

波涡相互作用研究的某些进展 (I)

吴 介 之

中国航空研究院, 北京 (邮政编码100012)

提要 波涡相互作用是当代非定常非线性流体力学的一个重要领域。本文评述了迄今人们对微扰纵波(声波, 不包括激波)和横波(涡波)与层状和轴状涡相互作用的研究进展, 包括涡声理论、锐缘及光滑表面涡层分离以及自由涡层的2维感受性和非定常 Kutta 条件, 波产生时均涡流的非线性 Euler 整流和广义 Lagrange 整流, 波涡共振等课题的进展。还介绍了用非定常激发实施涡控制这一重要应用领域的一些新进展。

关键词 涡旋运动; 声学; 波涡相互作用; 非定常流

1 引言

波和涡是当代流体力学的两大重要课题。它们不是截然分开的: 波中可以有涡, 涡中也可以有波; 波与涡之间又存在非常有趣的非定常非线性相互作用。这使波和涡有可能互相调控, 因而有很多重要应用。例如噪声抑制, 边界层转捩控制, 流体分离控制等等。一个特别重要的可能应用是人们正在探索的非定常脱体涡航空流型。航空流型的发展, 从第一代附着流型, 到第二代定常脱体涡流型, 始终是靠翼面在空气中运动形成的定常涡(边界层中的层状涡或自由涡卷成的轴状涡)提供升力, 但还没有充分挖掘涡升力的潜力。近年来, 某些动物飞行中特高升力的发现, 动态失速下瞬时超升力的观察, 气动声学的发展和非定常剪切流控制的研究等, 都从不同的角度启示人们, 航空流型的下一代发展很可能是利用非定常效应增强升力的脱体涡流型(吴介之 1984; Stone & McKinzie 1984; 吴健民 1985)。特别是在基本流动定常的条件下, 小振幅的弱非定常激发很可能通过波与涡的共振及其整流(streaming)而造成过失速迎角下的持续高升力(Wu, et al 1987)。有关基础研究和应用基础研究正在国内外竞相开展, 并已取得了一些引人注意的初步成果。在美籍华裔学者吴健民倡议下, 中国空气动力学研究会于1987年12月召开了首次非定常效应与涡控制研讨会, 会上的发言充分表明国内的有关研究正在迅速逼近世界前沿(参见“国际航空”杂志1988年3月号的报道)。

流体中的波是非定常扰动的产物。一个流体元在外界扰动下有两种基本的反应: 对法向力的反应是压缩与膨胀, 对切向力的反应是通过粘性搓出涡量, 相应地, 非定常法向扰动产

生纵波，即熟知的声波和激波；而非定常切向扰动则通过粘性产生横波，这实际上是涡量波，有时称涡波。剪切层稳定性问题中的 Tollmien-Schlichting 波和 Kelvin 波都是涡波。声波与涡波的传播速度和影响范围很不相同。另一方面，涡的物理概念虽然很清晰，但还缺乏一个公认的定义。Saffman 与 Backer (1979) 把涡定义为以固定或无旋流为边界的有旋流区，这个定义严格说来只适用于理想流体。Lugt (1983) 把涡定义为绕公共中心旋转的流动，这个定义更不可取，因为它不具有伽利略不变性，而是把涡诱导的某些无旋流（如点涡周围的流动）也算作了涡。笔者认为，把涡定义为涡量高度集聚的流动区域较为妥当¹⁾。这是一个在任意平移变换下不变的定义，与 Saffman 的定义相容，Batchelor (1964) 曾这样定义集中涡旋的涡核。根据这个定义或者 Saffman 的定义，涡可分为层状涡（边界层或自由剪切层）和轴状涡，后者又可依其涡核长度与直径之比分为盘状涡（如台风）和柱状涡（如龙卷）。

一般地讲，波涡相互作用覆盖了相当广泛的领域，甚至包括激波-边界层干扰，即具有同量级强度的波与涡相遇，情形变得很复杂。本文主要限于 $M \ll 1$ 的低速涡流与微扰波相互作用，而且不考虑大气过程，这时的波涡相互作用，主要是声波与层状或柱状涡的相互作用（简称声涡相互作用），以及涡波与这两种主涡的相互作用（简称涡涡相互作用）。

Lighthill (1978 a) 在谈到声波与流体运动的相互作用时指出，这一领域有 3 类问题：①流体运动发声的理论，其中流动起主导作用，声为副产品；②声在流动中的传播性质，其中流动与声同量级地相互作用；③声学整流，其中声起主导作用，流动只是副产品。他还指出，问题①与③颇有对称性，例如不仅射流会发声，声也会产生射流（又见 Lighthill 1978 b）。现在，我们一方面把声波扩展到包括涡波，另一方面把流体运动限定为层状或柱状涡运动。Lighthill 的上述划分基本上同样适用。可以说，不仅涡会发生波，而且波也会产生涡。前者包含涡能向波能的转化，后者是波能向涡能的转化——这是一种分散能量自动集聚的转化，因而是非常有用的转化。本述评的内容主要对应于 Lighthill 所说的问题①和③。

2 涡 声

在波涡相互作用领域中声涡相互作用的理论和实验发展得较早，也有些较成熟的结果。本节概述涡发射和吸收声波的理论进展。更广泛的有关述评见 Müller 与 Obermeier (1987)。

2.1 作为声波源与汇的涡 气动声学的现代理论是 Lighthill 在 1952 年开创的。他把连续性方程和动量方程重新组合成关于密度 ρ 的波动方程

$$\square^2 \rho = \partial^2 T_{ij} / \partial x_i \partial x_j \quad (2.1)$$

式中 $\square^2 \equiv \partial^2 / \partial t^2 - c^2 \nabla^2$ 是波动算子， c 为声速，

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + p_{ij} - c^2 \rho \delta_{ij} \quad (2.2)$$

称为 Lighthill 张量，这里 p_{ij} 是压缩应力张量。(2.1) 实际上是把 Navier-Stokes 方程中的一些项集中到左边构成波动，其余的项放到右边作为波源，它在假想的静止流体中产生声波。这是对古典声学理论的推广，故称为声学比拟理论。它在解释气动噪声产生机理等方面起了巨大的作用（详见 Goldstein 1976）。

1) 笔者在 1987 年 9 月同 Saffman 教授讨论过涡的定义，他同意笔者的观点。

(2.1) 是非线性方程。在复杂流动中, 流场的非均匀性会导致声场分布和传播性质的显著变化以及绕射和散射, 使方程的左边和右边密切相关, 无法把右边的 $T_{,i}$ 当作已知。因此, 人们一直在从不同角度推广和发展 Lighthill 理论 (参见 Williams 1969)。至少对本文来说, 最能突出声源 (或汇) 的物理实质的理论发展是 Howe 的广义声学比拟理论。对于无粘、有传热的可压缩流, Howe (1975) 导出了关于总焓

$$B(\mathbf{x}, t) = q + \frac{1}{2} u^2$$

的声波方程 (q 为热量)

$$\tilde{\square}^2 B = \left(\nabla - \frac{\mathbf{a}}{c^2} \right) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} - T \nabla S) + \frac{D}{Dt} \left(\frac{T}{c^2} \frac{DS}{Dt} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c_p} \frac{DS}{Dt} \right) \quad (2.3a)$$

式中

$$\tilde{\square}^2 \equiv \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{c^2} \frac{D}{Dt} \right) + \frac{1}{c^2} \mathbf{a} \cdot \nabla - \nabla^2 \quad (2.3b)$$

是包含声速变化及对流效应的波动算子, $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$ 是加速度。(2.3a) 清晰地表明声源只集中在有旋和非等熵区。特别在 $M \ll 1$ 时, 可以为流动等熵, 并略去 \mathbf{a}/c^2 , 于是有

$$\left\{ \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{c^2} \frac{D}{Dt} \right) - \nabla^2 \right\} B = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \quad (2.4)$$

这时涡量场成了唯一的声源 (或汇)。在这个意义上, Müller 与 Obermeier (1987) 指出: 不仅像 Küchemann (1965) 所说的, 涡是流动运动的肌腱, 而且可以说, 涡是流动的声音。在声速恒定的假设下, (2.4) 具有线性近似

$$c^{-2} \square^2 B = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \quad (2.5a)$$

这时总焓 B 也可换成压强 p , 而得 (又见 Powell 1964)

$$c^{-2} \square^2 p = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \quad (2.5b)$$

这个方程可用 Green 函数方法求解:

$$p(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t') Q(\mathbf{y}, t') d^3 y dt' \quad (2.6)$$

其中 G 是 Green 函数, $Q = \rho_0 \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$, ρ_0 是平均密度。对于无粘流, 涡层变成无限薄涡片, 柱状涡变成无限细涡丝, $\boldsymbol{\omega}$ 将成为 δ 函数, 而速度场在涡片或涡丝所在地发散。为克服这个困难, Möhring (1977) 进一步指出, 若 Green 函数 G 是调和函数, 即存在矢量 $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t')$ 使得 $\nabla G = \nabla \times \mathbf{G}$, 则可把 (2.6) 进一步化为

$$p = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t') \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}, t') d^3 y dt' \quad (2.7)$$

这样, 流场中的声只产生于涡量随时间变化的区域; 无需计算涡量场诱导的速度场, 从涡量的非定常变化即可直接算出离场 (Müller 与 Obermeier 1987)。例如, 若有 n 块涡斑, 各自体积为 V_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 则记 $t_i' = t - t' - x_i/c$, $\mathbf{e} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, Möhring (1977) 得出

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \sum_i \left[-\frac{\mathbf{e}}{c} \cdot \frac{d^2 \mathbf{P}_i(t_i')}{dt^2} + \frac{\mathbf{e}}{c} \cdot \frac{d^2 \mathbf{Q}_i(t_i')}{dt^2} \cdot \frac{\mathbf{e}}{c} - \frac{1}{3} \frac{d^2 K_i(t_i')}{dt^2} \right] \quad (2.8a)$$

式中第 i 个涡的动量 \mathbf{P}_i , 2 秩张量 \mathbf{Q}_i 和能量 K_i 分别为

$$\mathbf{P}_i = \frac{1}{2} \rho_0 \int_{V_i} \mathbf{y}_i \times \boldsymbol{\omega} d^3 y_i \quad (2.8b)$$

$$\mathbf{Q}_i = \frac{1}{3} \rho_0 \frac{d}{dt} \int_{V_i} \mathbf{y}_i (\mathbf{y}_i \times \boldsymbol{\omega}) d^3 y_i \quad (2.8c)$$

$$K_i = \rho_0 \int_{V_i} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{y}_i \times \boldsymbol{\omega}) d^3 y_i \quad (2.8d)$$

因此作为声源，每个涡贡献 1 个与动量相关的偶极源，1 个 4 极源和 1 个与能量相关的球对称源。当 $n=1$ 时，由于 \mathbf{P} 与 K 恒定，只剩下 4 极源。Kambe (1986) 对此作过进一步研究。

涡作为声场的源与汇的效应，也表现在声能与涡能的转化上。设涡量场诱导的主流速度场为 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ，伴随声场的无旋速度场¹⁾为 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \phi$ ，流场的总速度为 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 。则声场传给 \mathbf{v} 场的能量率（亦即声能的衰减率）为

$$\Pi_T = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} v^2 dV$$

Howe (1980) 证明，它可写成

$$\Pi_T = \rho_0 \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} dV \quad (2.9)$$

此即声能与涡能转化率的公式。类似于 Joukowski 升力公式，可以把 $\rho_0 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ 理解为不可压涡升力。于是 Π_T 就是这个涡升力在声场 \mathbf{u} 影响下所作的功率。

2.2 Liepmann 公式和前后缘的耦合效应 声涡相互作用的一类典型问题，是声波射到薄涡层（边界层或尾涡层）上，引起它们的振荡，并反过来发声（或吸声）。Liepmann 早在 1954 年就提出，这时涡层的非定常位移速度起声源的作用。这一点也可由 (2.7) 看出。根据 Liepmann 的这个概念，Howe (1981) 利用 (2.5a) 证明，若 Σ 是涡层外缘光滑闭曲面，在 Σ 外 $\boldsymbol{\omega} = 0$ ，则

$$B(\mathbf{x}, t) = - \int \nabla_i G \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) d^3 y dt' + \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\Sigma} G \theta d\Sigma dt' \quad (2.10)$$

其中 $\theta = \mathbf{u}_n$ 是涡层的法向位移速度。在涡层厚度 δ 远小于其曲率半径时，或在平板情况下 $M \ll 1$ 时，有

$$B(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\Sigma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t') \theta(\mathbf{y}, t') d\Sigma dt' \quad (2.11)$$

这正是 Liepmann 概念的体现，称为 Liepmann 公式。

如果是边界层，可取 Σ 为物面 S ，在 S 上 $\theta = 0$ 。(2.10) 化为

$$B(\mathbf{x}, t) = - \int \nabla_i G \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) d^3 y dt'$$

与 (2.11) 相比，可发现就声学效应而言，有

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \int_0^{\infty} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} dy' \quad (2.12)$$

1) 无论马赫数多小，这个速度场总与压缩性相关，称为“声学质点速度”。

此式把边界层位移速度的非定常效应与层内的涡动力学联系起来。

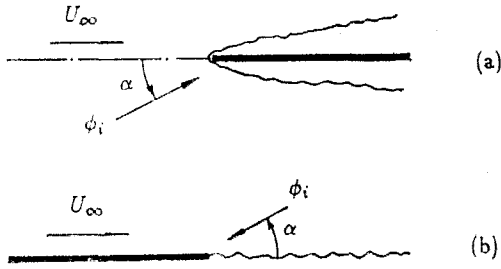


图1 前后缘在声涡相互作用中的作用

特别注意到在前后缘处要用 Kutta 条件来消除 θ 的奇异性, Howe (1981) 得到了下述相当简单的结果:

①前缘. 在对一个周期 $2\pi/\omega$ 取平均后, 声能的收益为

$$\Pi = -\Pi_T = 2\rho_0 |k_0| |\phi_0|^2 \sin^2(\alpha/2) \operatorname{Re}(\omega/\kappa) \geq 0 \quad (2.13)$$

这里已用一个振荡面涡代替边界层, κ 为它的行波波数, Re 表示取实部, κ 与 ω 有确定的色散关系. (2.13) 表明前缘总发射声波. 这是因为入射声波扰动了一个原已存在的边界层涡量分布, 这种扰动在前缘最大; 据 Kutta 条件, 它必须靠产生与 $|\phi_0|$ 成正比的 Tollmien-Schlichting 波来补偿. 这已由 Shapiro (1977) 的实验所证实. 由 (2.13) 可得所谓“发射截面”

$$\sigma_+ = \frac{\text{边缘产生的声功率}}{\text{入射声功率}} = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} / |\operatorname{Re} \kappa| \quad (2.14)$$

因此当 ϕ_i 从下游 ($\alpha = \pm\pi$) 入射时 σ_+ 最大.

②后缘. 顺流 2 维平板在定常主流 U_∞ 中本来没有尾涡, 因此不存在将入射波与 TS 波耦合起来的机理; 尾涡全是非定常声场通过 Kutta 条件激发出来的. 这些尾涡以 U_∞ 向下游运动, 波数 $\kappa_0 = \omega/U_\infty$ 是实量. 这时声能增益为

$$\Pi = -2\rho_0 U_\infty |\kappa_0| |\phi_0|^2 \sin^2(\alpha/2) \leq 0 \quad (2.15)$$

即总有衰减. 相应的“吸收截面”为

$$\sigma_- = \frac{\text{边缘吸收的声功率}}{\text{入射声功率}} = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} / |\kappa_0| \quad (2.16)$$

当 ϕ_i 从上游 ($\alpha = \pm\pi$) 入射时 σ_- 最大. 后缘总是吸声的原因在于, 声波激发的尾涡随对流传下行, 在线性近似下不再反馈回来参与同声波的相互作用.

波与涡在前后缘耦合的微观机理及非定常流中 Kutta 条件的含义, 将在 3.1 节中介绍.

从锐缘拖出的自由涡层能吸收声波而导致自身振荡的强化, 这是一个广泛证实了的现象. Bechert (1980) 曾用喷管射流作了实验, 令 R 为喷管半径, κ 为声波数, 他发现在 $M = 0.3$, $\kappa R = 0.1$ 时, 射流边缘的剪切层可以从激发的声场中吸收巨大的能量, 以致在辐射远场中只测到喷口发出的声功率的 1%. 这些能量导致剪切层的大尺度脉动. Bechert (1982) 用另一种无粘线化不可压 2 维模型作了相应的理论分析. 他考虑了 2 维隔板分开的两股流动在后缘汇合成一个面涡后对声波的响应. 若上股速度为 U_∞ , 下股为零, 后缘上游

l 处板上下压力差为 Δp_{12} , ω 为声波频率, 则声波使下股获得一个速度

$$|u_2| = \frac{|\Delta p_{12}|}{\rho(U_\infty \omega l)^{1/2}} \frac{\pi^{1/2}}{2^{3/4}} \exp\left(\frac{\omega x}{U_\infty}\right) \quad (2.17)$$

$\omega x/U_\infty \sim 1$ 时此式与 Bechert (1982) 的实验很符合。超出这个线性理论的有效范围后, 波状面涡卷成离散的轴状涡。Bechert 还分析了声源方位的效应, 获得了与 Howe (1981) 理论相同的结果。

3 感受性与非定常 Kutta 条件

3.1 一般说明 从上节的分析深入一步, 自然要问: 为什么波(包括声波)与涡会发生相互作用? 它们的能量转化方向为什么对边界条件(如锐缘)如此敏感? 这种转化的机理是什么? 笔者认为, 波与涡之所以能相互作用, 是因为涡中本来就有波, 或者有形成波的条件。这种涡中之波主要是高 Reynolds 数下的不稳定波(一个涡只在高 Reynolds 数下才能较长久地存在)。换言之, 波涡相互作用的核心是涡流中不稳定波的受迫激发和入射波与不稳定波之间的耦合。这就是所谓感受性(receptivity)问题, 这个词是 Morkovin(1969)最早引用来研究层流-湍流转捩机理的。Reshotko (1984) 把它定义为“一种特定的受迫扰动进入边界层的手段及其信号在扰动流中的性质”。感受性和稳定性是不同的概念。稳定性是扰动波的自发演化性质, 而感受性是强迫扰动在流场中的信号; 从数学上看, 稳定性问题是齐次方程在齐次边界条件下的本征值问题, 不稳定波是本征波, 其振幅不是唯一确定的, 而感受性问题的方程和/或边界条件是非齐次的, 受激不稳定波的振幅要由入射波幅决定。

某些感受性问题同固壁上的非定常 Kutta 条件密切相关。与 Kutta 条件最早的概念不同, 现在在层状涡离开物面的各种流动(包括后缘流和光滑表面分离流)中去掉无粘解奇异性的要求都称为 Kutta 条件。在非定常流中这个要求很难用实验检验, 也无法用经典的边界层理论来分析, 因为这个理论在分离点有奇异性。只是在 3 层理论(如见吴介之 1985)出现后, 才有了鉴别各种非定常 Kutta 条件的依据。人们发现, 在匹配渐近展开分析中, 往往只有那些满足 Kutta 条件(即具有最小奇异性)的“外部”势流才能与边界条件允许的多层“内部”粘性结构相容。因此非定常 Kutta 条件不仅在总体上被用来确定翼型的非定常升力, 而且在涉及固壁的波涡相互作用的局部分析中决定着给定振幅的入射波所激发的不稳定涡量波的初始振幅, 从而成了这类感受性问题解的判据, 成了入射波与受激涡量波耦合的关键。对此, Crighton (1985) 作了专门的述评。

3.2 典型问题 目前, 对于前缘、后缘和光滑表面分离点邻域这 3 类典型区域的感受性, 以及后缘和光滑表面分离点的非定常 Kutta 条件, 已有了较深入的 2 维分析; 最近又出现了自由剪切层感受性的 2 维分析。下面扼要概述有关的思路和结果。

3.2.1 平板前缘的感受性 2.2 节提到, 前缘声涡相互作用的趋势是边界层吸收声能, 它所引起的边界层振荡激发靠形成 TS 波来补偿。但自由 TS 波是齐次 Orr-Sommerfeld 方程的本征解, 任意振幅的 TS 波加到受迫振荡的边值问题解上并不破坏边界条件, 因此 TS 波的振幅不能直接由受迫振荡的边值问题决定。Goldstein (1983) 指出, 为决定 TS 波幅, 需在其上游加一个使其与来流扰动波耦合的边界条件。由于紧邻前缘处的方程不是 OS 方程而是非定常边界层方程, 它在强制波下的解正提供了 TS 波的上游条件。经过颇为复杂的摄动处理, Goldstein 得到了图 2 所示的细致分区结构。由图可见, 在平板前端由 NS 方程支配的区

域之后有个振荡边界层区，其底部为任何振荡近壁流中都存在的 Stokes 涡波层（见4.1节），

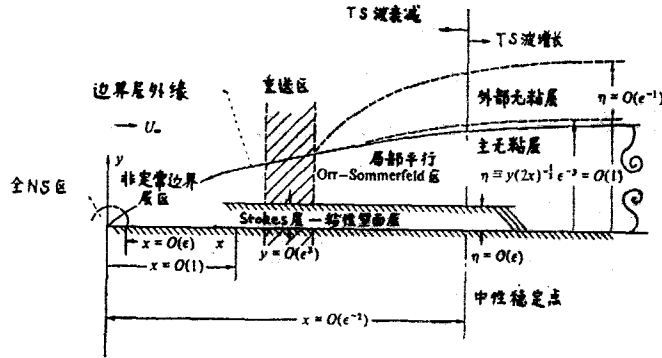


图2 前缘感受性问题的渐近结构。 $\epsilon = (\nu\omega/U_\infty^2)^{1/3}$, $\nu = y\epsilon^{-2}(2x)^{-1/2}$ 。据Goldstein (1983)

边界层区与局部平行 OS 区在重叠层匹配。OS区本身又有与3层理论相符的3个层：粘性壁面层，包括临界层；主无粘层，其中流动近于平行且是准定常的；外部无粘层。那里非定常性和沿 x_1 的变化都很显著。物理上看，来流的强制波先与 Stokes 涡波相耦合，后者再与 TS 波耦合。耦合的中介是 Stokes 层。这个图清楚地揭示出波涡相互作用是靠入射波与涡中之波的耦合来实现的。Goldstein 模型的基本性质，已在层流边界层对声激发的感受性实验中得到证实 (Crighton 1985)。

3.2.2 平板后缘的感受性与 Kutta 条件 非定常后缘问题有各种不同的类型。首先，对于 Howe (1981) 和 Bechert (1982) 研究的这类入射波对隔板尾流面涡的激振 (2.2节) 问题，大量分析表明 (Orszag & Crow 1970; Crighton & Leppington 1974; Rienstra 1981)，存在这样的无粘尾流解，它在后缘下游远处有界，但在后缘处有 $-1/2$ 次方奇异性。另一方面，任意振幅的自由不稳定波在后缘处恰好也有 $-1/2$ 次方的奇异性。因此，可以用一适当常数乘不稳定波解，加到上述在远处有界的解上来消除奇异性。这正是 Kutta 条件所要求的。Tam (1971) 称此常数为耦合常数。Daniels (1977) 作了进一步的粘性分析，证实当 Reynolds 数 R 足够大时 Kutta 条件确实成立，Bechert 与 Pfizenmaier (1975) 的精细实验也证实了这一点。

另一类后缘感受性问题是用作简谐振荡的后缘代替入射波。设板长为 l ，在沿来流的坐标系中平板作俯仰振荡

$$y = -2\dot{\alpha}x e^{i\omega t}, \quad -l/2 \leq x \leq l/2, \quad \alpha \ll 1$$

转动轴在中点并取为坐标原点。对于 $St = \omega l/U_\infty \gg 1$ 的情形，在 $1/2 - x/l \ll 1$ 的近后缘处，非定常无粘薄翼理论给出

$$\frac{p - p_\infty}{\rho U_\infty^2} \approx \frac{1}{2} \alpha St^2 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right)^{1/2} + C \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right)^{-1/2} \right\} e^{i\omega t} \quad (3.1)$$

C 为待定复常数。显然，避免后缘奇异性的 Kutta 条件要求 $C = 0$ ，问题是在粘性分析中能否证实这个要求。为此 Brown 与 Daniels (1975) 以无粘解为外解构造了多层匹配渐近展开的粘性内解，分区结构见图3：I 为势流；II₁ 为受扰动 Blasius 边界层；II₂ 为 Stokes 层；

III₁, III₂ 为前层; IV₁, IV₂, IV₃ 为后缘 3 层结构的上、主、下层; V 为经非定常修正的 Goldstein 尾流 (见吴介之 1985)。

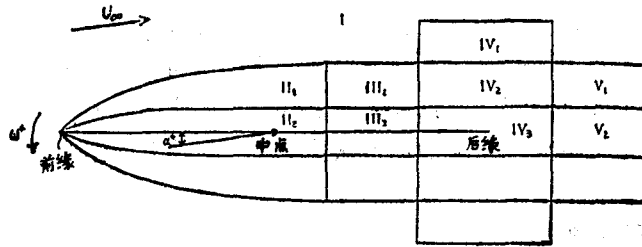


图 3 振荡后缘感受性问题的渐近结构. 据 Brown & Daniels (1975)

这个问题的感受性特征是上游 Stokes 层应与后缘 3 层中粘性下层的厚度相匹配。令

$$\varepsilon = R^{-1/3} = (U_\infty l / \nu)^{-1/3} \ll 1$$

是 3 层理论的基本小参数, Brown 与 Daniels 证明, 当

$$St = O(\varepsilon^{-2}), \alpha = O(\varepsilon^{3/2})$$

时, (3.1) 中的常数 C 为

$$C = -\frac{1-i}{4\sqrt{\lambda}} \varepsilon^2 St^{-1/2} = O(\varepsilon^3) \quad (3.2)$$

其中 $\lambda = 0.3321$ 为 Blasius 常数。故 $R \rightarrow \infty$ 时确有 $C \rightarrow 0$, 非定常 Kutta 条件成立。经过小的修改, 这一分析也可用于简谐沉浮运动的平板。Brown 与 Cheng (1981) 进一步考虑了 $0 < St \ll R^{1/4}$ 的范围, 证明直到在后缘前方出现分离之前, 无粘非定常 Kutta 条件都是成立的。有趣的是, 在没有强迫扰动时, 同一隔板的后缘和剪切层的不稳定波之间也有一个耦合与 Kutta 条件问题(这时没有感受性问题), 它的答案迄今尚未找到, 众说纷纭, 如见 Orszag 与 Crow (1970), Pfizenmaier 与 Bechert (1973) 和 Daniels (1978)。Crighton (1985) 在评述这些矛盾意见时提出, 也许后缘所有剪切层振荡都是受迫的, 只是激振源不明显就是了, 例如下游对上游的反馈 (参见 5.1 节)。

3.2.3 光滑表面分离的感受性和 Kutta 条件 光滑表面分离是层状涡离开物面的又一种形式, 其感受性的核心问题也是通过 3 层理论的粘性分析确定耦合常数。Goldstein (1984) 研究了这个问题, 发现入射波在分离点激发起一个沿分离涡层传播的不稳定波 (Kelvin 波)。由此可见, 入射波有促进分离涡层转换成湍流的作用。Goldstein 证明, 当

$$R^{1/64} \ll St \ll R^{1/4}$$

时, 可求出耦合常数, 使非定常 Kutta 条件成立; 但若 $St = O(R^{1/4})$, 非定常分离点与定常分离点位置之差可达 $O(1)$ 量级, 而使非定常 Kutta 条件受到破坏。这是后缘问题中不出现的新情况。在这种情况下会出现什么新的流动图景, 则有待于进一步研究。

3.2.4 自由剪切层的感受性 除了上述与固体边界有关的感受性问题外, Balsa (1988) 最近又细致地研究了无粘自由剪切层对 2 维外部激发的感受性问题。扰动不是来自一个入射波, 而是来自剪切层内部或附近的一个涡量偶极子 (可用来模拟一个小襟翼的脉冲运动或连续振荡)。剪切层的速度型用简化的分段直线型。Balsa (1987) 曾证明这种速度型的高 Reynolds 数粘性不稳定性几乎等同于其无粘不稳定性。利用这种简化的无粘模型,

Balsa (1988) 求得了初值问题的解析解, 并研究了 $t \rightarrow \infty$ 时解的渐近行为. 据此, 他得以对剪切层的感受性(他把它定义为不稳定模式与外部扰动的振幅关系) 给出一个定量的度量, 并证明剪切层对靠近层中心线的高频扰动最为敏感. 值得注意的是, 在 Balsa 的理论中, 强迫扰动具有波包的形式, 连续的扰动在剪切层中相继发射出一系列波包, 它们一边向下游传播, 一边改变其振幅; 这就形成了振幅的空间变化, 从而导致一个空间不稳定模式, 其振幅和波包振幅有一个简单的泛函关系; 前者乘上(复)群速度就成为后者. Balsa 认为, 这种波包叠加的概念对于研究空间定域的简谐振源所产生的 3 维空间不稳定模式是一个有力的工具.

4 波涡相互作用中的整流

前面两节讨论了入射波(或振荡固体)在边界层或尾涡层这些层状涡中激发涡波的机理. 从本质上讲, 波涡相互作用总是非线性的, 它不仅产生振荡分量, 更重要的是它产生非线性的非零平均效应. 这个效应称为整流(streaming, rectification), 是粘性振荡流中最有趣、最重要的现象, 也是波涡相互作用中最有应用价值的效应之一.

早在 1831 年, Faraday 就首次发现了整流效应, Rayleigh 于 1894 年对声学整流给出了理论解释, 得到了著名的 Rayleigh 整流定律. 本节先回顾整流理论的基本方法和概念, 然后介绍关于波涡相互作用的整流效应的一些结果.

4.1 Euler 整流 在取平均时, 可以对流场 $\varphi(\mathbf{x}, t)$ 在固定空间点处取平均 $\bar{\varphi}$, 即 Euler 平均; 也可以对流体元的 Lagrange 坐标取平均, 即 Lagrange 平均. 两种平均导致很不相同的整流理论和方法.

自从 Rayleigh 的工作以来, 人们惯用的是 Euler 整流. 若流场的非定常效应仅来自周期运动, 则在 $M \ll 1$ 时, 对一个周期取平均后, Navier-Stokes 方程给出定常时均方程

$$\rho_0 \bar{u}_i \bar{u}_{j,i} = F_j - \bar{p}_{,j} + \mu \nabla^2 \bar{u}_j \quad (4.1a)$$

其中 ρ_0 为恒定时均密度, 而定常 Reynolds 应力

$$F_j = -(\rho u_i u_j)_{,i} \quad (4.1b)$$

起了强迫压力梯度的作用. 正是这个非线性效应表达出 Euler 整流的全部内容(Lighthill 1978 a). 显然, 为有一个非零 F_j , 周期性分量 ρu_i 与 u_j 之间的相位关系极为重要. 从能量观点看, 整流是波能向定常流能量的转化, 因此必然伴有波的衰减. Lighthill (1978 a) 列举了若干衰减机理, 其中包括非粘性的机理(因此使整流速度进一步放大). 他还指出, 无衰减波的整流效应即使存在也微不足道.

为进一步说明 Euler 整流的概念与方法, 这里简要回顾振荡边界层中的整流这一经典研究, 它也是波与层状涡相互作用中的整流的第一个实例, 详见 Schlichting (1979), Stuart (1963), Rott (1964), Telionis (1981) 等.

考虑外流作周期性脉动 $U(x, t) = \bar{U}(x) + U_0(x) \sin \omega t$ 的 2 维边界层, 求脉动速度场 $u'(x, y, t)$. 据第 3 节的讨论, 这是个感受性问题. Lin (1956) 在 $\omega \gg 1$ 的极高频近似下把 u' 的方程线性化, 得到熟知的 Stokes 剪切波解

$$u'(x, y, t) = U_0(x) (\sin \omega t - e^{-\eta}) \sin(\omega t - \eta) \quad (4.2a)$$

其中

$$\eta = y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \quad (4.2b)$$

这是一个与外流谐振的驻波，注意它是个涡波。利用 (4.2) 和 (4.1 b)，可算出时均流场表观压力梯度

$$F(x, y) - \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x} = \frac{1}{2} U_0 \frac{dU_0}{dx} \bar{F}(\eta) \quad (4.3a)$$

其中

$$\bar{F}(\eta) = e^{-\eta} \{ (2 + \eta) \cos \eta - (1 - \eta) \sin \eta - e^{-2\eta} \} \quad (4.3b)$$

(4.3 a) 表明整流与外流速度振幅 U_0 的梯度相关，因此不衰减的波没有整流；变量 η 则揭示出这种衰减来自粘性。

上面是把线化解直接代入时均方程的 2 阶项而得到整流效应。若要同时分析振荡分量，就要把渐近展开至少做到 2 阶。这时，一些特征尺度和无量纲参数特别重要。取 ω^{-1} 为特征时间，(4.2b) 提示一个特征长度

$$\delta = (2\nu/\omega)^{1/2} \quad (4.4)$$

它是 Stokes 层的厚度。相应地有一个振荡 Reynolds 数 (L 为特征长度)

$$R_\omega = \frac{\omega L^2}{\nu} \quad (4.5)$$

在典型情况下 $R_\omega \gg 1$ ，从而 $\delta \ll 1$ ，可引入边界层近似。由于 Strohal 数 $St = L\omega/U_\infty \gg 1$ ，可取 $\varepsilon = St^{-1}$ 为小参数对边界层方程作近似展开。对于纯谐振的外流 $U = U_0(x)e^{i\omega t}$ ，易得零阶解就是 Stokes 涡波解(换到物面坐标系)。算到 $O(\varepsilon)$ 阶时，可发现随 $\eta = y/\delta \rightarrow \infty$ 有整流速度

$$u_s(x, \infty) = -\frac{3}{4\omega} U_0 \frac{dU_0}{dx} \quad (4.6)$$

此即 Rayleigh 整流定律。(4.6) 表明，尽管粘性是产生整流的机理，但随 $\nu \rightarrow 0$ ，整流并不消失。

(4.6) 提供了新的特征速度 $U_s = u_s(L, \infty)$ ，由此又可构造一个整流 Reynolds 数 (Stuart 1963)

$$R_s = U_s L / \nu = U_s^2 / \omega \nu \quad (4.7)$$

相应地，存在一个整流层厚度

$$\delta_s = L / \sqrt{R_s} = L \sqrt{\nu \omega} / U_\infty \quad (4.8)$$

与 (4.4) 相比，可见 $\delta_s / \delta = St \gg 1$ 。通常的 Reynolds 数 $R = U_\infty L / \nu$ 同 R_ω ， R_s 的关系是

$$R = \varepsilon R_\omega, \quad R_s = \varepsilon R = \varepsilon^2 R_\omega \quad (4.9)$$

因此存在两个小参数 ε 和 R_ω^{-1} ，渐近展开程序比定常流要复杂 (Stuart 1966; Riley 1965, 1967)。

对于上面考虑的纯振荡主流的情形，通常 $R \ll 1$ ，即 $\varepsilon \ll R_\omega^{-1}$ 。这又可分成两种情况：

① $R_s \ll 1$ ，即 $\varepsilon^2 \ll R_\omega^{-1}$ 。此时 Stokes 层的外流定常部分是缓慢蠕流。除 Rayleigh 外，Nyborg (1953) 和 Westervelt (1953) 研究了这种整流，故 Lighthill (1978 a) 称之为

RNW 整流, 这其实是罕见的, 因为正如 Lighthill 指出的, $R_s < 1$ 意味着 $u_s \sim 1$ 毫米/秒; 但 1 微瓦 (10^{-6} 瓦) 的声源在 10^6 赫的频率下即可造成 300 毫米/秒的整流。

② $R_s = O(1)$. 此时外流的定常部分满足全 Navier-Stokes 方程。这是大量遇到的情形, Lighthill (1978a) 称之为 Stuart 整流。

仅当 $\nu\omega$ 很小, 使 $R_s \gg 1$ 时, 整流层才呈薄边界层形态。因此, 决定整流对流与粘性扩散相对大小的关键参数是 R_s 。例如在 3.2 节提到的平板前缘感受性问题中, 参数 ε 的 -6 次方 (见图 2) 正是 R_s , 且显然 $R_s \gg 1$, 故若计算该问题的整流, 整流层将有边界层的形态。

在更多情况下, 外流具有

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + \varepsilon U_0(x) e^{i\omega t}, \quad \varepsilon \ll 1$$

的形式, ω 的范围是任意的。按 ε 展开的零阶解是定常边界层, 一阶解才有振荡分量。Lighthill (1954) 首先对 $\omega \gg 1$ 和 $\omega \ll 1$ 两极端求了渐近解。 $\omega \gg 1$ 的解自然与 Lin (1956) 的解 (4.2) 一致, 但 (4.2) 不限于小振幅。后来人们在许多方向上拓展了 Lighthill (1954) 的工作, 见 Telionis (1981)。Patel 在理论和实验上把驻波推广到行波, 从而除频率外波矢量也参与决定边界层的主要响应。

4.2 GLM 整流 波动现象是场现象, 用 Euler 坐标描述场量的变化当然比跟踪流体元的 Lagrange 运动要合理。但另一方面, 宏观连续介质中的波都是靠介质元围绕一平均位置振荡而传播的, 在这个物理过程中介质元偏离平均位置的扰动 Lagrange 位移又比固定空间点处场量的脉动具有更本质的意义。因此, 既不是纯 Euler 描述, 也不是纯 Lagrange 描述, 而是二者的混合, 即把介质元的扰动 Lagrange 位移 ξ 看作场变量 $\xi(x, t)$, 应是对宏观介质波更自然的物理描述。Feynman (1964) 在叙述声波时就采用了这种混合描述, 他导出的声波方程正是 $\xi(x, t)$ 的波动方程。

同样, 在取平均计算整流时, 比前述纯 Euler 平均更适宜的做法是对变换

$$x \rightarrow x + \xi(x, t) \quad (4.10)$$

下场量 $\varphi(x, t)$ 的相应变换

$$\varphi \rightarrow \varphi^\xi \equiv \varphi(x + \xi(x, t), t)$$

取 Euler 平均, 记为 $\bar{\varphi}^L$

$$\bar{\varphi}^L = \overline{\varphi(x + \xi(x, t), t)} \quad (4.11)$$

这个平均可以对时间、空间或系统进行。显然应要求 $\bar{\xi}(x, t) = 0$, φ 的扰动量为

$$\varphi^l \equiv \varphi^\xi - \bar{\varphi}^L \quad (4.12)$$

它与 Euler 扰动 $\varphi^l = \varphi - \bar{\varphi}$ 的差称为 Stokes 移动(drift), 这个差总可求得。(4.11) 的平均方式称为广义 Lagrange 平均 (GLM)。出于研究大气过程中波整流的需要, Andrews 与 McIntyre (1978 a, b) 建立了波与平均流相互作用的一般 GLM 理论 (又见 Grimshaw 1984; Craik 1985)。在这个理论中, 不可压缩流的平均连续性方程和 N-S 方程为

$$\bar{D}^L \bar{\rho} + \bar{\rho} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^L = 0 \quad (4.13 a)$$

$$\bar{D}^L (\bar{\mathbf{u}}^L - \mathbf{P}) + (\bar{\mathbf{u}}^L - \mathbf{P}) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}^L + \nabla \Pi = \bar{\mathbf{X}}^L + \nabla \bar{\xi} \cdot \mathbf{X}^l \quad (4.13 b)$$

其中

$$\bar{D}^L \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}^L \cdot \nabla \quad (4.13 \text{ c})$$

是 GLM 物质导数算子; $\bar{\rho}$ 为平均密度, 不可压时由

$$\bar{\rho} = \rho_0 J \quad (4.13 \text{ d})$$

给出, J 是变换 (4.10) 的 Jacobi 行列式, 因此不可压流的 $\bar{\rho}$ 是可变的, 另外,

$$\mathbf{P} \equiv -\nabla \xi \cdot \mathbf{u}^L \quad (4.13 \text{ e})$$

表征波的整流动量, 而

$$\Pi \equiv \frac{1}{\rho_0} \bar{p}^L - \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{u}}^L|^2 - \frac{1}{2} \overline{|\mathbf{u}^L|^2} \quad (4.13 \text{ f})$$

$$\mathbf{X} \equiv \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.13 \text{ g})$$

从技术上看, GLM 理论对振幅没有限制, 原则上说尤适于研究共振, 而且在振荡的不可贯穿边界上有简单的平均边界条件, 尤适于研究激振固体源的平均效果。从方程形式上看, GLM 整流不再表现为 Reynolds 应力, 而是直接表现为波对动量、能量、环量、涡量等等的平均贡献, 使人们在一些情况下甚至不必求解平均流方程就找出良性整流的某些参数条件。例如, Andrews 与 McIntyre (1978 a) 证明, GLM 环量为

$$\bar{\Gamma}^L = \oint_C (\bar{\mathbf{u}}^L - \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{x} \quad (4.14)$$

其中 C 是以 $\bar{\mathbf{u}}^L$ 运动的闭合“平均物质曲线”。对无粘流, 设在一个涡管上游没有波, 未受扰速度为 \mathbf{u}_0 , 而在下游波作用下产生了与 \mathbf{u}_0 同向的 \mathbf{P} , 则因沿涡管环量守恒, 由 (4.14) 可见 $\bar{\mathbf{u}}^L$ 必须比 \mathbf{u}_0 大一个 \mathbf{P} , 使 $\bar{\mathbf{u}}^L$ 的环量增大, 从而可断定整流的效果是加强了已有的涡。

由于 GLM 理论在物理上的自然性, 在 Euler 平均中只能就小振幅波给出定义的波作用量和波的赝能动量张量, 在 GLM 理论中得到了彻底的回答 (Andrews & McIntyre 1978b), 从而可用简洁得多的方式重建某些已知的基本定理, 如稳定性理论中的半圆定理、拐点定理等 (Craik 1982)。

吴介之与蒋林波 (1987) 还导出了不可压 GLM 涡量方程

$$\bar{D}^L (\bar{\omega}^L - \mathbf{Q}) - (\bar{\omega}^L + \mathbf{Q}) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}^L + 2\mathbf{S} = \bar{\mathbf{Y}}^L + \nabla \xi \cdot \mathbf{Y}^L, \quad (4.15 \text{ a})$$

其中

$$\mathbf{Q} \equiv -\nabla \xi \cdot \boldsymbol{\omega}^L \quad (4.15 \text{ b})$$

是整流涡量, 且

$$\mathbf{S} = -\nabla \mathbf{u}^L \cdot \boldsymbol{\omega}^L, \quad \mathbf{Y} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (4.15 \text{ c})$$

注意 $\bar{\omega}^L \neq \nabla \times (\bar{\mathbf{u}}^L - \mathbf{P}) \equiv \bar{\mathbf{W}}^L$, 而是有

$$\bar{\omega}^L = (1/J) (\bar{\mathbf{W}}^L - \mathbf{R}), \quad \mathbf{R} \equiv -\bar{\mathbf{W}}^L \cdot \nabla \xi \quad (4.16)$$

\mathbf{W}^L 的表达式也已导出。因此只要知道 ξ 场, 所有波整流量 \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{S} 等均可算出, 并进而求得平均速度、平均环量和涡量。如果必要, 还可以通过 Stokes 移动进一步求得相应的 Euler 整流量。

用 GLM 理论研究小振幅强制线性色散波与平均流的相互作用是很方便的 (吴介之与蒋林波 1987), 设

$$\mathbf{u}' = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)e^{i\alpha}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)e^{i\alpha} \quad (4.17 \text{ a})$$

其中 $|\mathbf{a}| = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1$, 而

$$\alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t \quad (4.17 \text{ b})$$

在 $O(\varepsilon)$ 级近似中, (4.13 c) 可简化为 $\bar{D}^L = D = (\partial/\partial t) + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla$, 从而 \mathbf{a} 与 Euler 速度扰动振幅 $\hat{\mathbf{u}}$ 的关系可导出为

$$(D - i f)\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}_0 = \hat{\mathbf{u}} + O(\varepsilon^2) \quad (4.18 \text{ a})$$

其中

$$f \equiv \omega - \bar{\mathbf{u}}^L \cdot \mathbf{k} = \omega - \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} + O(\varepsilon^2) \quad (4.18 \text{ b})$$

是随质点运动的观察者看到的固有频率, $f < 0$ 意味着波的行进比当地流速慢, 反之则快。注意 $f = 0$ 时出现当地驻波, (4.18 a) 有奇异性, 即有临界层。通常, $\hat{\mathbf{u}}$ 可由 Euler 描述下的线性理论解出, 因此可由 (3.18) 解出 \mathbf{a} , 并进而算出精确到 $O(\varepsilon^2)$ 的所有整流量, 不必做 2 阶展开。

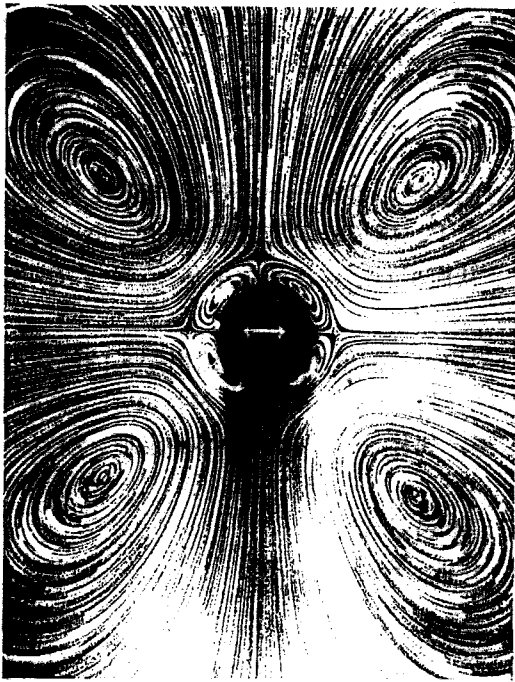


图4 振荡圆柱的整流涡。取自 van Dyke (1982)

4.3 波的整流涡 在波与平均流场的相互作用中, 常常形成层状或轴状整流涡, 4.1 节关于振荡边界层的 Euler 整流即为一例。事实上, Westervelt (1953) 已经在 $R_s \ll 1$ 的条件下证明了声波扰动能通过整流产生涡量。用下标 1, 2 分别表示 Euler 描述下渐近展开中的 1 阶及 2 阶量, $\rho_0 \overline{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1}$ 为 1 阶正弦声波引起的时均 Reynolds 应力张量, $\omega_2 = \nabla \times \mathbf{u}_2$ 为与时间无关的 2 阶整流涡量, Westervelt 得到

$$\nabla^2 \omega_2 = (\rho_0/\mu) \nabla \times (\nabla \cdot \overline{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1}) \quad (4.19)$$

这个 Poisson 方程清晰表明, 在适当条件下声波正是定常涡源, 与 (2.5) 形成鲜明的对照。

许多研究已证实了波是涡源这一论断。最经典的例子是沿一直径方向振荡的圆柱在静止流体中诱导出的整流涡, 见图 4。有关理论解释见 Schlichting (1979); Stuart (1963); Telionis (1981); Tatsuno (1974)

还观察了方截面振荡柱体的整流, 发现同样出现了各种图形的涡。

第二个例子是形如 $y = \beta \cos \kappa x$ 的波形壁上纯振荡流产生的整流涡。两个小参数 $\beta \ll 1$ 和 $\lambda = 2\pi/\kappa \ll 1$ 各自对应一个振荡 Reynolds 数

$$R_{\omega, \lambda} = \omega/2\nu\kappa^2, \quad R_{\omega, \beta} = \omega\beta^2/2\nu$$

整流 Reynolds 数为 $R_s = 2U^2/(\nu\omega)$ 。设 $\varepsilon = \beta/\delta = \beta(\omega/2\nu)^{1/2} \ll 1$, Lyne (1971) 对这个问题按 ε 作渐近展开后发现, 零级近似仍是 Stokes 层, 而在 $O(\varepsilon)$ 级近似下出现轴状整流涡列, 且按 $R_s/R_{\omega, \lambda} \ll 1$ 或 $R_s/R_{\omega, \lambda} \gg 1$ 而有不同的涡列结构, 甚至是多排的。Kaneko 与 Honji (1979)

把 Lync 的计算推广到 2 阶，一个算例如图 5 所示。他们的实验观察到双排整流涡结构，其中上排已进入势流区。这情形恰如把图 4 的圆柱边界拉伸成波形壁后的结果。

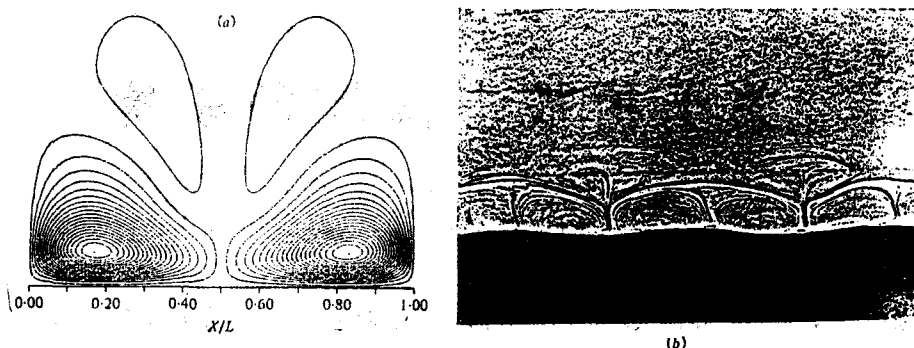


图 5 波形壁振荡流的整流涡。(a) 计算的流动图形。(b) 实验观察到的流动图形。据 Kaneko & Konji (1979)

另一类有广泛意义的典型问题是螺旋波与轴状涡的相互作用。吴介之与蒋林波 (1987) 在柱坐标 (r, θ, z) 中考察了螺旋形强制波

$$(u', v', w') = (\hat{u}(r), \hat{v}(r), \hat{w}(r)) e^{i(m\theta + kz - \omega t)} \quad (4.20)$$

与基本流为 $(0, v_0(r), w_0(r))$ 的柱状涡相互作用的 GLM 整流，其中 m 为整数， k, ω 为实数（对稳定性问题，常取 k 与 ω 之一为复数）。在固体涡核 $v_0 = \Omega r, w_0 = 0, r \ll 1$ 的核心区，各整流量的渐近表达式均可导出。结果发现：①即使基本流是 2 维涡，任何有轴向波数的扰动都会在涡心处产生轴向整流动量；②在螺旋波扰动下，涡心平均密度 $\bar{\rho}$ 总要下降，甚至形成空洞；③平面波扰动，甚至是平面声波，也会引起已有涡量的重新分布，但基本不改变平均速度的环量。这些解析结果从一个侧面为某些熟知的事实提供了定量解释。吴介之与蒋林波还计算了螺旋形强制波 (4.20) 和 Burgers 涡

$$v_0 = (q/r)[1 - \exp(-r^2)], w_0 = \exp(-r^2)$$

相互作用引起的 GLM 整流动量 \mathbf{P} 的分布。可以发现，只要 $f(0) = \omega - mq - k > 0$ 就总有 $f(r) > 0$ 而不出现临界层。计算中的边界条件理想化为在 $r = r_0$ 处有给定压力振幅。算得的结果表明，对轴状涡而言，螺旋波的确是产生强整流的有效手段，但对频率和波数要精心选择。为加强一个涡，首先需选 $m > 0$ 的顺螺旋波，其次应使固有频率 $f \geq 0$ 。在所给边界条件下，若要强整流集中在涡心区，需取小的 $f > 0, m > 0$ 和相对较大的 k ；反之，随 m 增大， k 减小，强整流移向涡核边缘。

这些结果也可用来破坏一个不希望的坏涡，如取上行 ($f < 0$) 逆螺旋波 ($m < 0$) 之类。

螺旋波与轴状涡相互作用的一个具体实例将在 5.3 节讨论。

(未完待续)