

复合材料板的几何非线性行为综述

Chuen-Yuan Chia (贾春元)

加拿大 Calgary 大学土木工程系

提要 本文概述了利用分析方法了解弹性层合板静态大挠度、后屈曲和非线性动态响应方面的进展。在对称层合板情况下不存在弯曲-拉伸耦合。应用了正交异性板或各向异性板的经典非线性理论,还提供了有关这些板的参考文献。简要评述了许多类型边界条件下一般层合板的非线性剪切变形理论和一般解法。在本综述中讨论的使复合材料板几何非线性行为复杂化的一些影响因素是:横向剪应力和正应力,转动惯量和面内惯量,面内初始边界力,几何缺陷,切口,以及非经典边界条件。

1 引言

近几年来,利用各向异性层合复合材料作为结构元件有了显著的增长。这种增长是由于利用了复合材料重量轻、强度高和各向异性材料等性质,这些性质都可以通过改变纤维取向和铺层顺序而加以调整,从而可以非常有效地使用层合复合材料。在许多工业部门,如飞机、导弹、水下空间、造船、汽车等工业和房屋建筑业中都能找到它们。由于预测未来矿物材料将严重短缺,因此复合材料技术将起更重要的作用。复合材料(例如纤维增强复合材料)的正确和有效使用,要求进行更复杂的分析,以便能准确地预报这些材料对外载荷的弹性响应。因此对层合复合材料的弹性行为,尤其是薄板的弹性行为进行了大量的研究工作。自

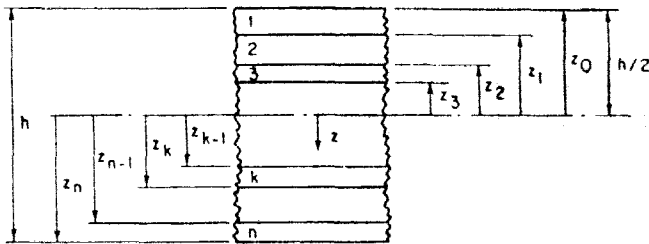


图1 n 层层合板的几何特性

从 Reissner 和 Stavsky 于 1961 年对层合板的静态小挠度理论(计及弯曲-拉伸耦合影响)作系统阐述以来,许多学者已经把这一理论用于研究非对称层合板的弯曲和屈曲,以及把它应用于类似的动态情况。此外,在有些分析中已经考虑了横向剪切变形的影响。建立在线

性层合板理论基础上的这些结果本文将不作评述。

本文所讨论的复合材料板是由若干完善粘接的薄层组成(图1),认为由单向增强纤维材料组成的每一薄层(薄片)是均匀正交异性单层薄片。每一单层薄片(其厚度和弹性性质是任意的)的正交异性对称轴都与复合材料板的对称轴形成任意的夹角。角铺层层合板和正交铺层层合板是两种重要的排列类型。前者每一层的正交异性对称轴与板的对称轴间的夹角是交替变化的 θ 和 $-\theta$, 而后的夹角是 0° 和 90° 。

众所周知,几何非线性是由弹性体的有限变形产生的。文献中复合材料板壳的非线性应

变-位移关系常用来导出非线性理论。包括非线性弯曲、后屈曲和非线性动态响应（大振幅振动、非线性暂态响应和大挠度的波传播）在内的复合材料板的几何非线性分析，要比各向同性板复杂得多。这是由于必须考虑纤维增强材料的性质和层合的几何特性（纤维取向和铺层顺序）所致。对于非对称层合板，弯曲-拉伸耦合的存在使问题更为复杂。在板的分析中，几种复杂的影响是横向剪应力和正应力，动态情况下的转动惯量和面内惯量，面内初始边界力，初始几何缺陷，切口，非经典边界条件，弹性基础，非矩形板。这些影响也在本文讨论之列。

根据 von Karman 的位移假定条件，Pister & Dong^[1] 得出了计及热影响的各向同性层合板非线性弯曲分析的方程组。Stavsky^[2,3] 把 Karman 的板理论推广到复合材料板。在三维非线性弹性理论的基础上，Habib^[4] 建立了计及横向剪应变和正应变、加速度和温度场的非均质各向异性板的一般非线性理论。利用参量展开法，同一作者^[5] 提出了非对称横观各向同性层合板的静态非线性理论。1969 年，Whitney & Leissa^[6] 把惯性项包括在一般层合板的 Karman 型非线性方程组中。之后有大量学者利用 3 个方程来研究板的几何非线性行为。其他一些学者利用 Berger 近似法，有少数人使用了剪切变形板理论。文献中可找到有关反对称层合板的非线性弯曲^[7-31]，后屈曲^[32-47]，大振幅振动^[48-72]，非线性暂态响应^[73,74] 和波传播^[75,76] 等问题的解。无弯曲-拉伸耦合的对称层合板的非线性弯曲^[77-78]，后屈曲^[80-83] 和大振幅振动^[84-87] 等问题的结果，也可在文献中找到。各向异性板经典非线性理论的应用以及均质正交异性板和各向异性板的非线性弯曲^[88-120]，后屈曲^[121-136]，大振幅振动^[137-197] 和非线性暂态响应^[198-206] 的许多理论结果，也可在文献中找到。

2 层合板的非线性剪切变形理论

之后在动态非线性剪切变形理论的基础上，提出了计及复合材料板受复杂影响时几何非线性行为的一些数值结果^[65]。为方便起见，扼要回顾一下这一理论是有帮助的。根据 3 维一般正交异性单层薄板的广义 Hooke 定律，部分非线性应变-位移关系和两个面内位移的线性变化^[207]，以及厚度方向的横向位移、运动方程、本构方程和一般层合板的 6 个边界条件，都是从 Reissner 变分原理得出的。这一理论包含了横向剪切、面内惯量和转动惯量、横向正应力和正应变等的影响。显然，横向剪应变沿板厚方向是均匀的，于是横向剪应力呈阶梯状分布。为了使剪应力呈抛物线分布^[208]，需要利用如 Mindlin 板理论^[207] 中的剪切修正系数或者需要余剪切能。

如果忽略横向胀缩和面内惯量，则一般层合板的运动方程可用横向位移 w 和力函数 ϕ 表示成^[65]

$$\begin{aligned} & \Delta(a_1\phi,_{xxxxx} + a_2\phi,_{xxxx} + a_3\phi,_{xxx} + a_4\phi,_{xx} + a_5\phi,_{xy}) \\ & \quad + I_1\{S_{22}[I_{1s}(\phi)] - S_{12}[I_{2s}(\phi)]\} \\ & \quad + I_2\{S_{11}[I_{2s}(\phi)] - S_{21}[I_{1s}(\phi)]\} \\ & = \Delta(w,_{xx}^2 - w,_{xx}w,_{yy}) - I_1[S_{22}(w,_{xx}) - S_{12}(w,_{yy})] \\ & \quad - I_2[S_{11}(w,_{yy}) - S_{21}(w,_{xx})] \\ & \quad \Delta[w,_{xx}\phi,_{yy} + w,_{yy}\phi,_{xx} - 2w,_{xy}\phi,_{xy}] - I_1(\phi,_{xx}) - I_2(\phi,_{yy}) \\ & \quad + I_3\{S_{22}[I_{1s}(\phi)] - S_{12}[I_{2s}(\phi)]\} \\ & \quad + I_4\{S_{11}[I_{2s}(\phi)] - S_{21}[I_{1s}(\phi)]\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \Delta(\rho_0 h w_{,tt} - q) - I_3[S_{22}(w_{,xx}) - S_{12}(w_{,yy})] - I_4[S_{11}(w_{,yy}) - S_{21}(w_{,xx})] \quad (2)$$

式中 x 轴和 y 轴位于未变形板的中面；逗号表示对相应坐标的微分； ρ_0 是质量密度； t 是时间； q 是横向载荷强度； a_i 是常数； $\Delta, I_i, I_{i,}$ 和 $S_{i,j}$ 是微分算子^[65]。依据 Reissner 变分原理，方程 (1) 和 (2) 需要沿各边的 5 个边界条件。

对于在 x 轴方向长度为 a ，在 y 方向宽度为 b 的矩形板，方程 (1) 和 (2) 在任何时间 $t > 0$ 时所需的边界条件^[65]为

类型 1 所有简支边 (SS) 都没有面内力

$$\left. \begin{aligned} & \text{在 } x = \pm a/2 \text{ 处, } w = M_x = M_{xy} = \phi_{,yy} = \phi_{,xy} = 0 \\ & \text{在 } y = \pm b/2 \text{ 处, } w = M_y = M_{xy} = \phi_{,xx} = \phi_{,xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

类型 2 两对边简支和两对边固支 (SC)，四边都没有面内力

$$\left. \begin{aligned} & \text{在 } x = \pm a/2 \text{ 处, } w = M_x = M_{xy} = \phi_{,yy} = \phi_{,xy} = 0 \\ & \text{在 } y = \pm b/2 \text{ 处, } w = \alpha = \beta = \phi_{,xx} = \phi_{,xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

类型 3 所有的固支边 (CC) 都没有面内力

$$\left. \begin{aligned} & \text{在 } x = \pm a/2 \text{ 处, } w = \alpha = \beta = \phi_{,yy} = \phi_{,xy} = 0 \\ & \text{在 } y = \pm b/2 \text{ 处, } w = \alpha = \beta = \phi_{,xx} = \phi_{,xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

M_x, M_y 和 M_{xy} 是单位长度的法向弯矩和扭矩， α 和 β 分别代表中面法线变形后在 xz 和 yz 平面的转角。

如果横向正应力和应变以及面内惯量忽略不计，并且利用余剪切能使横向剪应力沿板厚呈抛物线分布的话，则含有几何缺陷的反对称角铺层板的动力学方程可表达成无量纲形式^[209]

$$\bar{A}_{12}^* F_{,\zeta\zeta\zeta\zeta} + (2\bar{A}_{12}^* + \bar{A}_{66}^*) \lambda^2 F_{,\zeta\zeta\eta\eta} + \bar{A}_{11}^* \lambda^4 F_{,\eta\eta\eta\eta} + \lambda [J_1(\alpha^*) + J_2(\beta^*)] = \lambda^2 (W_{,\zeta\zeta\eta} - W_{,\zeta\zeta} W_{,\eta\eta} + 2\bar{W}_{,\zeta\eta} W_{,\zeta\eta} - \bar{W}_{,\zeta\zeta} W_{,\eta\eta} - \bar{W}_{,\eta\eta} W_{,\zeta\zeta}) \quad (6)$$

$$\lambda^2 [F_{,\eta\eta} (W_{,\zeta\zeta} + \bar{W}_{,\zeta\zeta}) + F_{,\zeta\zeta} (W_{,\eta\eta} + \bar{W}_{,\eta\eta}) - 2F_{,\zeta\eta} (W_{,\zeta\eta} + \bar{W}_{,\zeta\eta})] - J_1(F_{,\zeta}) - \lambda J_2(F_{,\eta}) + J_3(\alpha^*) + J_4(\beta^*) = \lambda^4 W_{,\tau\tau} - \lambda^4 Q \quad (7)$$

$$T_1 \lambda [L_1(\alpha^*) + L_2(\beta^*) - R_1(\lambda^2/12H^2)(\bar{C}_{44}^* \alpha_{,\tau\tau} + \bar{C}_{45}^* \beta_{,\tau\tau})] - \lambda^3 H^2 \alpha^* = J_{1a}(F) + \lambda^2 H^2 W_{,\zeta} \quad (8)$$

$$T_1 \lambda [L_3(\alpha^*) + L_4(\beta^*) - R_1(\lambda^2/12H^2)(\bar{C}_{45}^* \alpha_{,\tau\tau} + \bar{C}_{55}^* \beta_{,\tau\tau})] - \lambda^3 H^2 \beta^* = J_{2a}(F) + \lambda^3 H^2 W_{,\eta} \quad (9)$$

式中 $J_i, J_{i,}$ 和 L_i 是微分算子^[209]； T_1 和 R_1 是迹常数，分别表示 $T_1 = 1$ 时的横向剪切的影响和 $R_1 = 1$ 时的转动惯量的影响。当 $T_1 = R_1 = 0$ 时可忽略这些影响。这些方程中的无量纲参数定义为

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= x/a, \quad \eta = y/b, \quad \lambda = a/b, \quad W = w/h, \quad \bar{W} = \bar{w}/h \\ F &= \phi/A_{22}h^2, \quad Q = qb^4/A_{22}h^3, \quad \tau = (t/b^2)\sqrt{A_{22}h/\rho_0} \\ H &= b/h, \quad \alpha^* = H\alpha, \quad \beta^* = H\beta, \quad \bar{A}_{ij}^* = A_{ij}^*/A_{22}, \quad \bar{B}_{ij}^* = B_{ij}^*/h \\ \bar{D}_{ij}^* &= D_{ij}^*/(A_{22}h^2) \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad \bar{C}_{ij}^* = C_{ij}^*/A_{22} \quad (i, j = 4, 5) \\ (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^*(1, z, z^2) dz \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

在上述表达式中, w 是初始挠度, C_i^* 是与剪切刚度有关的常数^[200], $C_i^{(k)}$ 是第 k 层的弹性刚度。可以看出, 方程 (6)–(9) 也可从 Hamilton 原理得出。除了横向正应力外, 这些方程是方程 (1) 和 (2) 的对应方程, 因此每一边上同样需要 5 个边界条件。当各边是对于转动的弹性约束的矩形板, 并受到每单位长度上面内法向力 N_x 和 N_y , 以及切向力 N_{xy} 的作用时, 边界条件的无量纲形式为

$$\left. \begin{aligned} \zeta = 0, 1 \text{ 时, } W = \beta^* = 0, \alpha_{,\zeta} = \pm K_1 \alpha^*, F_{,\eta\eta} = N_\zeta, F_{,\zeta\eta} = -\lambda N_{\zeta\eta} \\ \eta = 0, 1 \text{ 时, } W = \alpha^* = 0, \beta_{,\eta} = \pm K_2 \beta^*, F_{,\zeta\zeta} = \lambda^2 r N_\zeta, F_{,\zeta\eta} = -\lambda N_{\zeta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中 K_1 和 K_2 是转动边约束系数, 并且

$$(N_\zeta, N_{\zeta\eta}) = \frac{b^2}{A_{22}h^2} (\bar{N}_x, \bar{N}_{xy}), \quad r = \frac{\bar{N}_y}{\bar{N}_x} \quad (12)$$

如果忽略不计横向剪切和转动惯量, 或 $T_x = R_x = 0$, 则方程 (8) 和 (9) 化为

$$\lambda \alpha^* = -W_{,\zeta}, \quad \beta^* = -W_{,\eta} \quad (13)$$

这就是 Kirchhoff 运动学假设。因而对于反对称角铺层板, 方程 (6) 和 (7) 便可以写成

$$\begin{aligned} W_{,\zeta\zeta\zeta\zeta} + 2\bar{a}_1 \lambda^2 W_{,\zeta\zeta\eta\eta} + \bar{a}_2 \lambda^4 W_{,\eta\eta\eta\eta} + \bar{a}_3 \lambda F_{,\zeta\zeta\zeta\zeta} \\ + \bar{a}_4 \lambda^3 F_{,\zeta\eta\eta\eta} + (\lambda^4 / \bar{D}_{11}^*) \\ \times [W_{,\zeta\zeta} - Q + \bar{k}W - \bar{G}(W_{,\zeta\zeta} + \lambda^2 W_{,\eta\eta}) \\ - (\lambda^2 / \bar{D}_{11}^*) [F_{,\zeta\zeta}(W_{,\zeta\eta} + \bar{W}_{,\zeta\eta})]] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} F_{,\zeta\zeta\zeta\zeta} + 2b_1 \lambda^2 F_{,\zeta\zeta\eta\eta} + b_2 \lambda^4 F_{,\eta\eta\eta\eta} - b_3 \lambda W_{,\zeta\zeta\zeta\zeta} - b_4 \lambda^3 W_{,\zeta\eta\eta\eta} \\ = (\lambda^2 / \bar{A}_{22}^*) (W_{,\zeta\zeta} - W_{,\zeta\zeta} W_{,\eta\eta} - \bar{W}_{,\zeta\zeta} W_{,\eta\eta} - \bar{W}_{,\eta\eta} W_{,\zeta\zeta} + 2\bar{W}_{,\zeta\eta} W_{,\zeta\eta}) \end{aligned} \quad (15)$$

在方程 (14) 中, 假定板支承在 Winkler-Pasternak 弹性基础上, 于是载荷强度 q 由 $[q - k_f + G_f(w_{,xx} + w_{,yy})]$ 替代, 这里 k_f 和 G_f 是各向同性基础的拉伸模量和剪切模量。方程 (14) 和 (15) 中的 \bar{a}_i 和 b_i 是常量系数^[57], \bar{k} 和 \bar{G} 由下式给出:

$$\bar{k} = b^4 k_f / (A_{22} h^2), \quad \bar{G} = b^2 G_f / (\lambda^2 A_{22} h^2) \quad (16)$$

Karman 型动力学方程 (14) 和 (15) 沿各边需要 4 个边界条件。矩形层合板的边界条件^[70]为

$$\left. \begin{aligned} \zeta = 1, 0 \text{ 时, } W = 0, M_\zeta = \pm \xi_1(\eta) W_{,\zeta}, F_{,\eta\eta} = N_\zeta, F_{,\zeta\eta} = -\lambda N_{\zeta\eta} \\ \eta = 1, 0 \text{ 时, } W = 0, M_\eta = \pm \xi_2(\zeta) W_{,\eta}, F_{,\eta\eta} = \lambda^2 r N_\zeta, F_{,\zeta\eta} = -\lambda N_{\zeta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$\xi_1(\eta)$ 和 $\xi_2(\eta)$ 是转动边约束的可变系数。

3 求解的一般方法

板分析文献中可以找到求解的多种分析方法。对某一特殊板问题提出的分析解法一般不能容易地应用于其他的问题。现在简要叙述一种可以应用于很广泛一类非线性板问题的级数解法。

为了把板的后屈曲行为作为一种特殊情况包含进去, 如同边界条件 (11) 和 (17) 所述那样, 4 边受到法向力和切向力的作用。方程 (14) 和 (15) 即 Karman 型动力学方程^[70] 的解可以假定取分离变量的形式

$$\left. \begin{aligned} W = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum W_{mn}(\tau) \phi_m(\zeta) \phi_n(\eta), \quad \bar{W} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum \bar{W}_{mn} \phi_m(\zeta) \phi_n(\eta) \end{aligned} \right\}$$

$$F = \frac{1}{2} N_{\zeta} (\eta^2 + \lambda r \zeta^2) - \lambda N_{\zeta} \eta \zeta \eta + \sum_{m,n=1}^{\infty} F_{mn}(\tau) X_m(\zeta) Y_n(\eta) \quad (18)$$

式中 ϕ_m, ϕ_n, X_m 和 Y_n 为梁的本征函数, 定义为

$$\left. \begin{aligned} \phi_m &= A_m (\cosh \alpha_m \zeta - \cos \alpha_m \zeta) + B_m \sinh \alpha_m \zeta + \sin \alpha_m \zeta \\ \phi_n &= A_n (\cosh \alpha_n \eta - \cos \alpha_n \eta) + B_n \sinh \alpha_n \eta + \sin \alpha_n \eta \\ X_m &= \cosh \beta_m \zeta - \cos \beta_m \zeta - \gamma_m (\sinh \beta_m \zeta - \sin \beta_m \zeta) \\ Y_n &= \cosh \beta_n \eta - \cos \beta_n \eta - \gamma_n (\sinh \beta_n \eta - \sin \beta_n \eta) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由方程组 (18) 的第一个方程可以看出, 4 边没有横向位移的条件自动得到满足。可选梁本征函数的系数使解 (18) 满足方程 (17) 的两个面内边界条件以及两对边对于转动有相同程度的弹性约束边界条件。

为满足方程组 (17) 中两对边具有同一转动刚度变化的边界条件, 4 边的弯矩可用靠近这些边的等效横向压力代替, 并把它们展开成系数与时间相关的广义 Fourier 级数。这些边界条件可使这些系数与 $W_{mn}(\tau)$ 联系起来。利用前面的解, 由 W 和 F 所表达的 Karman 型动力学方程组可以化为 $W_{mn}(\tau)$ 和 $F_{ij}(\tau)$ 的一个非线性常微分方程组。消去 F_{ij} 后, 所得到的含 $W_{mn}(\tau)$ 的方程可以通过调和平衡法求解。

稍加修改, 解 (18) 便可用到方程 (6)~(9) 及边界条件 (11)。 W, W 和 F 的级数展开式与解 (18) 相同。方程 (18) 中导数 $W_{,\zeta}$ 和 $W_{,\eta}$ 的表达式可以用来作为两个斜角函数 α^* 和 β^* 的参量的展开式, 但这里与时间相关的系数 $\alpha_{mn}(\tau)$ 和 $\beta_{mn}(\tau)$ 并不相同。方程 (19) 中的常量系数 $A_j, B_j, \alpha_j, \beta_j$ 和 γ_j 如同上述的解一样确定。把现在的解^[20]代入方程 (6)~(9), 得到与时间相关的系数 $W_{mn}, F_{mn}, \alpha_{mn}$ 和 β_{mn} 的 4 个方程组。消去 F_{mn} , 得

表 1 弹性常数的数值

| | 石墨-环氧 | 硼-环氧 | 玻璃-环氧 |
|--------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| E_1/E_2 | 40 | 10 | 3 |
| E_3/E_2 | 1 | 1 | 1 |
| G_{12}/E_2 | 0.5 | 0.33 | 0.5 |
| $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ | 0.25 | 0.22 | 0.25 |
| G_{13}/E_2 | 0.5 | 0.33 | 0.5 |
| G_{23}/E_2 | 0.33 | 0.2 | 0.33 |
| ρ/E_2 | 0.2×10^{-10} | 0.2×10^{-10} | 0.2×10^{-10} |

得到含 W_{mn}, α_{mn} 和 β_{mn} 的最后方程, 这些方程可通过调和平衡法求解。

方程 (14) 和 (15) 以及方程 (6)~(9) 的上述两组解可用来研究无阻尼复合材料板的大振幅弯曲振动和非线性暂态响应。这种板的非线性弯曲和后屈曲的解可看作是它们的特殊情况。表 1 给出了计算中所用石墨-环氧 (GR), 硼-环氧 (BO) 和玻璃-环氧 (GL) 等材料的弹性常数比值, 表

中的 E_i 为主弹性模量, G_{ij} 为剪切模量, ν_{ij} 为 Poisson 比。比值 $E_1/E_2, G_{12}/E_2$ 和 ν_{12} 用于方程 (14) 和 (15); $E_1/E_2, G_{12}/E_2, \nu_{12}, G_{13}/E_2$ 和 G_{23}/E_2 用于方程 (6)~(9); 表中的所有常数都可用于方程 (1) 和 (2)。

4 非线性弯曲

近些年来, 人们对受横向载荷或同时受横向和面内载荷的复合材料板静态大挠度行为的注意程度不及非线性振动响应。这是由于在结构板材的现代设计中, 最大挠度不再是主要的因素。不过, 静态大挠度行为还可用于分析复合材料板的初始破坏和断裂以及其他方面的问题。

对于复合材料板的非线性弯曲分析,大多数使用Karman型理论。众所周知,Karman型理论的公式是建立在应变以及转动的平方都比1小得多的基本假设的基础上。对于最大挠度相当于板厚的情况,这一理论可以以比较好的精确性预测薄板的挠度和应力。由于复合材料板的Karman型方程是非线性的耦合方程,其解将是很复杂的。为了克服这些复杂性,有时对复合材料板采用Berger的求解方法。根据Berger的假定,薄膜应变第二不变量的弹性性能要比第一不变量的平方小得多,因此可以忽略不计而不显著影响结果的精度。结果搞清楚了的由变分方程得出的Euler-Lagrange方程要比Karman方程简单得多。然而,有些学者^[210-212]从数值结果中发现,Berger方程不能得出与Karman方程一致的准确结果并且导致与Karman方程完全不同的图象或变形。这些发现使我们在考虑Berger方程的一般应用时有必要注意一定的限制条件。

研究复合材料板非线性弯曲的求解方法有动态松弛法^[9,19,20],摄动法^[10,13],广义Fourier级数^[11,14-16,21,22,24,78],有限差分^[8,12,19,20,77],加权残数法(或修正Galerkin法)^[17,28]和有限元法^[18,23,27-30]。图2示出反对称正交铺层和角铺层矩形板在不同的长宽比和不同的铺层总层数情况下均布载荷 q_0 与中心挠度之间的关系。可以看出,对于给定的横向载荷,最大挠度 w_{max} 随长宽比的增大而增大,但随铺层总层数 n 的增大而减小。 $n=6$ 的曲线(这里没有给出)接近于没有耦合刚度的非耦合解($n=\infty$)。对于任何一固定载荷,角铺层板的中心挠度要比相应的正交铺层板的中心挠度稍微大些。这些板中心的弯矩随板的总层数的增大而增大。图3示出4层($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)简支方板受横向均布载荷时横向剪切对

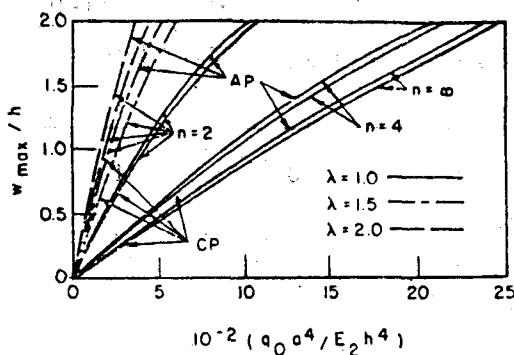


图2 受均布载荷作用4边固支边界无应力的反对称 $\pm 45^\circ$ 角铺层(AP)和正交铺层(CP)石墨-环氧矩形板的总层数和长宽比对载荷-挠度曲线的影响

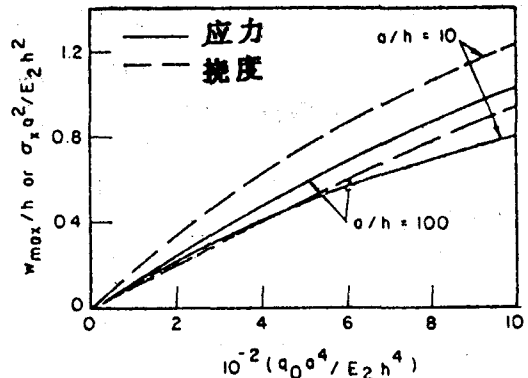


图3 横向剪切对受均布载荷4层($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)简支方板的中心挠度和应力的影响($E_1/E_2=25$, $G_{11}/E_1=0.5$, $G_{12}/E_1=0.2$, $\nu_{12}=0.25$)

中心挠度和应力的影响^[18]。板的面内边界条件没有法向边界力和切向边界位移。应用Karman型板理论,对于载荷参数 $10^{-2}(q_0 a^4 / E_2 h^4) = 10$, $a/h = 10$ 时板的最大挠度要比 $a/h = 100$ 时的约大30%。总之,复合材料板的静态大挠度响应类似于具有初始挠度和/或边界偏心受压板的初始后屈曲行为。

5 后屈曲行为

当边界受压和/或边界剪切逐渐施加到薄平板弹性中面时,首先达到的是所谓临界屈曲载荷。大家知道,在屈曲之后,只要屈曲应力还处在弹性范围,则薄板就还能承受相当大的载荷而不破坏。因此,有必要研究板在屈曲之后的行为,即后屈曲行为,以便通过减轻板材

重量, 增加强度, 提高结构的效率。

后屈曲行为的精确分析是非常困难的, 这是因为利用了板的非线性理论以及后屈曲状态下出现的屈曲形式随载荷而改变。这种改变发生在板中储存的能量足够使板从一种屈曲形式变到另一种屈曲形式的时候。在大多数后屈曲分析中, 假定板的屈曲形式保持不变。在瞬态后屈曲范围内这是一个合理的假定 (因为后屈曲载荷要比屈曲载荷小 2/3)。要想在较宽范围的后屈曲状态下精确分析薄板响应, 就必须考虑屈曲方式的变化。在分析后屈曲过程中, 研究这种情形的常用方法是在挠度函数的级数解中多取一些项。这样就能精确描述所受载荷远高于屈曲载荷的薄板行为。在分析中等厚度板时, 横向剪切的影响当然要考虑进去。

许多研究人员^[9,92-97,80-83]讨论了复合材料板的后屈曲行为, 其中 Prabhakara & Kennedy^[36]和笔者^[42]研究了面内边缘剪切时反对称角铺层板的行为, Sallam & Simitses^[41]则研究了偏心受压情况。对于边界受压的情况, 通常绘出面内压力或剪切力与横向挠度之间的关系曲线, 但有时是绘出与面内位移或边缘收缩之间的关系曲线。弯曲与拉伸的耦合一般会减小层合板的后屈曲载荷^[32]。对于给定的挠度, 高模量材料一般要求大的压力。固支 4 层正交铺层石墨-环氧方板受单向压力作用下所要求的载荷, 几乎是小挠度板在双向受压作用下的 2 倍。若存在初始挠度和/或偏心受压, 则屈曲现象不会发生, 载荷-挠度曲线表现出的行为同非线性弯曲的一样。偏心减小了板的承载能力, 或者增大了横向挠度^[41]。

根据方程 (6)~(9) 的一个解^[20], 表 2 列出了考虑初始挠度和横向剪切的影响时均布边缘压力的数据; 表 3 列出了考虑板的长厚比和总层数的影响时后屈曲载荷参数值。在表 2

表 2 受双向均布压力有几何缺陷的简支双层 ±45°角铺层玻璃-环氧方板的后屈曲载荷参数值 - $N_x b^2 / E_2 h^3 (a/h = 15)$

| w_{max}/h | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------------|-------------------|------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0.0 | 2.720 (2.628)* | 3.496 (3.382) | 4.745 (4.629) | 6.558 (6.366) | 8.646 (8.405) |
| 0.2 | 0.0 (0.0) | 3.417 (3.243) | 5.523 (5.432) | 8.349 (8.063) | 11.852 (10.846) |
| 0.4 | 0.0 (0.0) | 3.384 (3.152) | 8.631 (8.174) | 13.898 (13.243) | 21.872 (20.611) |
| 0.6 | 0.0 (0.0) | 3.267 (3.104) | 8.844 (8.283) | 15.564 (14.388) | 23.373 (22.344) |
| 0.8 | 0.0 (0.0) | 3.143 (2.942) | 8.973 (8.317) | 23.611 (22.061) | 31.456 (29.634) |
| 1.0 | 0.0 (0.0) | 2.963 (2.802) | 15.672 (14.385) | 25.276 (22.991) | 33.496 (32.247) |

*考虑了横向剪切的影响。

中, w_{11} 是初始挠度的大小, 其他的值 $\bar{w}_{ij} (= w_{ij}/h)$ 等于零。正如所期望的, 表中的数据表明, 受均布双向压力的反对称角铺层方板的最大挠度 w_{max} 随后屈曲载荷的增大而增大。当 $w_{max}/h \leq 1.5$ 时, 几何缺陷会降低承载能力, 或使横向挠度增大; 当 $2 \leq w_{max}/h \leq 4$ 时, 结果完全相反。横向剪切也会降低承载能力, 或使横向挠度增大, 降低的幅度取决于挠度

和/或几何缺陷的大小。在本例中 ($a/h = 15$) 临界屈曲载荷降低了 3.5%，当 $w_{max}/h = 3$ 时的后屈曲载荷降低了 3.0%。同 横向剪切应力沿板厚呈阶梯状分布的非线性剪切变形板的理论相比，人们更重视上述呈抛物线分布的板理论。在利用剪切修正系数进行反对称正交铺层

表 3 无几何缺陷两简支对边受载两固支对边无载荷的 $\pm 45^\circ$ 角铺设硼-环氧方板的后屈曲载荷参数值 - $\bar{N}_x b^2/E_2 h^3 (w_{max}/h = 1)$

| 总层数 | Karman 型理论 | 非线性剪切变形理论, $a/h =$ | | | | |
|----------|------------|--------------------|---------|---------|---------|---------|
| | | 40 | 30 | 20 | 10 | 5 |
| 2 | 17.6324 | 17.4250 | 17.1986 | 16.0884 | 14.8513 | 10.8341 |
| 4 | 28.0528 | 27.6501 | 26.9830 | 24.5463 | 19.8736 | 11.5250 |
| 6 | 31.0259 | 29.8461 | 28.8460 | 26.0728 | 20.5846 | 12.1029 |
| ∞ | 31.4839 | 30.2062 | 29.1578 | 26.4603 | 20.7321 | 12.2113 |

圆柱壳的非线性分析^[213]中，我们同样可以看到这一点。表 3 给出的是两简支对边受单向压力两固支对边不受力的反对称角铺层无缺陷方板的长厚比以及弯曲-拉伸耦合对后屈曲载荷的影响。弯曲-拉伸耦合的影响通常随层数的增加而削弱。当最大挠度等于板厚时，横向剪切的影响会降低后屈曲载荷，当板的长厚比为 20，总层数分别为 2，4，6， ∞ 时，后屈曲载荷分别降低 8.8%，12.5%，16%，16%，因此，横向剪切的影响随总层数的增加而增大。当板成为 4 边简支时横向剪切的 最大影响减小到使后屈曲载荷降低 8.1%。

6 非线性动态响应

施加于结构系统的外部载荷可能不会随时间而变化。如果随时间而发生的变化在很长的一段时间内都是小量，则惯性的影响可以忽略不计，系统的行为就可以近似地由平衡条件和材料性质来决定。然而，在现代飞机、航天飞行器和某些土木工程建筑中会出现载荷随时间而迅速变化的情况，在结构设计的过程中就必须考虑这些因素。在这种情况下必须计及惯量的影响，系统的动态行为必须看成是时间的函数。如果板之类结构的振幅同板的厚度相比不再是小量（例如受到核武器或其他爆炸载荷作用的板），则需要用非线性动态板的方程来分析问题。

大振幅振动、非线性暂态响应和涉及大挠度的波传播，都是复合材料板的典型非线性动态响应。近几年来层合板的非线性弯曲振动^[48-72, 84-87]得到了广泛的注意。大多数的结果是基于单振型的分析（或横向挠度的单项解），通常它能得到良好的近似结果。要获得较精确的结果，必须进行多振型分析。笔者和 Prabhakara^[55]把解 (18) 运用到方程 (14)，

(15) 和两类边界条件 (17)，完成了所有边界简支或固支的无缺陷复合材料层合板的多振型分析。表 4 给出了反对称角铺层石墨-环氧板的单振型与多振型解的比较。本文中 $\omega^{(0)}$ 和 ω 分别表示复合材料板的线性和非线性频率。数值结果表明，同多振型解（指初始的对称-对称 4 振型）所获得的基型波的振幅 w_{max} ，比用单振型解获得的振幅要大。当振幅达板厚的 2.5 倍左右时，对简支板而言这种预计差额大约是 5%，对固支板则大约是 11%。单项解对低模量复合材料较精确。可以看出，常用的石墨-环氧材料的模量比 $E_1/E_2 < 20$ 而不是 $E_1/E_2 =$

40. 如图 4 所示, 弯曲-拉伸耦合的影响降低了板的振幅。把单振型解^[66]用于方程 (14), (15) 和边界条件 (17), 图 5 示出了部分简支部分固支反对称角铺层方板的振幅-频率响应曲线。 $\delta_i = 0$ 和 $\delta_i = 1 (i = 1, 2)$ 分别对应 4 边简支和 4 边固支。 $(\delta_1, \delta_2) = (1, 1)$ 和

表 4 双层 $\pm 45^\circ$ 角铺层石墨-环氧方板的非线性基频的比较

| w_{max}/h (简支) | | | w_{max}/h (固支) | | |
|-----------------------|--------|--------|-----------------------|--------|--------|
| $\omega/\omega^{(0)}$ | 单振型 | 4 振型 | $\omega/\omega^{(0)}$ | 单振型 | 4 振型 |
| 1.034 | 0.9836 | 0.9839 | 1.037 | 0.9303 | 0.9610 |
| 1.071 | 1.4274 | 1.4506 | 1.075 | 1.3449 | 1.3971 |
| 1.139 | 2.0491 | 2.1075 | 1.143 | 1.9031 | 1.9803 |
| 1.163 | 2.2304 | 2.3159 | 1.168 | 2.0370 | 2.1574 |
| 1.213 | 2.5801 | 2.7187 | 1.217 | 2.2519 | 2.4903 |

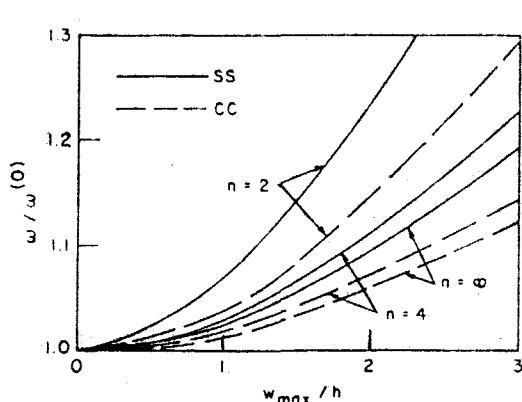


图 4 反对称正交铺层石墨-环氧方板的总层数对非线性基频的影响

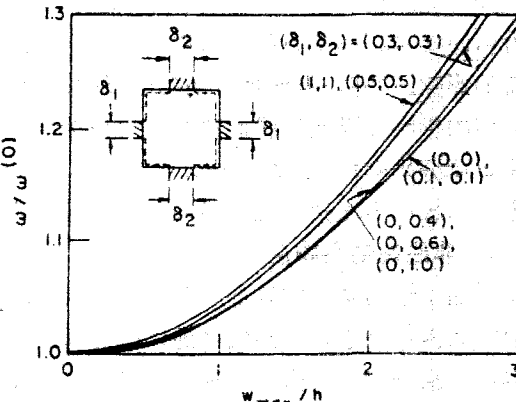


图 5 边界中段的嵌块对简支双层 $\pm 45^\circ$ 角铺层石墨-环氧板的非线性基频的影响

$(\delta_1, \delta_2) = (0.5, 0.5)$ 的曲线虽然没有重合但彼此非常接近。 $0 < \delta_i < 1$ 的所有曲线都位于两条极限曲线 $\delta_i = 0$ 和 $\delta_i = 1$ 之间。 $\delta_i = 0.4$ 的曲线接近于相应 4 边固支情况的曲线。很明显, 这些混合边界条件并不改变振动的行为但影响复合材料板的振幅和频率的大小。非线性频率一般随复合材料模量的增大而增大, 因此振幅-频率响应是一种硬型的非线性。然而在层合板中, 初始几何缺陷的存在会使振幅-频率响应从硬型改变成软弹簧型行为, 正如 Hui^[68] 所指出的那样。

Reddy^[73], Chen & Sun^[74] 研究了复合材料板的非线性暂态响应。包括用有限元分析横向剪切的大挠度响应 (指 Karman 型), Reddy^[73] 发现, 对于受突然的区域载荷作用下简支反对称双层正交铺层的无阻尼层合板, 弯曲-拉伸耦合将增大板中心的振幅。对于受突然均布载荷的简支双层 $\pm 45^\circ$ 角铺层方板, 板中心的振幅增大速率随载荷的增大而减小, 对于受突然均布载荷的简支反对称双层正交铺层和双层 $\pm 45^\circ$ 角铺层方板, 中心处挠度的幅度随

板的长厚比的增大而增大。利用类似于上述求解的方法, Chen & Sun^[74]研究了初始应力对复合材料板的非线性暂态响应的影响。线性Mindlin板的理论指出, 对于受突加横向载荷的板, 其最大挠度的幅度、弯矩和循环周期, 分别近似地与因子 $1/(1+P_x/P_{xc})^{1/2}$ 成线性比例关系, 这里 P_x 是均布初始面内载荷; P_{xc} 是屈曲载荷。人们发现, 当板处于初始拉伸应力下时, 由于大挠度的影响, 板响应的减小量较为显著。当外加载荷较大时, 初始应力的影响就变得不那么显著了。

利用非线性剪切变形理论, Sun & Shafey^[75]讨论了复合材料板中波的传播问题。发现大挠度对相速度有显著的增强作用。初始变形可增大相速度并且使其弥散较小。

7 复杂的影响因素

除了复合材料板的材料性质和层合的几何特性之外, 还有其他一些影响因素使非线性分析变得更加复杂, 从而使人们对弹性板响应的理解更趋复杂。这些影响因素包括: ①横向剪切变形; ②横向正应力; ③转动惯量和面内惯量; ④初始面内应力; ⑤几何缺陷; ⑥切口; ⑦非经典边界条件; ⑧弹性基础; ⑨非矩形板。

几乎在所有的公开文献中都没有面内惯量对复合材料板非线性动态分析的影响的结果。看来人们对这一影响因素不感兴趣。Leissa & Kadi^[214]给出了矩形平台的双重弯曲各向同性扁壳的数值结果, 然而结果表明, 面内惯量的影响在板和扁壳的动态分析中并不重要。

方程(1)和(2)及边界类型(3), (4), (5)的单振型解已由Sivakumaran和笔者^[65]获得。图6给出了横向正应力

($R_s=1$), 横向剪力($R_i=1$)和转动惯量($R_n=1$)对反对称角铺层板振幅-频率响应的影响的数值结果, 层合板的弹性常数见表1。在相同类型边界条件下, 比较 $R_s=1, R_i=1, R_n=1$ 和 $R_s=1, R_i=1, R_n=0$ 两种情况, 从图中可以看出, 横向正应力可减小振幅或增大振动频率。随着振幅的不断增大, 横向正应力的影响先是增强, 之后非常缓慢地减弱。对于这3类边界条件, 横向正应力对频率的最大影响在无穷小振幅时接近1%, 而在大振幅时是3%。在这一例子中, 横向正应力的影响从实用观点来看小得可以忽略不计。横向剪切和转动惯量对频率的影响随着振动振幅的增大而减弱。同简支固支板或4周固支板相比, 当板4周简支时, 这些影响因素显得更为重要; 在无穷小振幅时, 这些影响因素使频率下降大约11%。对于4周固支板, 这些影响随着振动振幅的增大急骤减弱。在所有情况下, 转动惯量的影响要比横向剪切的影响小得多, 在分析中可以忽略不计。对于非线性弯曲和后屈曲响应的情形, 表2和图3分别给出了横向剪切的影响。

笔者^[70]讨论了初始面内应力对反对称圆柱层合曲板的振幅-频率响应的影响。对于4边简支双层 $\pm 30^\circ$ 角铺层石墨-环氧圆柱曲板, 沿两条直边界嵌固对称的加劲肋, 无量纲曲率

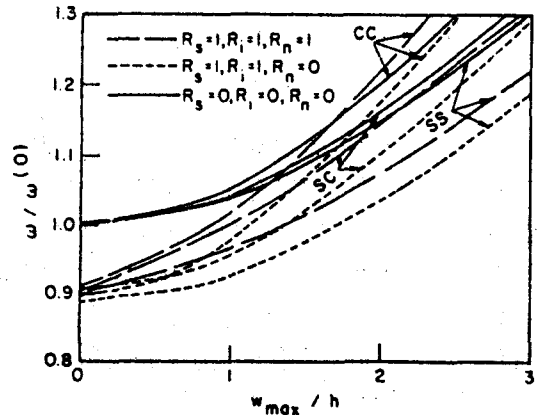


图6 横向剪应力、正应力和转动惯量对不同边界条件下双层 $\pm 45^\circ$ 角铺层石墨-环氧方板($a/h=10$)的非线性基频的影响

为 $b^2/Rh = 10$, R 是曲率半径, 其线性和非线性频率随着平行于两条直边界方向的面内边缘

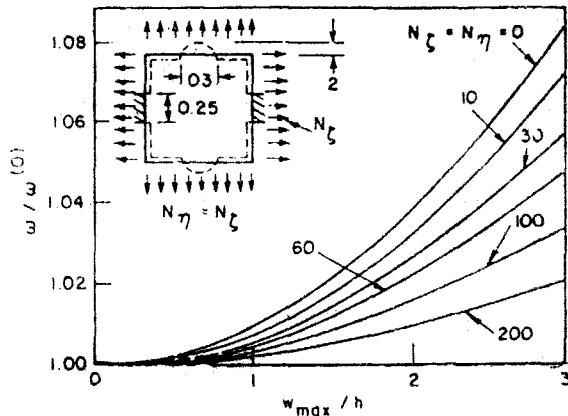


图7 双向均匀拉力对混合边界条件下5层对称正交铺层石墨-环氧方板的非线性基频的影响
 --- 简支边界 对于转动的抛物形变化的约束边界

拉力的增大而增大。图7给出了简支对称正交铺层方板非线性自由振动的类似结果^[215]。图中板的两对边的中间部分固支, 其他两边是对抛物形变化的转动的约束, 其最大无量纲转动刚度为2。 $N_\xi = N_\eta = 0$ 对应于板的边界不受应力。对 $N_\xi = N_\eta = 0, 10, 30, 60, 100, 200$, 线性频率参数 $\omega_0 = \omega^{(0)}b^2 \times (\rho/E_2h^3)^{1/2}$ 分别为 36.01, 38.75, 43.72, 50.26, 57.84, 73.45。因此, 尽管频率比值同上述情形不尽相同, 非线性基频仍是随边缘力的增大而增大。初始应力对复合材料板非线性暂态响应的影响在上节已经讨论过了。

前面已考虑过的初始几何缺陷对复合材料板后屈曲行为的影响由表2给出。笔者^[69,70]还讨论了反对称圆柱层合曲板(平板作为一种特例)的初始几何缺陷对振幅-频率响应的影响, 但是没有给出这一影响在复合材料平板中的数值结果。把单振型解用于 Karman 型动力学方程, Hui^[68]研究了几何缺陷对反对称角铺层和正交铺层板的非线性振动行为的影响。结果发现, 当缺陷幅度仅为板厚的一半左右时, 振动频率可以显著提高, 并且非线性振动行为将从众所周知的硬弹簧行为变成软弹簧型。

根据 Reissner-Mindlin 型剪切变形理论和 Karman 位移假设, Reddy^[62]利用有限元法讨论了中心开矩形孔对矩形层合板的振幅-频率响应的影响。矩形孔两边的尺寸为 c 和 d 。结果发现, 对于简支各向同性和反对称角铺层方板, 线性基频随比值 c/a 的增大而单调增大, 对于均质正交异性板, 其中一边的最小基频值发生在 $c/a = 0.5$ 附近。对于开矩形孔 ($d/c = 2$) 的反对称正交铺层方板, 其频率和/或剪力的影响随比值 c/a 的增大而减小。比较横向剪力的影响, 对固支板比对简支板更显著; 对多振型比对基型更显著; 对比值 $c/a > 0.8$ 比对

表5 矩形开孔简支双层方板的线性频率与非线性频率比值

| c/a | 振型 | 正交铺层 $a/h=1000$ | 角铺层 ($45^\circ/-45^\circ$) | |
|-------|-----|-----------------------------|------------------------------|----------------------------|
| | | | $a/h=10$ | $a/h=1000$ |
| 0.2 | 1,1 | 0.9625(0.2)* 0.8696(0.4) | — | 0.8594(0.2) 0.7423(0.4) |
| | 1,3 | 1.0010 1.0039 | — | 0.9989 0.9978 |
| | 1,1 | 0.573(1.0) | 0.6598(1.0) | 0.5997(1.0) |
| 0.5 | 1,3 | 0.9418 | 1.0023 | 0.9991 |
| | 1,1 | — | — | 0.6794(1.0) |
| 0.6 | 1,3 | — | — | 0.9931 |

* 括号中的数值是指振幅/厚度比。

$c/a < 0.8$ 更显著; 对双层 $\pm 45^\circ$ 角铺层板比对双层正交铺层板更显著。表 5 给出了 3 种尺寸的矩形开孔对反对称层合板非线性频率的影响。

如图 5 和图 7 所显示的混合边界条件, 肯定会影响弹性响应的大小, 但不会影响复合材料板的基本行为。更详细的情况可参看文献 [24, 66, 70]。然而, 这些混合边界条件只限于边界条件对称于复合材料矩形板的中心线的情况。应当指出, 笔者 [87] 还讨论了两邻边简支两邻边固支有缺陷的对称正交铺层圆柱扁壳的非线性振动和后屈曲。

对于简支-固支反对称角铺层方板 [66], 图 8 给出了 Winkler-Pasternak 弹性基础对非线性基频的影响。基础的无量纲拉伸弹簧参数 \bar{k} 和剪切弹簧参数 \bar{G} , 由方程 (16) 确定。表 6 给出了线性频率参数 ω_0 的值。从中可以看出, 板的线性频率和非线性频率都随着基础的拉伸模量和/或剪切模量的提高而增大。不过提高剪切模量使频率增大的速度要比提高拉伸模量时要快。

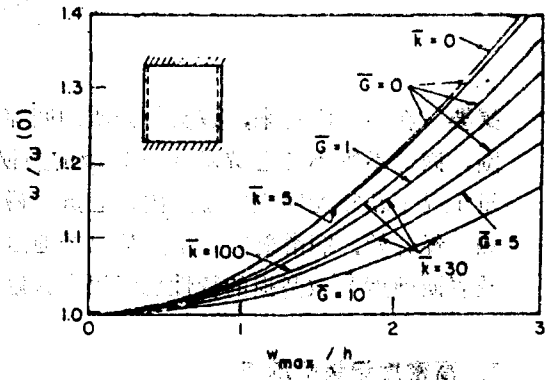


图 8 基础模量对两平行边简支两平行边固支的 4 层 $\pm 45^\circ$ 角铺层玻璃-环氧方板的非线性基频的影响

对于非矩形复合材料板, 在公开文献中可以找到有关层合圆板 [20, 66, 71] 几何非线性行为的一些报告。Srinivasamurthy 和笔者 [71] 研究过总层数、纤维铺设角度和材料性质对层合圆板的非线性弯曲和大振幅振动的影

响。层合圆板的非线性行为通常同矩形层合板的非常相似。除圆板和矩形复合材料板之外的其他形状复合材料板的非线性分析, 在公开文献中并不多见, 不过环形板、椭圆板、斜板、三角形正交异性板的某些非线性结果, 可以分别在以下文献中找到: [114, 124, 125, 127, 133—135, 155, 188, 193, 198, 201, 202, 204, 206], [105, 109, 163, 169, 170, 179, 181, 196], [147, 148, 157, 159—161, 164] 和 [106, 141, 149, 187, 197]。

表 6 两平行边简支两平行边固支的 4 层 $\pm 45^\circ$ 角铺层玻璃-环氧方板的线性基频参数值 $\omega_0 = \omega^{(0)} b^2 / (\rho / E_2 h^3)^{1/2}$

| | | | | | | | |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| \bar{k} | 0 | 5 | 30 | 100 | 30 | 30 | 30 |
| \bar{G} | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 10 |
| ω_0 | 11.352 | 11.571 | 12.605 | 15.129 | 13.455 | 16.424 | 19.509 |

响。层合圆板的非线性行为通常同矩形层合板的非常相似。除圆板和矩形复合材料板之外的其他形状复合材料板的非线性分析, 在公开文献中并不多见, 不过环形板、椭圆板、斜板、三角形正交异性板的某些非线性结果, 可以分别在以下文献中找到: [114, 124, 125, 127, 133—135, 155, 188, 193, 198, 201, 202, 204, 206], [105, 109, 163, 169, 170, 179, 181, 196], [147, 148, 157, 159—161, 164] 和 [106, 141, 149, 187, 197]。

8 结 论

本文对复合材料弹性层合板的几何非线性分析方面的文献作了综述, 总结了这些板的非线性弯曲、后屈曲、大振幅振动、非线性暂态响应和大挠度波传播等的基本行为。也包括了一些使层合板响应复杂化的影响因素。为完整起见, 还列出了有关均质正交异性板非线性弹性行为的参考文献。

参考文献 (215 篇, 略)

杨加明译自: *Appl. Mech. Rev.*, 41, 12 (1988); 439—451, (董务民校)