

# 非平衡统计断裂力学基础

邢修三

北京理工大学应用物理系、材料科学研究中心(邮政编码100081)

**摘要** 非平衡统计断裂力学是用非平衡统计概念和方法结合微裂纹(或微空洞)演化动力学从微观机理推导出宏观力学量的断裂理论。它以微裂纹演化方程为核心,结合从微观机理求得的微裂纹长大速率和成核率以及最小强度原理,统一导出微裂纹分布函数、断裂概率、可靠性、失效率、损伤断裂动力学方程、强度、韧度和寿命等各种与断裂有关的力学量的统计分布函数、统计平均值和统计涨落。本文理论可广泛适用于金属和结构陶瓷的脆性、疲劳、延时和环境断裂等多种断裂类型。本文通过金属的脆性、疲劳和延时断裂,扼要综述了上述主要思想、方法和结果。

**关键词** 微观机理; 微裂纹; 演化方程; 分布函数; 材料试样系综; 宏观力学量

## 1 引言

用近代理论物理方法结合材料微观结构来研究固体的断裂,是断裂理论中近些年来广受重视的重要方向。从理论的完美性与材料强度、韧度和寿命设计的实际需要来看,一个较好的断裂理论,至少应包含下列两个主要内容:如何在微裂纹(或微空洞)演化的微观动力学基础上将材料断裂的微观机理与其宏观统计特性结合起来?能否和怎样由少数几个基本方程和基本物理参量统一导出和表述断裂过程的所有基本规律?笔者<sup>[1-14]</sup>的工作表明,用非平衡统计的概念和方法结合微裂纹演化的微观机理来研究固体的断裂,有可能使我们沿所希望建立的断裂理论——非平衡统计断裂力学——方向不断取得新的进展。

## 2 基本概念

随着外应力、温度、介质和粒子辐照等作用的不同,固体材料的断裂类型可分为脆性断裂、疲劳断裂、延时断裂和环境断裂等。这些不同类型断裂的共同基本概念可概括如下:

①断裂过程是非平衡的不可逆动力学过程,而其本质则是由外应力(包括温度、介质和粒子辐照等)作用下的微裂纹(或微空洞)成核、长大和传播过程决定的。

②断裂过程可看成由大量微裂纹成核长大阶段和单个主裂纹传播阶段两个阶段组成。

③位错滑移、点缺陷迁移(或原子键断裂等)及其相互作用是微裂纹成核长大的微观物理基础,材料断裂的微观机理就是建立在这种基础上。

④微裂纹演化过程所遵守的规律是随机性的而非确定性的,因而整个断裂过程的基本规

律亦是统计性的。

⑤反映固体断裂特性的宏观力学量应由材料试样系综的统计平均值表示之。

### 3 微裂纹演化方程

在外应力作用下，固体材料内部（包括表面，以下同）的微裂纹不断长大。由于实际材料的微观成分、缺陷及相结构的不均匀性，其微观结构可看成是平均结构背景上叠加了这种不均匀性涨落，平均结构是确定性的，不均匀性涨落是随机性的。微裂纹在长大过程中，其长大速率因这种不均匀性涨落的随机存在都将与其所经途径密切相关，随机变化，时大时小。同一材料内，两个形状和尺度相同的微裂纹，在同一外应力作用下，由于各自所经途径上微观结构的不同，其长大速率亦将互有差异。因此，我们将微裂纹在材料内的长大过程看成是个随机过程或叫非平衡统计过程。

现在我们给出描述这种过程的微分方程。设  $t$  为材料受外应力作用的时间， $c$  为  $t$  时微裂纹的长度（或微空洞的半径）， $\dot{c}$  为  $t$  时微裂纹的长大速率，由于材料的微观结构可看成确定性平均结构背景上叠加了随机性涨落，故微裂纹长大速率应遵守下述广义朗之万方程：

$$\dot{c} = K(c) + F(c, t) = K(c) + \beta(c)f(t) \quad (1)$$

其中  $K(c)$  叫迁移长大速率，它由材料平均结构背景和外应力共同决定； $F(c, t) = \beta(c)f(t)$  叫涨落长大速率，它由材料不均匀性涨落和外应力共同决定； $f(t)$  叫涨落函数； $\beta(c)$  叫涨落放大函数。由于长大过程可近似地看成马尔可夫过程，且为简化计算起见，假设涨落函数  $f(t)$  是高斯分布的，即

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = Q\delta(t-t') \quad (2)$$

这儿  $Q$  为涨落系数， $\delta$  为 Dirac 函数。

根据随机理论<sup>[16,5,11]</sup>与朗之万方程 (1) 和 (2) 等价的应是下列福克-普朗克方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(c_0, c; t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial c} \left[ \left( K(c) + \frac{Q\beta(c)}{2} \frac{\partial \beta(c)}{\partial c} \right) P(c_0, c; t) \right] \\ & + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2}{\partial c^2} [\beta^2(c) P(c_0, c; t)] \end{aligned} \quad (3)$$

此即描述微裂纹随机长大过程的微分方程，其中  $P(c_0, c; t)dc$  为  $t=0$  时的起始微裂纹  $c_0$  在  $t$  时长大到  $c$  和  $c+dc$  间的概率。显然， $P(c_0, c; t)dc$  应满足归一化条件

$$\int_{c_0}^{\infty} P(c_0, c; t)dc = 1$$

当材料内部不是一个或若干个同为  $c_0$  的微裂纹同时开始随机长大，而是很多个微裂纹在外应力作用过程中不断随机成核长大时，单纯的随机长大方程 (3) 不再适用，需建立描述成核长大过程的方程。令  $M(c, t)dc$  表示  $t$  时单位体积内在长度  $c$  和  $c+dc$  间形成的微裂纹数目， $M(t) = \int_{c_0}^{\infty} M(c, t)dc$  为  $t$  时微裂纹的总密度数，则

$$P(c, t)dc = M(c, t)dc / M(t) \quad (4)$$

为  $t$  时在所有各种长度的微裂纹中找到长度在  $c$  和  $c+dc$  间的微裂纹的概率，显然，

$$\int_{c_0}^{\infty} P(c, t)dc = 1$$

根据微裂纹数目平衡原理， $M(c, t)$  应遵守下列微分方程<sup>[2,5]</sup>：

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(c, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial c} \left[ \left( K(c) + \frac{Q\beta(c)}{2} \frac{\partial \beta(c)}{\partial c} \right) M(c, t) \right] \\ & + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2}{\partial c^2} [\beta^2(c) M(c, t)] + q(t) \delta(c - c_0) \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $q(t)$  为  $t$  时单位体积内微裂纹的成核率。式 (5) 就是描述微裂纹成核长大的演化方程, 其物理意义为微裂纹数目随时间的变化率来自迁移长大、涨落长大及成核三部分。

若还考虑两个小微裂纹可以组合成一个大微裂纹, 则微裂纹演化方程应为<sup>[2,9]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(c, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial c} \left[ \left( K(c) + \frac{Q\beta(c)}{2} \frac{\partial \beta(c)}{\partial c} \right) M(c, t) \right] \\ & + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2}{\partial c^2} [\beta^2(c) M(c, t)] + q(t) \delta(c - c_0) \\ & + \frac{1}{2} \int_{c_0}^c \omega(c_i, c_j) M(c_i, t) M(c_j, t) dc_j - \int_{c_0}^{\infty} \omega(c, c_j) M(c, t) M(c_j, t) dc_j \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\omega(c_i, c_j)$  表示微裂纹  $c_i$  和  $c_j$  在单位时间内组合成微裂纹  $c$  的有效体积。式 (6) 与 [2,9] 所用的微积分演化方程显著不同点在于考虑了涨落长大的作用。

若涨落长大和微裂纹组合都可以略去, 则式 (5), (6) 变为

$$\frac{\partial M(c, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial c} [K(c) M(c, t)] + q(t) \delta(c - c_0) \quad (7)$$

式 (3), (5)–(7) 就是三种情况下的微裂纹演化方程。它们都略去了微裂纹的取向分布。由于它们都是时间反演不对称的, 所以反映了微裂纹演化过程的不可逆性。

已知  $K(c)$ ,  $Q$ ,  $\beta(c)$ ,  $q(t)$  和  $\omega(c_i, c_j)$ , 就可由这些方程解出  $P(c_0, c; t)$  或  $M(c, t)$ 。怎样才得知这些量? 这要求从微裂纹 (或微空洞) 演化的微观机理出发进行理论推算。微观机理不同, 以上各量亦不同。材料断裂的微观机理正是建立在这种微观动力学基础上。

式 (3), (5)–(7) 的起始条件和边界条件为

$$P(c_0, c; t=0) = \delta(c - c_0), \quad P(c_0, c \rightarrow \infty; t) = 0 \quad (8a)$$

$$M(c, t=0) = 0, \quad M(c \rightarrow \infty, t) = 0 \quad (8b)$$

其物理意义为: 式 (8a) 表示微裂纹起始长度为  $c_0$ 。式 (8b) 表示微裂纹是在外应力作用过程中产生的; 但不论两者中哪一种情况, 材料未断裂时, 其内部都不存在无限大的裂纹。

#### 4 微裂纹长大和成核的微观推导

研究微裂纹长大, 可用位错模型或原子键模型。目前看来, 对于金属材料的脆性断裂和疲劳断裂, 位错模型较有成效。

根据单塞积或双塞积位错群模型, 微裂纹的静态能和动能分别为<sup>[2,9]</sup>

$$U_0 = 2\gamma c - \frac{\pi(1-\nu^2)\sigma^2 c^2}{2E} - \frac{nbc\sigma}{2} - \frac{(nb)^2 E}{8\pi(1-\nu^2)} \quad (9)$$

$$T = \frac{k_1 \rho \sigma^2 c^2 \dot{c}^2}{E^2} \quad (10)$$

$\sigma$  为垂直作用于微裂纹上的外加拉应力 (对于疲劳,  $\sigma$  应由交变应力振幅  $\sigma_a$  代替之),  $n$  为挤入微裂纹内的位错数目,  $b$  为布氏矢量,  $\gamma$  为表面能,  $E$  为杨氏模量,  $\nu$  为泊松比,  $\rho$  为

金属密度,  $k_1 = 5.45$ . 由式 (9) 可求得微裂纹的临界长度为

$$c_k = \gamma E / \pi(1 - \nu^2) \sigma^2 \quad (11)$$

考虑到微裂纹扩展时需要消耗塑性功, 式 (9), (11) 中的  $\gamma$  应代之以  $G_{1c} + \gamma \approx G_{1c}$ , 即有

$$c_k = G_{1c} E / \pi(1 - \nu^2) \sigma^2 \quad (11a)$$

$G_{1c}$  正是裂纹扩展力. 式 (11), (11a) 即为裂纹的传播条件.

根据能量守恒原理, 有

$$-\frac{d}{dt}(T + U_0) = 0 \quad (12)$$

将式 (9), (10) 代入式 (12), 并求  $\sigma$ ,  $nb$ ,  $c$  及  $\dot{c}$  对  $t$  的微商, 即得<sup>[2,9]</sup>

$$c\dot{c}\ddot{c} + \dot{c}^3 + \frac{\dot{\sigma}c\dot{c}^2}{\sigma} + \frac{E^2}{2k_1\rho\sigma^2c} \left[ 2\gamma - \frac{nb\sigma}{2} - \frac{\pi(1-\nu^2)\sigma^2c}{E} \right] \dot{c} - \frac{E^2}{2k_1\rho\sigma^2c} \left[ \left( \frac{\sigma c}{2} + \frac{nbE}{4\pi(1-\nu^2)} \right) \frac{d(nb)}{dt} + \left( \frac{nbc}{2} + \frac{\pi(1-\nu^2)\sigma c^2}{E} \right) \dot{\sigma} \right] = 0 \quad (13)$$

式中  $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$  为外应力的增加率,  $\ddot{c} = d\dot{c}/dt$  为微裂纹的长大加速度. 式 (13) 就是微裂纹的长大动力学方程, 它给出微裂纹的长度  $c$ , 长大速率  $\dot{c}$ , 长大加速度  $\ddot{c}$  与外应力  $\sigma$  及其他有关物理量之间的函数关系. 应该指出, 式 (13) 与式 (1) 的差别在于前者未考虑涨落的作用, 因而由它解出的  $\dot{c}$  就是式 (1) 中的迁移长大速率  $K(c)$ . 由于式 (13) 是非线性微分方程, 难以解出从低速到高速的  $\dot{c}$  的整个表达式, 只能分阶段求其近似解.

当  $c \ll c_k$  及小  $\dot{c}$  时, 由式 (13) 不仅可求出脆性微裂纹长大速率<sup>[2,9]</sup>

$$\dot{c} \approx \left( \frac{\sigma c}{4\gamma} + \frac{nbE}{8\pi(1-\nu^2)\gamma} \right) \frac{d(nb)}{dt} + \left( \frac{nbc}{4\gamma} + \frac{\pi(1-\nu^2)\sigma c^2}{2\gamma E} \right) \dot{\sigma} \quad (14)$$

还可求出疲劳微裂纹长大速率<sup>[10]</sup>

$$\frac{dc}{dN} \approx \frac{E\sigma_a^{(1/\beta_1-1)}(\Delta K)^2}{2\pi(1-\nu^2)N_0L^2\sigma_0^{1/\beta_1}} / [K_{1c}^2 - (\Delta K)^2] \quad (15)$$

这儿  $N$  为交变周数,  $\sigma_0$  为交变强度系数,  $\beta_1$  为交变硬化指数,  $N_0$  为活动位错源密度,  $L$  为滑移面长度,  $K_{1c}$  为断裂韧性,  $\Delta K = \sigma_a \sqrt{\pi c}$  为应力强度因子振幅. 式 (15) 是与 Forman 型经验公式相符的. 当  $K_{1c} \gg \Delta K$  时, 式 (15) 变为

$$\frac{dc}{dN} \approx \frac{\sigma_a^{(1+1/\beta_1)} c}{2N_0L^2G_{1c}\sigma_0^{1/\beta_1}} = Ac \quad (16)$$

这与 Paris 型经验公式  $\dot{c}_N \sim (\Delta K)^2$  是一致的.

当  $c > c_k$  及大  $\dot{c}$  时, 由式 (13) 得裂纹的传播速率为<sup>[2,9]</sup>

$$\dot{c} = \dot{c}_m \left( 1 - \frac{2c_k}{c} + \frac{c_k^2}{c^2} + \frac{\dot{c}_m^2 c_k^2}{\dot{c}_m^2 c^2} \right)^{1/2} \quad (17)$$

其中  $\dot{c}_m = \left[ \frac{\pi(1-\nu^2)}{4k_1} \left( \frac{E}{\rho} \right) \right]^{1/2}$ ;  $\left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/2}$  为应力波在固体材料中的传播速率, 即裂纹的极限传

播速率接近于应力波在固体中的传播速率.

对于热激活延时断裂, 根据原子键断裂机理, 微裂纹的长大速率为<sup>[13]</sup>

$$\dot{c} = 2\nu_0 b \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right) \quad (18)$$

这儿  $\nu_0$  为原子本征振动频率,  $k$  为玻尔兹曼常数,  $T$  为温度,  $U$  为破坏一个原子键所需的激活能,  $\alpha$  为激活体积。

根据位错塞积群机理, 即可求得  $t$  时单位体积内微裂纹的成核率为<sup>[9,10]</sup>

$$q(t) = HA_1 \exp(-A_1 t) \quad (19)$$

$H$  为单位体积内微裂纹潜在核的数目,  $A_1$  为材料常数。

应该指出, 根据本文理论, 在断裂过程中, 微裂纹长大比其成核所起的作用更为重要。下面几节的讨论中将会看到这点。

### 5 微裂纹分布函数

现在来求微裂纹分布函数。由式 (14), (16), (18), (19) 可求得  $K(c)$ ,  $Q$ ,  $\beta(c)$  和  $q(t)$ 。将其代入式 (4), (7), 可得脆性微裂纹的密度分布函数为<sup>[2,9]</sup>

$$M(c, \varepsilon) = \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} HN_0 L^2 \alpha_1 \sigma_1 \varepsilon^m \exp\left[-\left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} N_0 L^2 c\right] \\ \times \exp\left\{-\alpha_1 \sigma_1 \varepsilon^m \exp\left[-\left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} N_0 L^2 c\right]\right\} \quad (20)$$

脆性微裂纹的概率分布函数为

$$P(c, \varepsilon)dc = \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{N_0 L^2 \alpha_1 \sigma_1 \varepsilon^m}{1 - \exp(-\alpha_1 \sigma_1 \varepsilon^m)} \exp\left[-\left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} N_0 L^2 c\right] \\ \times \exp\left\{-\alpha_1 \sigma_1 \varepsilon^m \exp\left[-\left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} N_0 L^2 c\right]\right\} dc \quad (21)$$

其中  $\varepsilon$  为金属发生的塑性变形,  $\sigma_1$  为强度系数,  $m$  为硬化指数,  $P(c, \varepsilon)dc$  为塑性变形  $\varepsilon$  时在所有各种长度的微裂纹中找到长度在  $c$  和  $c+dc$  间的微裂纹的概率。

将  $K(c) = A\beta(c)$  及  $Q \approx \eta^2 A$  代入式 (5), (4), 可得疲劳微裂纹的密度分布函数为<sup>[10,11]</sup>

$$M(c, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Qc^2}} \int_0^N \frac{q(N')}{\sqrt{(N-N')}} \exp\left\{-\frac{[\ln(c/c_0) - A(N-N')]^2}{2Q(N-N')}\right\} dN' \quad (22)$$

疲劳微裂纹的概率分布函数为

$$P(c, N)dc \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2 ANc^2}} \exp\left\{-\frac{[\ln(c/c_0) - AN]^2}{2\eta^2 AN}\right\} dc \quad (23)$$

其中  $\eta$  为各个结构灵敏度相对涨落之和<sup>[11]</sup>。  $P(c, N)dN$  为交变应力作用  $N$  周时在所有各种长度的微裂纹中找到长度在  $c$  和  $c+dc$  间的微裂纹的概率。

由式 (5), (4), (18) 可得热激活延时 (以下简称延时) 微裂纹的密度分布函数为<sup>[13]</sup>

$$M(c, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2\nu_0 b^2 \exp(-U/kT) [\sinh(\alpha\sigma/kT)]^2}} \times \int_0^t \frac{q(t')}{\sqrt{(t-t')}} \exp\left\{-\frac{[c-c_0-\nu_0(t-t')]b \exp(-U/kT) \sinh(\alpha\sigma/kT)]^2}{8\eta^2\nu_0(t-t')b^2 \exp(-U/kT) [\sinh(\alpha\sigma/kT)]^2}\right\} dt' \quad (24)$$

延时微裂纹的概率分布函数为

$$P(c, t)dc \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2\nu_0 t b^2 \exp(-U/kT) [\sinh(\alpha\sigma/kT)]^2}} \times \exp\left\{-\frac{[c-c_0-\nu_0 t b \exp(-U/kT) \sinh(\alpha\sigma/kT)]^2}{8\eta^2\nu_0 t b^2 \exp(-U/kT) [\sinh(\alpha\sigma/kT)]^2}\right\} dc \quad (25)$$

显然，微裂纹分布函数式 (20)–(25) 都满足初始条件和边界条件式 (8)。

微裂纹尺度遵守一定的统计分布规律，在金属和结构陶瓷中都已为实验证明<sup>[16,17]</sup>。但究竟是什么样的分布函数，尚待实验最后肯定。

若上述  $P(c, t)dc$  看成微裂纹的空间概率分布函数，则微裂纹的时间概率分布函数为

$$P(t, c)dt = P(c, t)dt / \int_0^\infty P(c, t)dt \quad (26)$$

它定义为从无限长的时间范围  $(0, \infty)$  内求得长度为  $c$  的微裂纹存在于  $t$  和  $t+dt$  间的概率。显然， $P(t, c)dt$  满足归一化条件  $\int_0^\infty P(t, c)dt = 1$ ，其物理意义是任何长度  $c$  的微裂纹总是存在于无限长的时间内。将式 (23) 代入式 (26)，得疲劳微裂纹的时间概率分布函数为

$$P(N, c)dN \approx \sqrt{\frac{A}{2\pi\eta^2 N}} \exp\left\{-\left(\ln\frac{c}{c_0} - AN\right)^2 / 2\eta^2 AN\right\} dN \quad (27)$$

将式 (25) 代入式 (26)，得延时微裂纹的时间概率分布函数为

$$P(t, c)dt \approx \sqrt{\frac{\nu_0 \exp(-U/kT)}{2\pi\eta^2 t}} \times \exp\left\{-\frac{[c-c_0-\nu_0 t b \exp(-U/kT) \sinh(\alpha\sigma/kT)]^2}{8\eta^2\nu_0 t b^2 \exp(-U/kT) [\sinh(\alpha\sigma/kT)]^2}\right\} dt \quad (28)$$

由式 (27)，(28) 可见， $P(t=0, c) = \delta(c-c_0)$ ， $P(t \rightarrow \infty, c) = 0$ ，前者表示微裂纹长大的起始条件，后者表示在断裂过程中任何长度为  $c$  的微裂纹都不能存在无限长的时间，换言之，固体材料的断裂寿命总是有限的。

## 6 断裂概率

如前所述，整个断裂过程基本上可分为大量微裂纹的成核长大阶段和单个主裂纹的传播阶段，前者是低速的，后者是高速的。由于裂纹是以接近声速的高速在固体材料内传播，所以只要有一条裂纹传播，材料立即断裂。因而把裂纹的传播应力叫做断裂强度或强度，材料的断裂寿命亦主要由低速阶段决定，高速阶段所消耗的时间可以略去。若裂纹的演化是确定性的，则当它满足 (11a) 时，就会开始传播而导致断裂，但由于材料微观结构的不均匀性，

故满足式 (11a) 的裂纹只有一定的传播概率, 未必肯定能传播。

根据概率论, 若  $P(\sigma, t)d\sigma$  为外应力作用  $t$  时一条裂纹在应力  $\sigma$  和  $\sigma+d\sigma$  间传播的概率, 则应有  $P(\sigma, t)d\sigma = P(c, t)|\partial c/\partial\sigma|d\sigma$ , 将式 (11) 或 (11a) 及式 (21), (23), (25) 各代入此式, 即得一条脆性裂纹在应力  $\sigma$  和  $\sigma+d\sigma$  间传播的概率为

$$P(\sigma, \varepsilon)d\sigma = \frac{2}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{N_0 L^2 \gamma E \sigma_1 \varepsilon^m}{(1 - \exp(-a_1 \sigma_1 \varepsilon^m)) \sigma^3} \exp\left[-\frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{N_0 L^2 \gamma E}{\sigma^2}\right] \\ \times \exp\left\{-a_1 \sigma_1 \varepsilon^m \exp\left[-\frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{N_0 L^2 \gamma E}{\sigma^2}\right]\right\} d\sigma \quad (29)$$

一条疲劳裂纹在交变应力振幅  $\sigma_a$  和  $\sigma_a + d\sigma_a$  间传播的概率为

$$P(\sigma_a, N)d\sigma_a \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \eta^2 AN \sigma_a^2}} \exp\left\{-\left[\ln \frac{G_{1c} E}{\pi(1-\nu^2) c_0 \sigma_a^2} - AN\right]^2 / 2\eta^2 AN\right\} d\sigma_a \quad (30)$$

一条延时裂纹在应力  $\sigma$  和  $\sigma+d\sigma$  间传播的概率为

$$P(\sigma, t)d\sigma \approx \frac{G_{1c} E}{\sqrt{2\pi^3 \eta^2 \nu_0 t \exp(-U/kT) (1-\nu^2) \sigma^3 b \sinh(\alpha\sigma/kT)}} \\ \times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1-\nu^2) \sigma^2} - c_0 - \nu_0 t b \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2 \nu_0 t b^2 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} d\sigma \quad (31)$$

将式 (11a) 代入式 (27), (28), 可得一条疲劳裂纹在振幅为  $\sigma_a$  的交变应力作用下于  $N$  和  $N+dN$  周间传播的概率为

$$P(N, \sigma_a)dN \approx \sqrt{\frac{A}{2\pi \eta^2 N}} \exp\left\{-\left[\ln \frac{G_{1c} E}{\pi(1-\nu^2) c_0 \sigma_a^2} - AN\right]^2 / 2\eta^2 AN\right\} dN \quad (32)$$

一条延时裂纹在应力  $\sigma$  作用下于  $t$  和  $t+dt$  间传播的概率为

$$P(t, \sigma)dt = \sqrt{\frac{\nu_0 \exp(-U/kT)}{2\pi \eta^2 t}} \\ \times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1-\nu^2) \sigma^2} - c_0 - \nu_0 t b \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2 \nu_0 t b^2 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} dt \quad (33)$$

显然, 式 (29)–(33) 都满足归一化条件。

根据导致断裂的最小强度原理 (或叫最弱链模型), 固体材料在强度 0 和  $\sigma$  间发生断裂的概率为<sup>[6,7]</sup>

$$P_f(\sigma) = 1 - \left[1 - \int_0^\sigma P(\sigma, t) d\sigma\right]^{MV} \approx 1 - \exp\left[-MV \int_0^\sigma P(\sigma, t) d\sigma\right] \quad (34)$$

这儿  $V$  为材料的体积,  $P_f(\sigma)$  可直接叫做应力断裂概率。显然,  $P_f(\sigma=0) = 0$ ,  $P_f(\sigma \rightarrow \infty) = 1$ , 其物理意义为: 任何材料不受外应力作用时总不会断裂, 随着外应力的增加, 断裂概率不断增大, 而当外应力无限大时总一定断裂。将式 (29), (30), (31) 代入式 (34)

可得脆性断裂、疲劳断裂和延时断裂的应力断裂概率的具体表达式<sup>[2,9;10,13]</sup>。

同样，结构材料在应力  $\sigma$  作用下于 0 和  $t$  时间内发生断裂的概率为

$$P_f(t) = 1 - \left[ 1 - \int_0^t P(t, \sigma) dt \right]^{MV} \approx 1 - \exp \left[ -MV \int_0^t P(t, \sigma) dt \right] \quad (35)$$

$P_f(t)$  可直接叫做时间断裂概率。显然，当  $\sigma$  大于某个临界阈应力时，将有  $P_f(t=0) = 0$ ， $P_f(t \rightarrow \infty) = 1$ ，其物理意义为：当外应力未作用时材料总不会断裂，而当外应力大于某个临界应力时，随着外应力作用时间的延长，断裂概率不断增大，而当外应力作用时间无限长时，材料总要发生断裂，即任何材料的断裂寿命总是有限的。将式 (32)，(33) 代入式 (35)，可得疲劳断裂和延时断裂的时间断裂概率的具体表达式<sup>[10,13]</sup>。

断裂概率亦可叫做失效概率或故障概率，特别是  $P_f(t)$ ，可认为它等价于连续损伤力学<sup>[18]</sup> 中的损伤变量  $\omega(t)$ ，即<sup>[12]</sup>

$$\omega(t) \equiv P_f(t) \quad (36)$$

并称之为损伤断裂概率。损伤是断裂前阶段微裂纹演化程度的表现，断裂则是主裂纹直接传播的结果。将损伤和断裂两者结合在一起的损伤断裂概率，则表示由于微裂纹引起的损伤演化至其极限态主裂纹开始传播而导致材料断裂的概率。由式 (35)，(36) 得损伤断裂动力学方程为

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M_1(t)P(t, \sigma)}{(1-\omega)(1/M_1-1)} + \frac{\dot{M}_1(t)}{M_1(t)} (1-\omega) \ln(1-\omega) \quad (37)$$

其中  $M_1(t) = M(t)V$ 。当  $\dot{M}_1(t) = 0$ ，即材料内可能导致断裂的裂纹数不随时间变化时，则式 (37) 变为

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M_1 P(t, \sigma)}{(1-\omega)(1/M-1)} \quad (38)$$

对于蠕变断裂，可以证明<sup>[12]</sup>，Rabotnov-Kachanov 损伤动力学方程仅是式 (38) 的一种近似表示。这样，式 (36)–(38) 就可能给损伤力学中的损伤变量及其动力学方程一种新的普适的、自洽的、微观机理与宏观特性相结合的统计定义。

## 7 可靠性

现在来讨论结构材料在外应力作用下仍能安全承载而不发生断裂的概率，即所谓材料在外应力作用下的可靠性。由于存在着应力和时间两种断裂概率，故亦可引入两种对应的可靠性，其精确定义如下：

①材料在间隔为  $(0, \sigma)$  的外应力作用下于  $t$  时仍能安全承载而不发生断裂的概率。

②材料在外应力  $\sigma$  作用下于  $(0, t)$  时间内仍能安全承载而不发生断裂的概率。

简言之，前者叫应力可靠性，以  $R(\sigma)$  表示之，后者叫时间可靠性，以  $R(t)$  表示之。

按此定义及式 (34)，(35)，应有

$$R(\sigma) = 1 - P_f(\sigma) = \left[ 1 - \int_0^\sigma P(\sigma, t) d\sigma \right]^{MV} \approx \exp \left[ -MV \int_0^\sigma P(\sigma, t) d\sigma \right] \quad (39)$$

$$R(t) = 1 - P_f(t) = \left[ 1 - \int_0^t P(t, \sigma) dt \right]^{MV} \approx \exp \left[ -MV \int_0^t P(t, \sigma) dt \right] \quad (40)$$

显然， $R(\sigma=0) = 1$ ， $R(\sigma \rightarrow \infty) = 0$ ，其物理意义为：材料在无外应力作用时总是安全可靠的，随着外应力的增加，可靠性不断降低，而当外应力无限大时总要发生断裂，不再安全可



靠。同样，当外应力大于某个临界值时，将有  $R(t=0) = 1$ ， $R(t \rightarrow \infty) = 0$ ，其物理意义为：当外应力未作用时材料总是安全可靠的，而当外应力大于某个临界值时，随着外应力作用时间的延长，可靠性不断降低，而当外应力作用时间无限长时，材料总要断裂，不再安全可靠。

由式 (39)，即可求得结构材料在外应力  $\sigma$  作用下于  $t$  时每单位应力发生断裂的概率为

$$\lambda(\sigma) = -\frac{1}{R(\sigma)} \frac{dR(\sigma)}{d\sigma} \approx MV P(\sigma, t) \quad (41)$$

由式 (40)，即可求得结构材料在外应力  $\sigma$  作用下于  $t$  时每单位时间发生断裂的概率为

$$\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} = MV P(t, \sigma) \quad (42)$$

$\lambda(t)$  亦叫失效率或故障率。

将式 (29)，(30)，(31) 代入式 (39)，可得脆性断裂的应力可靠性的表达式为

$$R(\sigma) \approx \exp\left\{-M(\varepsilon)V \left[1 - \exp\left[-\alpha_1 \sigma \exp\left[-\frac{1}{\pi(1-\nu^2)}\left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{N_0 L^2 \gamma E}{\sigma^2}\right]\right]\right]\right\} \quad (43)$$

疲劳断裂的应力可靠性的表达式为

$$R(\sigma_0) \approx \exp\left\{-M(N)V \int_0^{\sigma_0} \sqrt{\frac{2}{\pi \eta^2 AN \sigma_a^2}} \exp\left\{-\left[\ln \frac{G_{1c} E}{\pi(1-\nu^2)c_0 \sigma_a^2} - AN\right]^2 / 2\eta^2 AN\right\} d\sigma_a\right\} \quad (44)$$

延时断裂的应力可靠性的表达式为

$$R(\sigma) \approx \exp\left\{-\frac{MVG_{1c}E}{\sqrt{2\pi^3 \eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{U}{kT}\right)(1-\nu^2)b}} \int_0^{\sigma} \frac{1}{\sigma^3 \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)} \times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c}E}{\pi(1-\nu^2)\sigma^2} - c_0 - \nu_0 tb \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2 \nu_0 tb^2 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} d\sigma\right\} \quad (45)$$

将式 (32)，(33) 代入式 (40)，可得疲劳断裂的时间可靠性的表达式为

$$R(N) \approx \exp\left\{-M(N)V \int_0^N \sqrt{\frac{A}{2\pi \eta^2 N}} \exp\left\{-\left[\ln \frac{G_{1c} E}{\pi(1-\nu^2)c_0 \sigma_a^2} - AN\right]^2 / 2\eta^2 AN\right\} dN\right\} \quad (46)$$

延时断裂的时间可靠性的表达式为

$$R(t) \approx \exp\left\{-MV \sqrt{\frac{\nu_0 \exp(-U/kT)}{2\pi \eta^2}} \times \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c}E}{\pi(1-\nu^2)\sigma^2} - c_0 - \nu_0 tb \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2 \nu_0 tb^2 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} dt\right\} \quad (47)$$

同样，将式 (29)，(30)，(31) 代入式 (41)，式 (33)，(32) 代入式 (42)，可得  $\lambda(\sigma)$

和  $\lambda(t)$  的表达式。

为了给出可靠性的解析表达式, 应力可靠性式 (43), (44), (45) 可进一步近似简化为<sup>[8]</sup>

$$R(\sigma) \approx \exp\left\{-\left[\Gamma\left(\frac{n_1+1}{n_1}\right)\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}\right]^{n_1}\right\} \quad (48)$$

其可  $\bar{\sigma}$  为平均断裂强度,  $\Gamma((n_1+1)/n_1)$  为 Gamma 函数。

对于脆性断裂,  $n_1 = 14$ ,

$$\bar{\sigma} \approx \frac{1}{1.7(M(\varepsilon_f)V)^{1/14}} \left[ \frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} N_0 L^2 \gamma E \right]^{1/2} \quad (49)$$

对于疲劳断裂,  $n_1 = 8(1+1/\beta_1)$ ,

$$\bar{\sigma}_a^{(1+1/\beta_1)} \approx \frac{N_0 L^2 G_{1c} \sigma_0^{1/\beta_1}}{\eta^2 N} \left[ \ln \frac{G_{1c} E}{\pi(1-\nu^2)c_0 \sigma_a^2} \right]^2 \left( \frac{a}{M(N_f)V} \right)^{1/8} \quad (50)$$

其中  $a = 10^{-3}$ 。

对于延时断裂, 仅当  $\frac{\alpha\sigma}{kT} \ll 1$  和  $\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right) \approx \frac{\alpha\sigma}{kT}$  时, 可类似式 (49), (50) 求出其  $n_1$  和  $\bar{\sigma}$ 。

时间可靠性式 (46), (47) 可进一步近似简化为<sup>[10,13]</sup>

$$R(t) \approx \exp\left\{-\left[\Gamma\left(\frac{n_2+1}{n_2}\right)\frac{t}{\tau}\right]^{n_2}\right\} \quad (51)$$

其中  $\tau$  为平均断裂寿命。

对于疲劳断裂,  $n_2 = 8$ ,  $\tau$  由式 (67) 表示之。对于延时断裂,  $n_2 = 15$ ,  $\tau$  由式 (68), (69), (71) 表示之。

## 8 宏观力学量的统计分布函数

如所周知, 对于宏观成分、工艺条件及外形尺寸相同的固体, 由于其内部微观成分、缺陷及显微结构的不均匀性, 各个试样的断裂强度、断裂韧度及断裂寿命等与断裂有关的力学量是互不相同的, 有规律分散的, 充分显示其固有的统计特性。为了描述断裂的这种统计规律, 我们引入材料试样系综概念, 它表示宏观成分、工艺条件及外形尺寸相同的大量材料试样的集合, 统计分布函数  $W_f(F)dF$  就是表示具有某个与断裂有关的力学量  $F$  的试样系综在  $F$  和  $F+dF$  间的概率。

根据上面讨论结果, 即可算出各个  $W_f(F)dF$  的表达式。

由式 (34), (39) 得断裂强度的统计分布函数为

$$\begin{aligned} W_f(\sigma)d\sigma &= \frac{\partial P_f(\sigma)}{\partial \sigma} d\sigma = -\frac{\partial R(\sigma)}{\partial \sigma} d\sigma \\ &\approx M(t)V \exp\left[-M(t)V \int_0^\sigma P(\sigma, t) d\sigma\right] P(\sigma, t) d\sigma \end{aligned} \quad (52)$$

它表示结构材料试样系综的断裂强度在  $\sigma$  和  $\sigma+d\sigma$  间的概率。显然,  $W_f(\sigma)d\sigma$  满足归一化条件  $\int_0^\infty W_f(\sigma)d\sigma = 1$ , 将式 (29), (30), (31) 或式 (43), (44), (45) 代入式 (52), 可

得脆性断裂强度统计分布函数的表达式为

$$\begin{aligned}
 W_f(\sigma)d\sigma \approx & \frac{2}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{M(\varepsilon)V\alpha_1 N_0 L^2 \gamma E}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{N_0 L^2 \gamma E}{\sigma^2}\right] \\
 & \times \exp\left\{-\alpha_1 \sigma \exp\left[-\frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{N_0 L^2 \gamma E}{\sigma^2}\right]\right\} \\
 & \times \exp\left\{-M(\varepsilon)V \left[1 - \exp\left[-\alpha_1 \sigma \exp\left[-\frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{N_0 L^2 \gamma E}{\sigma^2}\right]\right]\right]\right\} d\sigma \quad (53)
 \end{aligned}$$

疲劳断裂强度（振幅）统计分布函数的表达式为

$$\begin{aligned}
 W_f(\sigma_a)d\sigma_a \approx & M(N)V \sqrt{\frac{2}{\pi\eta^2 AN\sigma_a^2}} \exp\left\{-\left[\ln \frac{G_{1c}E}{\pi(1-\nu^2)c_0\sigma_a^2} - AN\right]^2 / 2\eta^2 AN\right\} \\
 & \times \exp\left\{-M(N)V \int_0^{\sigma_a} \sqrt{\frac{2}{\pi\eta^2 AN\sigma_a^2}} \exp\left\{-\left[\ln \frac{G_{1c}E}{\pi(1-\nu^2)c_0\sigma_a^2} - AN\right]^2 / 2\eta^2 AN\right\} d\sigma_a\right\} d\sigma_a \quad (54)
 \end{aligned}$$

延时效断裂强度统计分布函数的表达式为

$$\begin{aligned}
 W_f(\sigma)d\sigma = & \frac{M(t)V G_{1c}E}{\sqrt{2\pi^3\eta^2\nu_0 t \varepsilon \exp(-U/kT)} \cdot (1-\nu^2)\sigma^3 b \sinh(\alpha\sigma/kT)} \\
 & \times \exp\left\{-\frac{M(t)V G_{1c}E}{\sqrt{2\pi^3\eta^2\nu_0 t \varepsilon \exp(-U/kT)} \cdot (1-\nu^2)b} \int_0^\sigma \frac{1}{\sigma^3 \sinh(\alpha\sigma/kT)}\right. \\
 & \times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c}E}{\pi(1-\nu^2)\sigma^2} - c_0 - \nu_0 t b \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2\nu_0 t b^2 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} d\sigma \\
 & \left. \times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c}E}{\pi(1-\nu^2)\sigma^2} - c_0 - \nu_0 t b \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2\nu_0 t b^2 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} d\sigma \quad (55)
 \end{aligned}$$

由式 (35)，(40) 得断裂寿命的统计分布函数为

$$\begin{aligned}
 W_f(t)dt = & \frac{\partial P_f(t)}{\partial t} dt = -\frac{\partial R(t)}{\partial t} dt \\
 \approx & M(t)V \exp\left[-M(t)V \int_0^t P(t,\sigma)dt\right] P(t,\sigma)dt \quad (56)
 \end{aligned}$$

它表示结构材料试样系综的断裂寿命在  $t$  和  $t+dt$  间的概率。显然， $W_f(t)dt$  满足归一化条件  $\int_0^\infty W_f(t)dt = 1$ 。注意，在得到式 (56) 及其归一化条件时是略去了  $M(t)$  的影响。将式 (32)，(33) 或式 (46)，(47) 代入式 (56)，可得疲劳断裂寿命统计分布函数的表达式为

$$\begin{aligned}
W_f(N)dN &\approx M(N)V \sqrt{\frac{A}{2\pi\eta^2 N}} \exp\left\{-\left[\ln \frac{G_{1c}E}{\pi(1-\nu^2)c_0\sigma_a^2} - AN\right]^2 / 2\eta^2 AN\right\} \\
&\times \exp\left\{-M(N)V \int_0^N \sqrt{\frac{A}{2\pi\eta^2 N}} \exp\left\{-\left[\ln \frac{G_{1c}E}{\pi(1-\nu^2)c_0\sigma_a^2} - AN\right]^2 / 2\eta^2 AN\right\} dN\right\} dN
\end{aligned} \tag{57}$$

延时断裂寿命统计分布函数的表达式为

$$\begin{aligned}
W_f(t)dt &\approx M(t)V \sqrt{\frac{\nu_0 \exp(-U/kT)}{2\pi\eta^2 t}} \exp\left\{-M(t)V \sqrt{\frac{\nu_0 \exp(-U/kT)}{2\pi\eta^2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}}\right. \\
&\times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c}E}{\pi(1-\nu^2)\sigma^2} - c_0 - \nu_0 t b \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}{8\eta^2 \nu_0 t b^2 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} dt \\
&\times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c}E}{\pi(1-\nu^2)\sigma^2} - c_0 - \nu_0 t b \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]}{8\eta^2 \nu_0 t b^2 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \left[\sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right)\right]^2}\right\} dt
\end{aligned} \tag{58}$$

断裂韧度的统计分布函数为<sup>[2,9]</sup>

$$\begin{aligned}
W_f(K)dK &\approx \pi(1-\nu^2)(1+m) \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{M(\epsilon)V\alpha_1 N_0 L^2 \gamma E}{\theta K^{(3m+1)/(1+m)}} \exp\left[-\frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2}\right. \\
&\times \left.\frac{N_0 L^2 \gamma E}{\theta^2 K^{4m/(1+m)}}\right] \exp\left\{-\alpha_1 \theta K^{2m/(1+m)} \exp\left[-\frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{N_0 L^2 \gamma E}{\theta^2 K^{4m/(1+m)}}\right]\right\} \\
&\times \exp\left\{-M(\epsilon)V \left[1 - \exp\left\{-\alpha_1 \theta K^{2m/(1+m)} \exp\left[-\frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{N_0 L^2 \gamma E}{\theta^2 K^{4m/(1+m)}}\right]\right\}\right]\right\} dK
\end{aligned} \tag{59}$$

其中

$$\theta = \left[ \frac{8(1-\nu^2)}{3LE} \left(\frac{b}{L}\right)^{1/2} \sigma_1^{1/m} \right]^{m/(1+m)}$$

$W_f(K)dK$  表示材料试样系综的断裂韧度  $K$  在  $K$  和  $K+dK$  间的概率, 它满足归一化条件

$$\int_0^\infty W_f(K)dK = 1$$

将应力可靠性的粗糙近似式 (48) 代入式 (52) 得脆性和疲劳断裂强度统计分布函数的粗糙表达式为

$$W_f(\sigma)d\sigma \approx n_1 \left[ \frac{\Gamma((n_1+1)/n_1)}{\sigma} \right]^{n_1} \sigma^{n_1-1} \exp\left\{-\left[\Gamma\left(\frac{n_1+1}{n_1}\right) \frac{\sigma}{\sigma}\right]^{n_1}\right\} d\sigma \tag{60}$$

将时间可靠性的粗糙近似式 (51) 代入式 (56), 得疲劳和延时断裂寿命统计分布函数的粗糙表达式为

$$W_f(t)dt \approx n_2 \left[ \frac{\Gamma((n_2+1)/n_2)}{\tau} \right]^{n_2} t^{n_2-1} \exp\left\{-\left[\Gamma\left(\frac{n_2+1}{n_2}\right)\frac{t}{\tau}\right]^{n_2}\right\} dt \quad (61)$$

式 (60), (61) 正是熟知的 Weibull 分布。可见, 断裂强度和断裂寿命的 Weibull 分布只是较精确的统计分布 (53), (54), (55), (57), (58) 的一种更为粗糙的近似。

断裂韧度的统计分布函数式 (59) 同样可变为更为粗糙的近似——Weibull 分布

$$W_f(K)dK \approx n_3 \left[ \frac{\Gamma((n_3+1)/n_3)}{\bar{K}} \right]^{n_3} K^{n_3-1} \exp\left\{-\left[\Gamma\left(\frac{n_3+1}{n_3}\right)\frac{K}{\bar{K}}\right]^{n_3}\right\} dK \quad (62)$$

其中  $n_3 = 28m/(1+m)$ ,  $\bar{K}$  为平均断裂韧度, 其表达式为

$$\bar{K} \approx \frac{\Gamma((n_3+1)/n_3)}{(M(\varepsilon)V)^{1/n_3}} \left[ \frac{3}{8(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{LE}{\sigma_1^{1/m}} \right]^{1/2} \left[ \frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} N_0 L^2 \gamma E \right]^{(1+m)/4m} \quad (63)$$

用类似式 (59) 的方法, 还可求得裂纹扩展力和延伸率的统计分布函数<sup>[8,9]</sup>, 这儿不再赘述。

脆性断裂强度、断裂韧度和疲劳断裂寿命的统计分布已为实验肯定, 只是统计分布函数的精确形式, 尚待实验最后肯定。至于疲劳和延时断裂强度、延时断裂寿命等是否遵守本文预言的统计分布, 更有待今后实验的检验。

### 9 统计平均值和统计涨落

上面已引入材料试样系综概念, 为了使各有关的力学量能准确地判断固体材料的断裂特性, 需求试样系综的统计平均值。因此可以认为: 反映固体材料断裂特性的宏观力学量应是材料试样系综的相应的力学量的统计平均值。设  $F$  是某个与断裂有关的力学量, 则其统计平均值为

$$\bar{F} = \int_0^\infty F W_f(F) dF = \int_0^\infty F(\sigma) W_f(\sigma) d\sigma \quad (64)$$

其中统计分布函数  $W_f(F)dF$  由式 (53), (54), (55), (57), (58), (59) 表示之。下面就是各力学量统计平均值的近似结果。

脆性断裂强度

$$\bar{\sigma}_f \approx \sigma_i + \left[ \frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{N_0 L^2 \gamma E}{\ln(M(\varepsilon_f)V)} \right]^{1/2} \quad (65)$$

其中  $\sigma_i$  为位错的内阻力。

断裂韧性

$$\bar{K}_{Ic} \approx \left[ \frac{3}{8(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{LE}{\sigma_1^{1/m}} \right]^{1/2} \left[ \frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{N_0 L^2 \gamma E}{\ln(M(\varepsilon_f)V)} \right]^{(1+m)/4m} \quad (66)$$

式 (65), (66) 与式 (49), (63) 相比, 只是其结果稍精确些。

疲劳断裂寿命

$$\bar{N}_f \approx \frac{N_0 L^2 G_{1c} \sigma_0^{1/3}}{2.87 \eta^2 \sigma_a^{(1+1/3)}} \left[ \ln \frac{G_{1c} E}{\pi(1-\nu^2) c_0 \sigma_a^2} \right]^2 \left( \frac{2a}{M(N_f)V} \right)^{1/3} \quad (67)$$

延时断裂寿命

$$\tau \approx \bar{t}_f \approx \frac{\tau_0}{2\eta^2} \left( \frac{\sqrt{\pi} \eta^2 \theta}{M(t)V} \right)^{1/15} \left( \frac{G_{1c} E}{\pi(1-\nu^2) b \sigma^2} \right)^{29/15} \exp\left(\frac{U}{kT}\right) \left[ \sinh\left(\frac{\alpha\sigma}{kT}\right) \right]^{-29/15} \quad (68)$$

其中  $\theta_1 = 10^{-10}$ ,  $\tau_0 = \nu_0^{-1}$ .

当  $\alpha\sigma/kT \gg 1$  时, 延时断裂寿命式 (68) 变为

$$\tau \approx \tau_0 \exp[(U - \gamma\sigma)/kT] \quad (69)$$

其中

$$\gamma\sigma = \frac{29}{15} \alpha\sigma + kT \ln \left[ 2\eta^2 \left( \frac{\pi(1-\nu^2)b\sigma^2}{G_{1c}E} \right)^{29/15} \left( \frac{M(t)V}{\sqrt{\pi}\eta^2\theta_1} \right)^{1/15} \right] \quad (70)$$

式 (69) 就是有名的 Zhurkov 寿命公式<sup>[19]</sup>.

当  $\alpha\sigma/kT \ll 1$  时, 延时断裂寿命 (68) 变为

$$\tau \approx \frac{\tau_0}{8\eta^2} \left( \frac{2\sqrt{\pi}\eta^2\theta_1}{M(t)V} \right)^{1/15} \left( \frac{kTG_{1c}E}{\pi(1-\nu^2)ba} \right)^{29/15} \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \sigma^{-58/15} \quad (71)$$

疲劳断裂强度的统计平均值已如式 (50) 所示, 其他如延时断裂强度、裂纹扩展力、延伸率等的统计平均值都可由式 (64) 求得.

为了计算遵守统计规律的各力学量的分散性, 我们利用熟知的统计涨落公式,

力学量  $F$  的平均平方涨落公式为

$$D(F) = \overline{F^2} - \bar{F}^2 \quad (72)$$

其中

$$\bar{F}^2 = \int_0^\infty F^2 W(F) dF \quad (73)$$

$F$  的相对涨落公式为

$$\frac{\sqrt{D(F)}}{\bar{F}} = \frac{\sqrt{\overline{F^2} - \bar{F}^2}}{\bar{F}} \quad (74)$$

由式 (64), (72), (73), (74) 就可算得各力学量的统计涨落, 其近似结果如下.

脆性断裂强度, 其平均平方涨落和相对涨落分别为

$$D(\sigma_f) \approx \frac{\bar{\sigma}_f^2}{4[\ln(M(\varepsilon_f)V)]^2} \quad (75)$$

$$\frac{\sqrt{D(\sigma_f)}}{\bar{\sigma}_f} \approx \frac{1}{2[\ln(M(\varepsilon_f)V)]} \quad (76)$$

断裂韧度, 其平均平方涨落和相对涨落分别为

$$D(K_{1c}) \approx \frac{(m+1)^2 \bar{K}_{1c}^2}{16m^2[\ln(M(\varepsilon_f)V)]^2} \quad (77)$$

$$\frac{\sqrt{D(K_{1c})}}{\bar{K}_{1c}} \approx \frac{m+1}{4m[\ln(M(\varepsilon_f)V)]} \quad (78)$$

疲劳断裂寿命, 其平均平方涨落和相对涨落分别为

$$D(N_f) \approx 2.6 \times 10^{-2} \left[ 1 + \frac{3.76}{\eta^2} \left( \frac{2a}{M(N_f)V} \right)^{1/8} \ln \frac{G_{1c}E}{\pi(1-\nu^2)c_0\sigma_a^2} \right]^2 N_f \quad (79)$$

$$\frac{\sqrt{D(N_f)}}{N_f} \approx 0.16 \left[ 1 + \frac{3.76}{\eta^2} \left( \frac{2a}{M(N_f)V} \right)^{1/8} \ln \frac{G_{1c}E}{\pi(1-\nu^2)c_0\sigma_a^2} \right] \quad (80)$$

延时断裂寿命, 其平均平方涨落和相对涨落分别为

$$D(t_f) \approx 2.2 \times 10^{-2} \left[ 1 + \frac{3.76}{\eta^2} \left( \frac{2a}{M(t_f)V} \right)^{1/8} \frac{G_{1c}E}{2\pi(1-\nu^2)b\sigma^2 \sinh(\alpha\sigma/kT)} \right]^2 \tau^2 \quad (81)$$

$$\frac{\sqrt{D(t_f)}}{\tau} \approx 0.15 \left[ 1 + \frac{3.76}{\eta^2} \left( \frac{2a}{M(t_f)V} \right)^{1/8} \frac{G_{1c}E}{2\pi(1-\nu^2)b\sigma^2 \sinh(\alpha\sigma/kT)} \right] \quad (82)$$

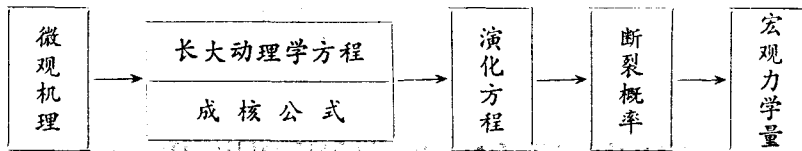
其他如疲劳断裂强度、延时断裂强度、裂纹扩展力、延伸率等的平均平方涨落和相对涨落都可由上述类似方法求得。

## 10 结语和讨论

本工作的目的是提供一套较为系统的理论方法, 以建立一个能从微裂纹(或微空洞)演化的微观机理出发, 推导出描述宏观断裂行为的断裂统计理论。它不仅可用于本文重点讨论的金属的脆性断裂、疲劳断裂和延时断裂, 实际上同样可广泛地把结构陶瓷断裂<sup>[14]</sup>和环境断裂(如氢脆、氢脆、腐蚀疲劳等)等都统一在这个理论框架内。

正如任何一种理论都有其基本方程和公式一样, 当以位错机理为基础时, 本理论中下列4个方程和公式是基本的:

- ①微裂纹长大动力学方程, 它来自位错机理和能量守恒原理;
- ②微裂纹成核公式, 它来自位错机理;
- ③微裂纹演化方程, 它来自微裂纹数目平衡原理和材料微观结构的不均匀性;
- ④断裂概率公式, 它来自最弱链模型。



这4个基本方程和公式之间的关系及微观机理和宏观力学量之间的过渡形式如上图所示。其中演化方程起着承上启下的核心作用, 它的系数来自基于微观机理的微裂纹成核长大, 而其解则通过最弱链模型与宏观力学量相联系。

从这4个方程和公式出发, 即可从理论上统一导出微裂纹长大速率公式(包括 Paris 经验公式, Forman 经验公式, 高速传播公式等), 微裂纹分布函数, 可靠性, 损伤断裂动力学方程, 失效率, 强度、韧度和寿命等各种与断裂有关的力学量的统计分布函数(包括 Weibull 统计分布), 各力学量的统计平均值(包括 Zhurkov 寿命经验公式等), 统计涨落, 尺寸效应等。

所有与断裂有关的公式和表达式都用同一组物理参量  $N_0$ ,  $L$ ,  $\sigma_i$  (或  $\sigma_0$ ),  $m$  (或  $\beta_1$ ),  $\gamma$ ,  $E$ ,  $V$  等表示之。随着将来加工硬化理论的发展,  $\sigma_i$  和  $m$  亦可能由  $N_0$ ,  $L$  等参量表示之。

与现有其他断裂理论相比<sup>[17,18,21,22]</sup>, 本工作有下列两个主要特点:

①从理论框架来说, 突出了微裂纹动力学、统计性以及微观机理与宏观特性相结合这4者间的有机联系。这样一种以微裂纹演化为核心, 以微观(位错、空位、原子键等)机理为基础、通过统计性而与宏观力学量相联系的整体观点方法, 适用于多种断裂类型, 比较符合断裂过程的客观实际, 理论上较易于进一步发展。

②从具体结果来说, 本文导出的各种表达式, 观点统一, 物理意义清楚, 概括了断裂过

程微观和宏观的各个重要特性, 不仅能广泛地解释已有的主要实验结果, 而且提出了一些预言。这亦是现有其他断裂理论难以做到的。

当然, 由于断裂过程甚为复杂, 如非点模型、多体、非均匀、非平衡、非线性、多层次、非高斯非马氏过程等, 作为新的理论探索, 只能围绕本质问题作出必要而又合理的近似, 以达到预期的目标。为此, 本理论今后应在力求与实验定量地相符的前提下, 改善近似, 减少参数, 使之能逐步用于指导结构材料强度、韧度和寿命的设计。

### 参 考 文 献

- 1 邢修三. 物理学报, **22** (1966): 487
- 2 —. 同上, **29** (1980): 718
- 3 —. 同上, **30** (1981): 1615
- 4 —. 同上, **32** (1983): 1255
- 5 —. 同上, **35** (1986): 741
- 6 —. 中国科学, **A5** (1986): 501
- 7 —. 同上, **A8** (1986): 840
- 8 —. 力学进展, **16** (1986): 495
- 9 Xing X S. *Engng. Fracture Mech.*, **24** (1986): 45
- 10 —. *ibid.*, **26** (1987): 393
- 11 —. *ibid.*, **32** (1989): 935
- 12 —. *ibid.*, **37** (1990): 1099
- 13 邢修三. 物理学报, **39** (1990): 1602
- 14 Xing X S. *Engng. Fracture Mech.*, **37** (1990): 1089
- 15 Kottalam J. et al. *J. Stat. Phys.*, **42** (1987): 979
- 16 Curran D R, Seaman L, Shockey D A. *Phys. Rept.*, **147** (1987): 255
- 17 Provan J W (ed). *Probabilistic Fracture Mechanics and Reliability*, Martinus Nijhoff Publishers (1987)
- 18 Kachanov L M. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers (1986)
- 19 Zhurkov S N. *Int. J. Fracture*, **26** (1984): 295
- 20 Diao X X, Xing X S. *Chin. J. Met. Sci. Technol.*, **3** (1987): 223
- 21 Kanninen M F, Popelar C H. *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford Univ. Press (1985)
- 22 Lardner R W. *Mathematical Theory of Dislocations and Fracture*, University of Toronto Press (1974)

## THE FOUNDATION OF NONEQUILIBRIUM STATISTICAL FRACTURE MECHANICS

Xing Xiu-san

Beijing Institute of Technology

**Abstract** Based on microcrack evolution equation and combined with the microcrack growth rate and the nucleation rate obtained from microscopic mechanism and the principle of the minimum strength, the microcrack distribution function, fracture probability, reliability, failure rate, kinetic equation of damage-fracture, statistical distribution function and statistical average value of various fracture-related macromechanical quantities such as strength, toughness and life etc are derived in a unified fashion. This theory can be widely applied to various kinds of fracture such as brittle fracture, fatigue, delayed fracture, and environmental fracture of metals and structural ceramics. This paper is a brief overview on the above-mentioned main idea, method and result through the discussion of brittle, fatigue and delayed fracture of metals.

**Keywords** micromechanism; microcrack; evolution equation; distribution function; material sample ensemble; macromechanical quantity