第21卷　第4期　　力　学　进　展　　Vol. 21　№ 4
1991年11月25日　　ADVANCES IN MECHANICS　　Nov. 25, 1991

不定边界问题的边界元和有限元数学模型*

冯振兴　　李正秀
武汉大学（邮政编码430072）

提要　对于不可压缩有势流动，有两类典型的不定边界或可动边界问题，即定常型不定边界如常水位闸门出流、过水坝或过水闸、水堰绕流及射流等；非定常型的不定边界如装液容器内的流体晃动问题．它们的共同特点是自由面位置与形状事先是的，需在计算过程中调整网格作自由面拟合．且由于自由面条件呈强烈非线性，给不确定数值计算带来困难．本文综述了两类不定边界问题的有限元和边界元模式，简述了笔者的一些计算经验．

关键词　边界元；有限元；不定边界；自由面；非线性

1　引　言

带有不定边界的流动（包括流固耦合振动），由于问题的解域本身不确定，长期以来难以建立精确的计算模型．有限元法的广泛应用，也长期限于各类确定区域上的微分方程离散解．自80年代始，才陆续见到这类非线性问题的有限元迭代求解模式，可惜也为数不多，且难以处理流管狭窄处单元畸变造成数值计算失稳的麻烦．用边界元法（BEM）建立的相应数学模型可望避免上述困难，这方面的工作尚待大力开展．

对于同时考虑结构变形与流场交互作用的流-固耦合问题（带不定边界），由于问题本身及边界条件和耦合效应均呈强非线性，势必造成模式过于复杂，计算工作量（尤其是非线性迭代和时段推进）过大．看来，采用有限元-边界元耦合解法或二者跟摄动法、影响矩阵和传递函数等半解析法相联合的解法前景较好．

本文将综述两类不定边界问题的有限元和边界元数学模型，其中部分涉及笔者本人的工作与计算经验．

2　定常情形的有限元模型

上游水头固定的过水坝或过水闸门出流，流量一定的自由射流，是有代表性的不定边界问题．这类问题可以有一个或多个自由面，其最终位置是唯一确定的，只是事先未知．过去多半按实验和经验在各种手册中给出自由面几何形状，并引进许多修正系数，当然难以做到精确、通用．80年代开始出现各种有限元计算模式和数值结果，且复杂程度也日益提高．较

*　国家自然科学基金资助项目．

好的一种常规有限元迭代模型[1,2]叙述如下.

基本假设　二维不可压缩无粘性无旋（有势）流动，可以有一个或两个自由面（位置待定）．以流函数ϕ做独立变元，边界条件较为合理.

控制微分方程和边界条件

$$\nabla^2\phi=0, \qquad \in V \tag{1}$$

$$\phi=0, \qquad 固壁边界 S_0 上 \tag{2}$$

$$\phi=Q, \qquad 最高水位流线 S_{in} 上 \tag{3}$$

$$\partial\phi/\partial n=0 \qquad 出、入口截面 S_3 上 \tag{4}$$

$$\partial\phi/\partial n=\pm\sqrt{2gz} \qquad 自由面（射流表面）S_f 上 \tag{5}$$

注意，由于自由面位置不确定，故除固壁面外，V和其他各边界都是可变的.

可变区域的变分原理　考虑泛函随ϕ及网格结点坐标z而变（x保持不变），取

$$I(\phi,z)=\iint_{V(\eta)}(\phi_{,i}\phi_{,i})\,dx\,dz+\int_{S_f(\eta)}g\,z^2\,dx \tag{6}$$

式中x为水平坐标，z为铅垂坐标，S为自由面．按可变区域变分原理(计及$\delta\phi$与δz)，知

$$\delta I=-2\iint_V(\nabla^2\phi)\delta\phi\,dx\,dz+2\int_\Gamma\phi_{,n}\delta\phi\,ds$$
$$+\int_\Gamma(2gz)\,\delta z\,dx+2\int_\Gamma\phi_{,n}\,\delta n\,ds \tag{7}$$

有限元解法及存在问题　[2]以上述变分原理为基础作了有限元离散实例计算．计算表明，上、下自由面应采取交替迭代修正的方案，并在结点坐标z作修正时引入适当的因子λ.

这类模式完全适用于一般水力学手册中经典的过水坝面流，闸门出流，自由射流和堰流以至明渠流的计算，[3]应用范围还是较广的．它主要的缺点是收敛速度慢，且在出流截面较窄小的部位需采用局部加密网格，即使如此亦会出现单元形状畸变，特别是自由面曲线产生局部振荡．如果单元畸变导致 Jacobi 行列式小于或等于零，就会造成众所周知的计算失稳．因此需要有一套自动修改网格的有效支撑软件.

3　定常情形的边界元模型

[3]用边界元法作自由射流的不定边界数值解．由于射流截面尺寸小，用有限元计算很容易导致单元畸变，改用边界元法收到明显好处．但该文模式尚较简单，边界条件不够一般化，自由面修正准则不适于其他自由面流动．我们在[4]和[5]中将[1]所述微分方程和边界条件改用边界元（零次和一次）模式，完成了单个自由面及两个自由面交替迭代的实例计算，效果良好.

原则上讲，边界元模式跟固定区域与确定性边界的情形是类似的，以零次元为例，最终离散化方程仍为

$$\phi_i+\sum_j\left(\int_{S_j}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln(1/r)ds\right)\phi_j=\sum_j\left(\int_{S_j}\frac{1}{2\pi}\ln(1/r)ds\right)q_j \tag{8}$$

需要备加小心的是按自由面动力边界条件（5）修正结点纵坐标z时，应按物理背景恰当选

取正负号及引进适当的低松弛因子 λ 值. 计算表明，λ 应在0.1—0.3之间，且最好随 $|\phi_{,n}|$ 值与 $\sqrt{2gz}$ 值的差值大小而变动，才能加速收敛.

这一边界元模式的显著优点是：计算量小，所有边界始终保持分段光滑而不会像有限元模式发生局部畸变，因而数值计算稳定性好. 整套程序可在 IBM-PC 一类微机上实现，并可配以图像显示乃至人机对话干预（如修正 λ 因子），当然是富有前景和值得推广应用的.

4 非定常情形的有限元模型

以装液（油或水）的晃动问题为典型，这时自由面和形状不但事先未知，而且随时间不断变动，其变动幅度也往往远非“小振幅”. 此外，即使容器运动按谐波规律（平动或转动），但晃动液面的变化也不会是同周期. 最后，如果最终关心的是容器本身强度受晃动的影响，就更是典型的流-固耦合问题. 毋庸置言，这时自由面边界条件、自由面大幅度几何形状变动及流-固耦合等均是非线性因素，其计算量和难度也可想而知.

4.1 常规有限元模型[6,7]　[6]和[7]分别提出了计及容器平动（水平加速度 a 呈周期变化）与转动（Ω 呈周期变化）的有限元模式，统一简述如下.

基本方程与边界条件　以势函数 ϕ 为基本变元，微分方程仍为

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{9}$$

在固连于容器的相对坐标系 OXY 中，令

$$u = \partial\phi/\partial x - \Omega y, \qquad v = \partial\phi/\partial x + \Omega x \tag{10}$$

固壁面 S 上，

$$\partial\phi/\partial n + \Omega(xn_y - yn_x) = 0 \tag{11}$$

式中 n 代表壁面单位法向.

自由面运动学边界条件

$$\partial\phi/\partial n + \Omega\{xn_y - (\eta+e)n_x\} = n_y(\partial\eta/\partial t) \tag{12}$$

式中 $\eta=\eta(x,y)$ 代表自由面几何形状，应视为跟 ϕ 一样的未知元. e 为容器旋转中心至原始自由面距离.

实践表明，对大幅度非线性晃动问题，自由面动力学条件至关重要，应采用较完善的 Bernoulli 积分：

$$\begin{aligned}(\partial\phi/\partial t) + 0.5\{\phi_{,n}^{*2} + \phi_{,s}^{2}\} + \Omega\{x\phi^{*}_{,y} - (\eta+e)\phi^{*}_{,x}\} \\ + a_{xx} + g(\eta\cos\theta - x\sin\theta) = 0\end{aligned} \tag{13}$$

其中 θ 为容器转过的角度.

拟变分原理　在某一瞬时，令方程（9）和（11）—(13）的相应极小化泛函 I 为 $I=I_1+\Omega I_2$，其中

$$\begin{aligned}I_1 = 0.5\iint_{V(\eta)}\{(\partial\phi/\partial x)^2 + (\partial\phi/\partial y)^2\}\,dx\,dy \\ + 0.5g\cos\theta\int_{-b}^{b}\eta^2\,dx - g\sin\theta\int_{-b}^{b}x\,\eta\,dx + \int_{-b}^{b}a_x x^2\,dx \\ + \int_{-b}^{b}(\partial\phi/\partial t)\eta\,dx - \int_{-b}^{b}(\partial\eta/\partial t)\phi\,dx\end{aligned} \tag{14}$$

式中 $\pm b$ 代表箱体沿 x 方向宽度，与 Ω 相关的泛函为

$$I_2=\int_b^{\iota}\{x(\partial\phi/\partial y)-(\eta+e)\partial\phi/\partial x\}\eta\,dx$$

$$+\int_{S_f}\{xn_y-(\eta+e)n_x\}\phi\,ds+\int_{S_0}(x\,n_y-y\,n_x)\phi\,ds \tag{15}$$

有限元离散化及存在问题　原则上总可以从变分原理出发得出适合计算机求解的离散化方程．[5]采用三角形一次元，并以任一时段的 $\{\Delta\phi\}$ 与 $\{\Delta\eta\}$ 作基本变元，每一瞬时归结为一组线代数方程

$$\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\phi\\ \Delta\eta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}R_1\\ R_2\end{Bmatrix} \tag{16}$$

不言而喻，矩阵[K]的计算涉及泛函 I_1 和 I_2 中的许多项，右端"力矢量"$\{R\}$同样需每一时段对边界附近各单元完成一系列数值积分．

实算表明，常规有限元模型的缺点是：①每一时段需重分网格．显然需要建立一套自动网格剖分程序，编制难度也增大．②同样容易出现单元形状畸变，导致求解过程不稳定．③由 ϕ 的分布推算出容器所受压力载荷时精度较差，特别是 ϕ 的导数计算误差影响较大，不利用容器变形的反馈计算或流-固耦合计算．

4.2 Lagrange 型有限元模型[8]　为了精确跟踪自由面和流固交界面，不少学者推荐采用以介质坐标描述的 Lagrange 模式乃至联合运用空间 Euler 法与介质 Lagrange 法（简称 ALE)．

[7]给出了晃动问题的Lagrange型有限元模型，它的显著优点是流动边界（包括自由面）始终与单元边界一起运动，且所用速度修正法则使计算格式比常规的 Euler 法有限元来得简单．

Lagrange 法的流动基本方程为 Navier-Stokes 方程（计及粘性项）

$$\rho(Dv_i/Dt)-\sigma_{ij,j}+\rho f_i=0 \qquad \in V \tag{17}$$

连续方程

$$v_{i,i}=0 \qquad \in V \tag{18}$$

其中 σ_{ij} 为应力张量，f_i 为惯性力，例如容器有 a_x 时，$f_i=\{a_x g\}^T$．

介质导数 Dv_i/Dt 采用时间差分逼近，结点坐标 x 也用中心差分格式，因此有限元求解的主要变元是速度分量v_i．压力和速度同时作有限元插值，并由加权余量法得到有限元离散化方程，限于篇幅，不予赘述．这种模式的优点是易于跟踪自由面，并可计及流体粘性，且 Lagrange 法的压力计算式也较简单，有利于作容器变形反馈计算．

5　非定常情形的边界元模型[9,10]

由上不难想象，对非定常晃动问题，采用有限元模式计算量和网格自动形式工作量都很大，且晃动问题的周期比一般振动及波浪都长得多，精度要求又限制了时段步长不可太大，整个 CPU 时间就更为可观．

鉴于定常情形的边界元模式，对非定常情形理当可以按时段建立相应边界元模式．所不同的是前者用结点坐标逐步修正迭代拟合自由面，而后者必需直接以自由面位置（η 或$\Delta\eta$）作自变元与速度场（ϕ或$\Delta\phi$）联立求解，再按时段推进．其次即是自由面动力学条件（13）需作严格处理．下面简介[9]及笔者[10]所用边界元模式．

基本方程与边界条件 仍用有限元模型的控制微分方程组（9）—（13），所不同的是用基本解作加权余量表述得出的边界积分方程与（8）略有不同．首先，在自由面边界上由方程（12）知

$$q=\partial\phi/\partial n=n_y(\partial\eta/\partial t)-\Omega\{x\,n_y-(\eta+e)n_x\}$$

因此若采用一次单元（双结点直线元），相应于（8）的积分方程应为

$$\theta_{in}\phi_i+\oint_S\phi\cdot\{\partial/\partial n[\ln(1/r)]\}ds-\oint_{S_1}\{n_y(\partial\eta/\partial t)$$

$$-\Omega[x\,n_y-(\eta+e)n_x]\}\ln(1/r)ds-\int_{S_0}\Omega(y\,n_x-x\,n_y)\ln(1/r)ds=0 \qquad (19)$$

式中 θ_{in} 表示结点 i 处边界张成的内角．其次，自由面 S_1 上的动力学条件也应作离散化处理．[9]建议不用简单的按点配置法而仍应采用加权余量模式．[10]中实际上仍采用Galerkin（加权余量）法建立积分型方程，即

$$\sum_e\int_{S_1^e}[N_1N_2]\{\partial\phi/\partial t+0.5\{n_y^2(\partial\eta/\partial t)^2-2n_y\Omega[x\,n_y$$

$$-(\eta+e)n_x](\partial\eta/\partial t)+\Omega^2[x\,n_y-(\eta+e)n_x]^2+\phi_s^2\}$$

$$+(\eta\cos\theta-x\sin\theta)g+a_xx\}ds=0 \qquad (20)$$

还可以将{ }中的项定义为误差修正项，记作 $\partial R/\partial t$，并要求每一时段算出的修正项 R 隐含趋于零．

离散化及其特点 方程（19）和（20）是对任一边界结点 i 都适用的，因而离散化之后共可得到 $2N$ 个方程．而 ϕ 与 η 作为基本变元时，引进时间差分后便归结为 N 个结点处任一时段内的 $\{\Delta\phi\}$ 与 $\{\Delta\eta\}$ 作为 $2N$ 个待解变元，从而方程组适定．

不言而喻，由方程（19），（20）建立的矩阵方程组相当冗长复杂，尤其（20）涉及14个积分表达式．限于篇幅，这里不予列出，有兴趣的读者可参考[10]中的详细推导．

至此自然会产生一个疑问：如此冗长的表达式，程序实施上比有限元究竟优越性何在？所幸的是，现已得出了形成矩阵方程组所涉及的全部积分的解析表达式，这就避免了大量数值积分运算，程序当然也可“一劳永逸”，运算时间显著减少．此外，由于已由方程直接求解，每一时段的自由面位置变化量不必像定常问题那样作反复迭代，CPU 时间主要花费在时段推进上．这些都无疑使边界元模式具有更好的应用前景．

顺便指出，前已讲到晃动问题本应作为流固耦合问题处理即同时计及结构变形．我们在[10]中采用按时段由 ϕ 值得出压力分布，再作结构瞬时动响应反馈计算的方案，由于晃动频率相比结构振频要低得多，故这种半解耦法是合适的．更重要的是，可将流体晃动和结构响应作并行计算，使动力问题的有限元并行算法推广到非定常流固耦合问题，这是今后要做的工作．

6 结 论

定常型自由面不定边界采用边界元法结点修正迭代效能较高，且不致发生单元畸变，但收敛性控制仍需注意．非定常型自由面位置应作为基本变元计入方程，与流场同时求解．利用解析积分式可缩短整个 CPU 时间．计及结构变形时，可采用瞬时解耦计算模型，也可建

立统一的以流场速度势，自由面高度及结构位移作独立变量的耦合方程组，但应结合并行算法或微机联网方可望提高计算效能。

参　考　文　献

1 Bettess P, Bettess J A. *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, **19** (1983): 1675—1689
2 Delgado M C, Cellik I. *Computer & Fluids*, **14**, 2 (1986) 159—169
3 Caslellanno L. *Appl. Math. Modelling*, **10**, 2 (1986): 93—100
4 Feng Zhen-xing (冯振兴), Li Zhen-xiu (李正秀). An iterative boundary element scheme for moving free surface flow. 数值计算及计算机应用 (1988): 226—231
5 An algorithm of iterative B. E. M. scheme for free flow with multiple free surfaces. 10 th Int. Conf. in B. E. M., Southampton, U. K. (1988)
6 Nakayama T, Washizu K. *Int. J. for Numer. Methods in Eng.*, **15**, 7 (1980): 1207—1220
7 Katsunobu K, et al. Nonlinear coupled vibration of liquid and walls in deformable rectangular container. ICVPE (1986): 472—480
8 Ramaswamy B, Kawahara M, Nakayama T. *Int. J. for Mumer. Meth. in Fluids*, **6** (1986): 659—665
9 Nakayama T. Washizu K. *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, **17** (1981): 1631—1646
10 Feng Zhen-xing, Li Zhen-xiu, Ye Bi-quan, Shen Chern-wu. Unsteady moving boundary flow by BEM and its interaction with structure. Proc. of 3rd Japan-China Symp. on BEM (1990): 247—256

MATHEMATICAL MODELS FOR PROBLEMS WITH MOVING BOUNDARIES

Feng Zhen-xing　　Li Zheng-xiu

Wuhan University

Abstract For incompressible flows, there are two kinds of moving boundary problems, i.e. the steady case, such as the over-gate flow with constant elevation, spillway, wiers and jet flows; the unsteady case, such as the liquid sloshing in a container. The principal difficulty of these problems lies in the undetermined free surfaces, where an iterative scheme has to be used together with the correction of the network in computation. In particular, the computational effort will be considerable because of the strong nonlinearities of the free surface conditions. In this paper, the finite element and boundary element methods for two kinds of moving doundary problems are presented together with some computational experience of the authors.

Keywords *boundary elements; finite elemnets; moving boundary; free surfaces; nonlinearity*