中活性和潜在硬化行为。林同骅 (Lin T H)<sup>[47,48]</sup>等将塑性变形物理理论中的研究方法推广应用于讨论材料蠕变性能, 由单晶蠕变数据导出多晶体应力-应变-时间关系<sup>[49]</sup>, 其中同时考虑了单晶的稳态蠕变、瞬态蠕变、活性和潜在硬化。翁荣治 (Weng G J)<sup>[50]</sup>同样考虑这些变形机理与条件, 提出另1种预示金属蠕变行为的自洽方法, 先从多晶体拉伸蠕变结果来确定单晶的材料常数, 然后用这些常数推测晶粒集合体在所给载荷条件下的蠕变行为。他认为, 这一方法比[46]阐述的更为实用, 且有同样的精确度。

1981年, Weng<sup>[51,52]</sup>以 Hill, Kröner, Budiansky 的自洽理论和[47]中的方法为基础而建立的细观理论, 可预示金属材料在变应力下的蠕变, 回复, Bauschinger 效应, 以至变温下的蠕变或松弛一般行为, 其本构表达概述如下。

(i) (i)  
以  $\dot{\gamma}_i^s$  和  $\dot{\gamma}_i^t$  分别表示单晶第  $i$  个滑移系的稳态和瞬态蠕变率, 考虑变温情况, 有

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_i^{(i)} &= \kappa_0 e^{-(\Gamma/T)} \tau^\lambda \\ \dot{\gamma}_i^{(i)} &= \eta \left\{ \zeta_0 e^{-(\Gamma/T)} \tau^\lambda - \left[ \alpha \sum_j |\dot{\gamma}_i^{(j)}| + (1-\alpha) \sum_j \cos^{(i,j)} \theta \cos^{(i,j)} \phi \dot{\gamma}_i^{(j)} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中  $\tau$  为相应的分解剪应力,  $\kappa_0$ ,  $\lambda$ ,  $\eta$ ,  $\zeta_0$  和  $\alpha$  为材料的单晶常数,  $\Gamma$  为滑移过程激活能有关材料常数,  $T$  为绝对温度,  $\theta$  表示第  $i$  个和第  $j$  个滑移系滑移方向间的夹角,  $\phi$  为它们的滑移面法线间的夹角。为确定上述 6 个单晶常数, 引用多晶体拉伸蠕变的本构方程, 设多晶体受拉伸时稳态和瞬时蠕变率分别用  $\dot{\epsilon}_s^c$  和  $\dot{\epsilon}_i^c$  表示, 写作

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_s^c &= a_0 e^{-Q/T} \bar{\sigma}^b \\ \dot{\epsilon}_i^c &= c_0 [d_0 e^{-Q/T} \bar{\sigma}^b - \dot{\epsilon}_s^c] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中  $a_0$ ,  $b$ ,  $c_0$ ,  $d_0$  为材料多晶体常数, 由两个拉伸蠕变曲线决定;  $Q$  为金属蠕变时激活能有关的参量, 由不同温度下的蠕变曲线来确定。关于单晶常数和多晶常数之间的关系, 见 [51] 和 [52] 中具体论述。文中阐明有关分析计算和用于 2618-T51 和 RR-59 铝合金的若干受载情况。Weng<sup>[53]</sup> 后来给出复合应力下金属黏性蠕变的 1 种统一自治理论, 提出 1 种高温蠕变的细观模型<sup>[54]</sup>。此外, Lin<sup>[55]</sup> 述评了塑性与蠕变的物理理论, 提出某些改进的论述。

4.2 有限变形细观理论 1986 年, Nemat-Nasser 和 Obata<sup>[60]</sup> 综述了一系列率相关和率无关的物理理论, 在 Weng<sup>[51-53]</sup> 小变形自治理论方法, Asaro 等人<sup>[56,57]</sup> 多晶金属率效应和自己原有工作<sup>[58,59]</sup> 的基础上, 给出适用于金属有限应变和转动的率相关本构关系。在讨论单晶率相关本构描述时分别考虑了幂律关系与引入函数的粘塑性形式。通过 Cauchy 应力、Jaumann 应力率、变形率和旋率表示一单晶名义应力率  $\dot{n}_{ij}$ , 它与速度梯度  $v_{i,j}$  之间的关系为

$$\dot{n}_{ij} = f_{ijkl} v_{k,l} - s_{ij} \quad (13)$$

式中函数  $f_{ijkl}$  和松弛应力率  $s_{ij}$  决定于单晶瞬时弹性、Cauchy 应力、滑移应变率、分解剪应力、转动速率, 以及时间增量 (幂律关系时) 或函数 (粘塑性时)。采用体积平均值, 如  $\dot{N}_{ij} \equiv \int \dot{n}_{ij}(x) dx/V$  为平均名义应力率,  $V$  为晶粒集合体体积, 相应地给出多晶体率相关本构表达

$$\dot{N}_{ij} = F_{ijkl} V_{k,l} - S_{ij} \quad (14)$$

式中  $V_{k,l}$  表示多晶体 (晶粒集合体) 的速度梯度。然后用自治方法导出各待定函数之间的关系式。为便于数值计算, 进而将相应的关系式表示成增量形式。[60] 中表述了 1 个完整的自治均值途径和方法, 给出数例结果, 且说明所得模型可退化到 Hill, K B W 等多种已有的理论。

## 5 无屈服面理论

上述粘弹塑性理论, 往往以存在屈服面为基本前提, 因而涉及模型的初始屈服准则、强化规律、流动法则和加卸载等问题; 这些理想化的模型未必符合实际或不便于应用。因此有

所谓无屈服面粘弹塑性理论,如Valanis内时理论,Cernocky-KrempI模型,Bodner-Partom本构方程,以及其他一些幂律关系,等等。

Valanis<sup>[61,62]</sup>提出的内时本构理论,以不可逆热力学为基础,利用内部变量表征材料行为与变形规律,建立与线粘弹本构方程相似的本构显式。这种理论一般不必考虑屈服面是否存在,不必把确定屈服函数、考虑加卸载条件作计算依据,但在某些内蕴时间定义下可描述材料呈现屈服的特性和随加载历史而变化的若干性质。由于应变率历史效应的重要作用<sup>[63,64]</sup>,Lin和Wu<sup>[65]</sup>给出考虑应变率历史的内时弹塑性模型。值得注意的是,Valanis<sup>[66]</sup>内时度量的改进表达容许引入屈服面,Wu和Yip<sup>[67]</sup>在考虑应变率及其历史效应时定义了屈服应力,因而[67]的本构表达不属无屈服面理论。Lin和Wu<sup>[68]</sup>将内时改进理论表述为微分型本构方程,用于粘塑性波传播。Cernocky<sup>[69]</sup>考虑[65]的塑性应变率表达式,将[67]所述含屈服面内时本构关系改进为无屈服面本构模型。此外,KrempI<sup>[70]</sup>论述了有关粘弹塑性内时理论的某些条件。

Cernocky和KrempI<sup>[31-34,69-72]</sup>在粘弹塑性小应变理论方面进行了一系列的研究,其中包括热力耦合的热粘弹塑性本构关系<sup>[34]</sup>,对若干种无屈服面粘弹塑性模型在不同加载条件下的比较<sup>[69,72]</sup>。C-K无屈服面本构方程表示为<sup>[31,33]</sup>

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\sigma - g(\varepsilon)}{E \cdot K[\sigma - g(\varepsilon)]} \quad (15)$$

式中 $E$ 为弹性常数; $\sigma$ 为流动应力;函数 $g(\varepsilon)$ 表示静力下应变 $\varepsilon$ 的应力响应<sup>[31,73]</sup>,初始斜率为 $E$ , $K[\ ]$ 为过应力 $(\sigma - g)$ 的正值递减函数。在函数 $g$ 和 $K$ 中各含若干个材料常数。在一系列工作<sup>[74-76]</sup>的基础上,新近提出有限变形弹粘塑性过应力理论<sup>[77]</sup>。

Bodner-Partom<sup>[78]</sup>提出1种无屈服面的粘弹塑性本构关系,给出考虑强化的本构方程<sup>[79]</sup>。这一理论认为,材料受载后同时出现弹性和非弹性(粘塑性)变形,无需考虑屈服准则和加卸载条件。Bodner和Partom引用位错动力学研究成果,即式(10)和 $v$ 与 $\sigma$ 关系式,把 $I_2^p = \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} / 2$ 和 $J_2 = S_{ij} S_{ij} / 2$ 分别表示等效的非弹应变率和等效应力,直接建立它们之间的关系,如

$$I_2^p = I_0^2 \exp[-(A^2/J_2)^n] \quad (16)$$

式中

$$A^2 = \frac{1}{3} Z^2 \left( \frac{n+1}{n} \right)^{1/n}$$

$I_0^2$ ,  $Z$ 和 $n$ 均为材料常数。对于强化材料, $Z$ 随应变强化而减小,表示为塑性功 $W_p$ 的函数<sup>[80,81]</sup>。在[80]中分析了单轴应力情况,给出钛合金的有关常数值,后来又推广应用到单轴循环加载情形<sup>[81]</sup>。Stouffer<sup>[82]</sup>给出1350°F高温的耐热合金有关的常数,Wilson和Palazotto<sup>[83]</sup>用作高温下受循环加载的计算。最近,Dexter<sup>[84]</sup>利用Bodner-Partom模型分析A533B钢在应变率 $10^{-3}$ — $10^3$ 时的粘塑性性能。

Bodner-Partom理论还给出幂函数本构关系。分析表明<sup>[85]</sup>,在应变率很高时趋于线弹性,当应变率很低时接近弹性理想塑性情形。有关B-P模型的改进论述<sup>[85-87]</sup>,主要是为了便于具体应用,适于考虑温度、压力效应等其他因素。在分析研究B-P幂函数本构表达及其修正理论的基础上,我们提出1种兼用幂函数和指数函数描述粘弹塑性的本构关系<sup>[154]</sup>。

粘弹塑性方程还有种种其他形式<sup>[88-93]</sup>。值得提出的是, Browning等<sup>[95]</sup>在原有工作<sup>[94]</sup>基础上提出1种温度相关的本构模型; 苏联学者 Sadakov等<sup>[96]</sup>提出的各向异性粘弹塑性体的状态方程。这些都表明粘弹塑性理论研究在不断发展。

## 6 应用进展

近10年来, 粘弹塑性本构理论逐步得到广泛的应用, 除前面涉及的具体应用外, 主要体现在以下各方面。

在工程力学中, 与各分支学科结合有很大的进展。例如: 动力学和波传播方面<sup>[85,88,97-99]</sup>; 各种循环加载与疲劳问题<sup>[81,83,100-103]</sup>; 断裂力学<sup>[83,104-108]</sup>与损伤理论<sup>[109-111]</sup>, 新近 Nakamura和Shih<sup>[112]</sup>给出3维瞬态断裂分析; 结构力学方面, 包括各种结构分析<sup>[5,6,12,113]</sup>, 屈曲<sup>[93,114]</sup>和结构计算原理<sup>[115,116]</sup>; 计算力学方面包括各种计算模型与方法<sup>[7,117-121]</sup>, 专用程序<sup>[122-124]</sup>或纳入大型程序 HODO<sup>[125]</sup>, VISCO<sup>[105]</sup>, ADINA<sup>[126]</sup>与 ADINA/VPF<sup>[103]</sup>, DYNA2D<sup>[88,127]</sup>, 最近提出粘弹塑性大变形问题的 L-E 有限元分析<sup>[128]</sup>。

在工程技术中逐步得到广泛的应用。例如, 涉及各种金属、聚合物<sup>[37,94,155]</sup>、土壤<sup>[2,129]</sup>、岩盐<sup>[10]</sup>、复合材料<sup>[130]</sup>等材料方面; 有关单晶生长<sup>[93,114]</sup>、成型加工<sup>[131-153]</sup>、拉丝工艺<sup>[134]</sup>等技术方面; 诸如超高温<sup>[82,83]</sup>、穿破甲<sup>[135]</sup>等军工国防方面; 以及美国、德国、比利时及荷兰等国用于核技术工程之中<sup>[136,137]</sup>。

粘弹塑性理论及其应用研究进展还体现在与应用数学、热学力学理论、连续体力学基础研究的结合。例如, 关于本构原理及有关数学理论<sup>[138-141]</sup>, 本构关系的物理基础<sup>[9,142-144]</sup>, 粘弹塑性力学一般原理与求解<sup>[115,116,130,145]</sup>等方面均有一系列的文献。

国内有关粘弹塑性本构关系及其应用研究, 早期在塑性理论与应用研究中有所反映。近10年来有一定的进展, 已见有关的文献内容较广, 例如, 关于粘弹塑性理论的论述与评介<sup>[146-151]</sup>, 各种本构关系研究与探讨<sup>[91,152-157]</sup>, 有关计算原理、方法与技术<sup>[118,119,158-160]</sup>工程应用与结构分析<sup>[161-166]</sup>, 等等。事实说明, 我国关于粘弹塑性理论及其应用研究是有基础的。

## 参 考 文 献

- 1 Naghdi P M, Murch S A. *J. Appl. Mech.*, **30** (1963): 321-328
- 2 Perzyna P. *Adv. Appl. Mech.*, **9** (1966): 243-377
- 3 Crochet M J. *J. Appl. Mech.*, **33** (1966): 324-334
- 4 Wierzbicki T. *Arch. Mech.*, **15** (1963): 297-308
- 5 Ottosen N S. *Int. J. Solids Struct.*, **21** (1985): 561-572
- 6 —. *ibid.*, **21** (1985): 573-595
- 7 Ghoneim H, Chen Yu. *Comput. & Struct.*, **17** (1983): 499-509
- 8 Green A E, Naghdi P M. *Acta Mech.*, **4** (1967): 288-295
- 9 Perzyna P. *Adv. Appl. Mech.*, **11** (1971): 313-369
- 10 Malvern L E. *J. Appl. Mech.*, **18** (1951): 203-208
- 11 Shieh R C. *J. Engng Industry*, **79** (1975): 1238-1244
- 12 —. *J. Appl. Mech.*, **47** (1980): 192-194
- 13 Prager W. *Introduction to Mechanics of Continua*. Ginn & Company, Boston (1961)
- 14 Perzyna P. *Q. Appl. Math.*, **20** (1963): 321-332
- 15 —. *Arch. Mech.*, **15** (1963): 113-130
- 16 Eisenberg M A, Yen C F. *J. Appl. Mech.*, **48** (1981): 276-284
- 17 Gilat A. *ibid.*, **52** (1985): 629-633
- 18 —. Ph. D. thesis, Brown Univ., Providence, R. I. (1982)

- 19 Berest P, Nguyen-Minh D. *Int. J. Solids Struct.*, **19** (1983) 1035—48
- 20 Cristescu N. *Dynamic Plasticity*. North-Holland Pub., Amsterdam (1967)
- 21 —, Suliciu I. *Viscoplasticity*. Martinus Nijhoff Publishers (1982)
- 22 Rubin M B. *J. Appl. Mech.*, **49** (1982) : 305—311
- 23 Green A E, Naghdi P M. *Proc. Royal Soc. London*, **A357** (1977) : 253—270
- 24 Naghdi P M, Trapp J A. *Int. J. Engng Sci.*, **13** (1975) : 785—797
- 25 —, *J. Appl. Mech.*, **51** (1984) : 93—101
- 26 Rubin M B. *Int. J. Engng Sci.*, **24** (1986) : 1083—1095
- 27 Clifton R J. *J. Appl. Mech.*, **50** (1983) : 941—952
- 28 Rubin M B. *ibid.*, **54** (1987) : 532—538
- 29 Perzyna P. *Arch. Mech.*, **32** (1980) : 403—420
- 30 —, *ibid.*, **35** (1983) : 423—436
- 31 Cernocky E P, Krempl E. *Int. J. Nonlinear Mech.*, **14** (1979) : 183—203
- 32 Krempl E. *J. Engng Mat. Tech.*, **101** (1979) : 380—386
- 33 Cernocky E P, Krempl E. *Acta Mech.*, **36** (1980) : 263—289
- 34 —, —, *Int. J. Solids Struct.*, **16** (1980) : 723—741
- 35 Chaboche J L, Rousselier G. *J. Press Vessel Tech.*, **105** (1983) : 153—164
- 36 Rohde R W, Swearingen J C. *J. Engng Mat. Tech.*, **102** (1980) : 207—214
- 37 Lataillade J-L, Pouyet J. *Rheol. Acta*, **21** (1982) : 431—434
- 38 Perzyna P. *Int. J. Solids Struct.*, **22** (1986) : 797—816
- 39 Nemes J A, et al. *J. Appl. Mech.*, **57** (1990) : 282—291
- 40 Voyiadjis G J, Kattan P I. *IUTAM Symp. Creep in Struct. IV* (1990)
- 41 McMahon Jr G J (Ed.). *Microplasticity*. John Wiley (1968)
- 42 Gilman J J. *Micromechanics of Flow in Solids*. McGraw-Hill (1969)
- 43 Asaro R J. *Adv. Appl. Mech.*, **23** (1983) : 1—115
- 44 Rice J R. *J. Appl. Mech.*, **37** (1970) : 728—737
- 45 Brown G M. *J. Mech. Phys. Solids*, **18** (1970) : 367—381
- 46 Hutchinson J W. *Proc. Royal Soc. London*, **A348** (1976) : 101—127
- 47 Lin T H. *Adv. Appl. Mech.*, **11** (1971) : 255—311
- 48 —, et al. *J. Appl. Mech.*, **41** (1974) : 587—592
- 49 —, et al. *ibid.*, **44** (1977) : 73—78
- 50 Weng G J. *ibid.*, **46** (1979) : 800—804
- 51 —, *ibid.*, **48** (1981) : 41—46
- 52 —, *ibid.*, **48** (1981) : 779—784
- 53 —, *ibid.*, **49** (1982) : 628—734
- 54 —, *ibid.*, **54** (1987) : 822—827
- 55 Lin T H. *J. Engng Mat. Tech.*, **106** (1984) : 290—294
- 56 Asaro R J, Needleman A. *Acta Metall.*, **33** (1985) : 923—953
- 57 Peirce D, et al. *ibid.*, **31** (1983) : 1951—1976
- 58 Nemat-Nasser S. *J. Appl. Mech.*, **50** (1983) : 1114—1126
- 59 Iwakuma T, Nemat-Nasser S. *Proc. Royal Soc. London*, **A394** (1984) : 87—119
- 60 Nemat-Nasser S, Obata M. *ibid.*, **A407** (1986) : 343—375
- 61 Valanis K C. *J. Math. Phys.*, **47** (1968) : 262—275
- 62 —, *Arch. Mech.*, **23** (1971) : 517—533; 535—551
- 63 Klepaczko J. *J. Mech. Phys. Solids*, **16** (1968) : 255—266
- 64 —, *Arch. Mech.*, **24** (1972) : 187—202
- 65 Lin H-C, Wu H-C. *J. Appl. Mech.*, **43** (1976) : 92—96
- 66 Valanis K C. *Arch. Mech.*, **32** (1980) : 171—191
- 67 Wu H-C, Yip M C. *Int. J. Solids Struct.*, **16** (1980) : 515—536
- 68 Lin H-C, Wu H-C. *ibid.*, **19** (1983) : 587—599
- 69 Cernocky E P. *ibid.*, **18** (1982) : 989—1005
- 70 Krempl E. *Arch. Mech.*, **33** (1981) : 289—306
- 71 Lin M C M, Krempl E. *J. Mech. Phys. Solids*, **27** (1979) : 377—391
- 72 Cernocky E P. *J. Nonlinear Mech.*, **17** (1982) : 255—266
- 73 —, Krempl E. *J. Appl. Mech.*, **45** (1978) : 780—784
- 74 Krempl E. *Acta Mech.*, **69** (1987) : 25—42



- 75 —, et al. *Mech. of Mat.*, **5** (1986) : 35—48
- 76 Yao D, Krempl E. *Int. J. Plasticity*, **1** (1985) : 259—274
- 77 Nishiguchi I, et al. *J. Appl. Mech.*, **57** (1990) : 548—552
- 78 Bodner S R, Partom Y, *ibid*, **39** (1972) : 751—757
- 79 —, —, *ibid*, **42** (1975) : 385—389
- 80 —, Stouffer D C, *Int. J. Engng Sci.*, **21** (1983) : 211—215
- 81 —, et al. *J. Appl. Mech.*, **46** (1979) : 805—810
- 82 Stouffer D C, AFWAL-TR-81-4039 WPAFB, OH (1981)
- 83 Wilson R E, Palazotto A N. *Engng Fract. Mech.*, **22** (1985) : 927—937
- 84 Dexter R J, Chan K S. *J. Press. Vessel Tech.*, **112** (1990) : 214—218
- 85 Chen Yu. *J. Engng Mat. Tech.*, **106** (1984) : 383—387
- 86 Ghoneim H, Ph. D. thesis, Rutgers Univ., New Jersey (1981)
- 87 —, et al. *J. Appl. Mech.*, **50** (1983) : 465—468
- 88 Bammann D J, *Int. J. Engng Sci.*, **22** (1984) : 1041—1053
- 89 Rubin M B. *ibid*, **25** (1987) : 1175—1191
- 90 Benallal A, Marquis D. *J. Engng Mat. Tech.*, **109** (1987) : 326—336
- 91 Wang Li-Lih (王礼立). *ibid*, **106** (1984) : 331—336
- 92 Robinson D N, Bartolota P A. NASA Contract 174836, Dept. of Civil Engng, Univ. of Akron, Ohio
- 93 Tsai C T, Ph. D. Dissertation, Dept. of Engng Mech., Univ. of Kentucky, Lexington, Kentucky (1985)
- 94 Browning R V. *Int. J. Solids Struct.*, **20** (1984) : 921—934
- 95 —, et al. *ibid*, **25** (1989) : 441—457
- 96 Sadakov O S, et al. IUTAM Symp. on Creep in Struct. IV (1990)
- 97 Aboudi J. *Int. J. Engng Sci.*, **18** (1980) : 619—629
- 98 Chon C T, Weng G J. *Int. J. Nonlinear Mech.*, **15** (1980) : 195—209
- 99 Bodner S R, Aboudi J. *Int. J. Solids Struct.*, **19** (1983) : 305—314
- 100 Eisenberg M A, Yen C-F. *J. Engng Mat. Tech.*, **105** (1983) : 107—112
- 101 Weng G J. *Mat. Sci. & Engng*, **57** (1983) : 127—133
- 102 —, *Acta Metall.*, **31** (1983) : 207—212
- 103 Benallal A, Marquis D. *Eng. Comput.*, **5** (1988) : 241—247
- 104 Aboudi J, Achenbach J D. *Int. J. Solids Struct.*, **17** (1981) : 879—890
- 105 Hinnerichs T D, AFWAL-TR-80-4140, WPAFB, OH (1981)
- 106 Smail J W, Palazotto A N. *Engng Fract. Mech.*, **19** (1984) : 137—158
- 107 Brickstad B. *J. Mech. Phys. Solids*, **31** (1983) : 307—327
- 108 Bass B R, et al. *Int. J. Press. Ves. & Piping*, **31** (1988) : 325—348
- 109 Simo J C, Ju J W. *Int. J. Solids Struct.*, **23** (1987) : 821—869
- 110 Suaris W, Shah S P. *ASCE J. Eng. Mech.*, **110** (1984) : 985—997
- 111 Ju J W. Appl. Mech. & Eng. Sci. Conference. June (1988) ; Names J A, Eftis J. *ibid*
- 112 Nakamura T, Shih C F. *ibid*
- 113 Benallal A. *Eng. Comput.*, **3** (1986) : 323—330
- 114 Tsei C T, Dillon Jr O W. *Int. J. Solids Struct.*, **23** (1987) : 387—402
- 115 Carini A, Donato O De. *ibid*, **24** (1988) : 599—618
- 116 Carter P. *Int. J. Solids Struct.*, **21** (1985) : 527—543
- 117 Bohatier C, Chento J. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **21** (1985) : 1697—1708
- 118 Chen H (陈罕), Krempl E. *Comput. & Struct.*, **22** (1986) : 625—628
- 119 —, —, *ibid*, **22** (1986) : 579—582; 573—578
- 120 Chang T Y, et al. *ASCE J. Eng. Mech.*, **114** (1988) : 80—96
- 121 Zienkiewicz O C, Ccrmeau I C. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **8** (1974) : 821—845
- 122 Allen D H. *ibid*, **23** (1986) : 903—917
- 123 —. *Int. J. Solids Struct.*, **21** (1985) : 325—343
- 124 Ghoneim H, Matsuoka S. *ibid*, **23** (1987) : 1133—1143
- 125 Zhou G Q (周光泉), et al. *Comput. & Struct.*, **18** (1984) : 591—601
- 126 Bathe K J. Report AE 84-1 MA. Inst. of Tech., Cambridge, MA (1984)
- 127 Hallquist J O. Lawrence Livermore Lab. Report UCID-19401 (1982)
- 128 Chosh S, Kikuchi N. Appl. Mech. & Engng Sci. Conference (1988)
- 129 Rafie S. *ibid*

- 130 Castaneda P P, Willis J R, *Proc. Royal Soc. London*, **A416** (1988) : 217—244  
 131 Zienkiewicz O C, Godbole P N, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **8** (1974) : 3—16  
 132 Tayal A K, Natarajan R, *Int. J. Mech. Sci.*, **23** (1981) : 89—98  
 133 Dalin J B, et al, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **25** (1988) : 147—163  
 134 Ionescu I R, Vernescu B, *Int. J. Engng Sci.*, **26** (1988) : 627—633  
 135 Batra R C, *ibid*, **25** (1987) : 1131—1141  
 136 Schreyer H L, et al, *J. Press. Vessel Tech.*, **105** (1983) : 42—51  
 137 Meijers P, Roode F, *ibid*, **105** (1983) : 277—284  
 138 Gurtin M E, Williams W O, *Int. J. Solids Struct.*, **16** (1980) : 607—617  
 139 Suquet P-M, *Q. Appl. Math.*, **38** (1981) : 391—414  
 140 Ionescu I R, Sofonea M, *ibid*, **46** (1988) : 229—243  
 141 Mihailescu-Suliciu M, et al, *ibid*, **47** (1989) : 105—116  
 142 Drucker D C, *J. Engng Mat. Tech.*, **106** (1984) : 286—289  
 143 Hart E W, *ibid*, **106** (1984) : 322—325  
 144 Perzyna P, *ibid*, **106** (1984) : 410—419  
 145 Rafalski P, *Int. J. Engng Sci.*, **15** (1977) : 193—197  
 146 杨绪灿, 杨桂通, 徐秉业. 粘塑性概论. 中国铁道出版社 (1982)  
 147 王仁, 黄克智, 朱兆祥主编. 塑性力学进展. 中国铁道出版社 (1988)  
 148 欧阳邕. 粘弹塑性理论. 湖南科学技术出版社 (1986)  
 149 杨挺青. 粘弹性力学. 华中理工大学出版社 (1990)  
 150 陈罕. 力学进展, **17** (1987) : 353—363  
 151 范镜泓. 力学进展, **15** (1985) : 273—290; 443—457  
 152 唐质然等. 本构关系理论及应用的新进展. 重庆大学材料本构理论及应用研究室 (1988)  
 153 杨挺青. 力学进展, **18** (1988) : 52—60  
 154 杨挺青. 见《塑性力学与地球动力学文集》, 北京大学出版社 (1990) : 9—16  
 155 杨挺青. 粘弹塑性本构关系. 湖北省力学学会学术年会 (1988)  
 156 殷家驹, 穆霞英. 固体力学学报, **4** (1983) : 640—645  
 157 周光泉. 爆炸与冲击, **3** (1983) : 25—33  
 158 段沉平等. 力学进展, **10** (1980) : 76—88  
 159 赵隆茂, 杨桂通. 力学学报, **18** (1986) : 369—375  
 160 李明瑞. 固体力学学报, **6** (1985) : 231—238  
 161 朱维申. 力学学报, **13** (1981) : 56—67  
 162 王泽俊, 朱维申. 同上, **15** (1983) : 95—101  
 163 赵隆茂, 杨桂通. 固体力学学报, **7** (1986) : 207—215  
 164 魏德敏, 杨桂通. 工程力学, **3** (1986) : 20—32  
 165 杨挺青等. 见《流变学进展Ⅲ》, 华东化工学院出版社 (1990) : 163—165  
 166 潘立功等. 上海力学, **10** (1989) : 10—19

## THE CONSTITUTIVE THEORIES OF ELASTIC-VISCO-PLASTICITY AND THEIR APPLICATIONS

Yang Ting-qing

Huazhong University of Science and Technology

**Abstract** A survey of the researches and developments on the mechanical behavior of materials with combined elastic, viscous and plastic characteristics is given in this paper. The methodologies, the representations, and the applications of elastic-visco-plastic constitutive theories are reviewed.

**Keywords** *elastic-visco-plasticity; elastic/viscoplasticity; viscoplasticity; viscoelasticity; constitutive relations*