动力分析中的边界元法(Ⅰ)

D. E. Beskos
希腊 Patras 大学土木工程系

提要 提供了线弹性动力学问题数值解的边界元法的评论. 在频域和时域中从直接边界元法观点叙述了三维和二维弹性动力学的积分表述和相应的数值解. 也考虑了由标量波方程控制的反平面运动的特殊情形. 对上述所有情形都考虑了谐和的和暂态的动力扰动. 简要讨论了材料行为的某些特征如粘弹性, 非均匀性, 各向异性和多孔弹性等. 也评论了某些其他非常规边界元法以及由边界元和有限元相结合得出的混合格式. 所有这些边界元方法论可应用于: 包括地下结构和地上结构、基础、桩和隔振装置等的动力分析的土壤-结构相互作用问题; 裂纹扩展和由裂纹引起的波绕射问题; 以及涉及梁、板、壳的动力学问题. 最后, 作了迄今在动力分析方面取得的进展的简要评价, 并指出了需要进一步研究的一些领域.

引 言

最近15年中出现了边界元法(BEM)作为求解应用力学中一大类问题的最有效的数值方法之一[51,26,52]. 边界元法的两个主要优点是问题的维数减少1个和对于一大类问题运用此法时的高准确度. 这些优点在弹性动力学中更明显, 特别是当所关心的域是无限或半无限, 和/或存在应力集中或裂纹之时.

数值方法如有限元法(FEM)和有限差分法(FDM)等的域型, 不仅要求所关心的域表面的离散化(如同边界元法的情形一样), 而且还要求域内部的离散化, 由此增加了建立模型的要求, 并对于准确度相差不大的情形增大了问题的规模, 对于无限域或半无限域还产生了由于在人工边界上的波反射而出现的问题. 另一方面, 边界元法只离散所关心域的表面, 对于无限域或半无限域可自动计入无限远处的辐射条件, 还可以准确地处理涉及应力集中的问题而无需其他附加手段. 而且所有这些优点在用三个空间维来表征的问题中变得更为明显. 关于边界元法的优点和缺点的更全面的讨论, 有兴趣的读者可查阅[39].

在零体力和零初条件的假定下, 应用于弹性动力学的常规直接边界元法是从位移场的表面积分表达式开始, 它既可以直接从弹性动力学的经典著作中获得, 也可以间接通过使用动力学互易定理或加权残值法获得. 借助基本解或自由空间Green函数, 此积分表达式可提供以位移和拉力的边界值表示的位移场. 在通过极限过程将它应用在边界上后, 此方程变为对未知的边界位移和拉力可数值求解的边界积分方程. 这些边界值随后借助于解的原始积分表达式可用来计算出域的任意内点处的位移和拉力. 然而, 非零体力和/或非零初条件的情形需要对含已知被积函数的某些体积分作附加计算.

在弹性动力学的包括积分方程法的现有经典工作中, 可以提到的有 Love[178], Morse

& Feshbach[206], Pao & Mow[234] Achenbach[5], Eringen & Suhubi[113], Graff[122], Miklowitz[199] 的书，以及 Wheeler & Sternberg[314], Pao & Varatharajulu[235], Pao[236] 的文章．讨论边界元法应用于弹性动力学的一般的和专门的书有 Brebbia & Walker[61], Banerjee & Butterfield[26], Brebbia, Telles & Wrobel[52], Kitahara[152], Wolf[321], Beskos & Manolis[41].

尽管关于弹性动力学的基本积分方程为人所知已有许多年，但系统使用它们来求得数值解却是较近的事情．显然 1963 年 Banaugh & Goldsmith[24] 讨论稳态平面弹性动力学的文章是边界元法在动力学方面的首次应用，尽管 1962 年 Friedman & Shaw[116]，1963 年 Banaugh & Goldsmith[23] 在声学方面的工作，也可以看做反平面弹性动力学方面的工作，因为他们讨论的都是标量波方程．1967 年 Rizzo[249] 关于弹性静力学的一篇开拓性的文章介绍了直接边界元法，基本上标志着此法系统地发展及其在应用力学中广泛应用的开端．

结合 Laplace 变换去利用直接边界元法，使得 Cruse & Rizzo[77] 和 Cruse[78] 在 1968 年第一次解出了暂态半平面波的传播问题．他们的成果的一种改进形式后来被 Manolis & Beskos[184-186] 和 Manolis[187] 用于求解某些暂态弹性波的射散问题．

Niwa et al[216,217] 和 Kobayashi & Nishimura[156,157] 研究了某些平面弹性动力学问题的稳态解，并借助于 Fourier 变换还可能求得暂态响应．Dominguez[89,90] 的工作是用边界元法研究二维和三维的刚性表面或埋置基础的频域动力响应的第一次尝试．

在自由振动分析的最初论文中可以提到的是，关于控制声学或反平面弹性动力学的标量波方程的Tai & Shaw[282], De Mey[88], Hutchinson[130] 的文章，关于板振动的Vivoli[310], Vivoli & Filippi[311], Niwa et al[219] 的文章，以及关于一般平面弹性动力学问题的 Niwa et al[220-223] 的文章．

第一个时域边界元法表述是 1962 年 Friedman & Shaw[116] 关于声学-反平面弹性动力学的．Cole et al[73] 的工作尽管是提供了一般的时域表述，但从应用的观点看也是限于反平面弹性动力学的．Niwa et al[218] 和 Karabalis & Beskos[139] 首先在时域中用边界元法分别提出了一般的二维和三维弹性动力学的方法．

关于边界元法及其在弹性动力学中应用的非常丰富的资料来源，是许多一般的或专门的综述性文章，如 Shippy[273], Dominguez & Alarcon[92,95], Geers[119], Banerjee et al[27-29], Manolis et al[189], Kobayashi[163,164,166,169], Cruse[79], Brebbia[54], Karabalis & Beskos[144,146], Dravinksy[107] 以及 Tassoulas[286].

本文前 2 节对于时域和频域的三维、平面和反平面弹性动力学问题分别讨论了积分表述和数值解．描述的框架是直接边界元法的，而关于弹性动力学问题的某些其他边界元方法学则在第 3 节讨论．

第 4 节叙述此法在动力土壤-结构相互作用问题（包括地下结构和地上结构，基础，桩，隔振装置）中的应用，以及可以用边界元法与有限元法相结合的混合格式有效地求解的问题．在这节中还简要讨论包括粘弹性、非均匀性、各向异性和多孔弹性等更实际的土壤模型．

第 5 节研究包括弹性介质中的裂纹扩展和由裂纹引起的波绕射的问题，第 6 节叙述梁、板、壳的动力分析问题．第 7 节提供一系列数值例题说明边界元法及其在弹性动力学中的某

些应用．最后，在第8节中给出进展评价和列出需进一步研究的一些领域．

1 弹性动力学的积分表述

本节评论在时域和频域中的弹性动力学问题的经典积分表述．对于时域情形，下列发展所根据的是 Wheeler & Sternberg[315]，De Hoop[87]，Eringen & Suhubi[113]，而对于频域情形则根据的是 Doyle[96]，Cruse & Rizzo[77]，Eringen & Suhubi[113]的．在下文中，认为重复下标是求和约定，逗号表示空间导数，而圆点表示对时间 t 的导数，希腊字母下标取值1和2，而拉丁字母下标取值1至3．

考虑由一规则曲面 S 围成的体积为 V 的均匀各向同性线弹性体．此物体的运动方程为下列形式：

$$(c_1^2-c_2^2)u_{i,ij}+c_2^2u_{j,ii}+b_j=\ddot{u}_j \tag{1.1}$$

此处 $u_i=u_i(\mathbf{x},t)$ 为位移矢量（其中 $\mathbf{x}$ 为位置矢量），b_j 为每单位质量的体力矢量，而 c_1，c_2 分别为胀缩波速和剪切波速，它们以 Lamé 弹性常数 λ 和 μ 表示且由下列关系给出：

$$c_1^2=(\lambda+2\mu)/\rho,\quad c_2^2=\mu/\rho \tag{1.2}$$

其中 ρ 为物体的质量密度．上述物体的本构方程为

$$t_{ij}=\rho(c_1^2-2c_2^2)u_{m,m}\delta_{ij}+\rho c_2^2(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{1.3}$$

此处 δ_{ij} 为 Kronecker δ 函数，而应力张量 t_{ij} 由下列关系与应力矢量 $t_{(\vec{n})i}$ 由下列关系式相联系：

$$t_{(\vec{n})i}=t_{ij}n_j \tag{1.4}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为表面 S 的微元上的外法向单位矢量．

在一适定的边值和初值问题中，应力和位移应满足边界条件

$$\left.\begin{aligned}t_{(\vec{n})i}(\mathbf{x},t)&=p_i(\mathbf{x},t),\quad \mathbf{x}\in S_t\\ u_i(\mathbf{x},t)&=q_i(\mathbf{x},t),\quad \mathbf{x}\in S_u\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

此处 $S=S_t\cup S_u$，以及初条件

$$\left.\begin{aligned}u_i(\mathbf{x},0^+)&=u_{0i}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in V\\ \dot{u}_i(\mathbf{x},0^+)&=v_{0i}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in V\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

若位移矢量 $\mathbf{u}$ 和体力 $\mathbf{b}$ 的 Helmholtz 分解假定为下列形式：

$$\mathbf{u}=\nabla\varphi+\nabla\times\boldsymbol{\psi},\quad \mathbf{b}=\nabla f+\Delta\times\mathbf{F} \tag{1.7}$$

此处 ∇ 代表梯度算子，而 $\times$ 标记叉积．方程（1.1）变成等价于下列波方程组：

$$c_1^2\nabla^2\varphi+f=\ddot{\varphi},\quad c_2^2\nabla^2\boldsymbol{\psi}+\mathbf{F}=\ddot{\boldsymbol{\psi}} \tag{1.8}$$

此处 ∇^2 为 Laplace 算子．

上述三维弹性动力学情形的二维近似如下：

① **反平面应变**，定义为

$$u_\alpha=0,\quad u_3=u_3(x_1,x_2,t) \tag{1.9}$$

在（1.3）中利用（1.9）得出应力

$$t_{\alpha 3}=\rho c_2^2u_{3,\alpha} \tag{1.10}$$

而考虑到（1.9）时，（1.1）化为

$$c_1^2u_{3,\alpha\alpha}+b_3=\ddot{u}_3 \tag{1.11}$$

② **平面应变**，定义为

$$u_\alpha=u_\alpha(x_1,x_2,t),\quad u_3=0 \tag{1.12}$$

在（1.3）中利用（1.12），得出应力

$$\left.\begin{aligned}&t_{\alpha\beta}=\rho(c_1^2-2c_2^2)u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}+\rho c_2^2(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha})=\lambda u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}+\mu(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha})\\&t_{33}=\rho(c_1^2-2c_2^2)u_{\gamma,\gamma}=\lambda u_{\gamma,\gamma}\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

而考虑到（1.12）和（1.2）时，（1.1）化为

$$(\lambda+\mu)u_{\alpha,\alpha\beta}+\mu u_{\beta,\alpha\alpha}+\rho b_\beta=\rho\ddot{u}_\beta \tag{1.14}$$

若假定

$$\mathbf{u}(x_1,x_2,t)=\nabla\varphi+\nabla\times\phi\,\mathbf{i}_3,\quad \mathbf{b}(x_1,x_2,t)=\nabla f+\nabla\times F\,\mathbf{i}_3 \tag{1.15}$$

则方程（1.14）等价于下列方程组：

$$c_1^2\nabla^2\varphi+f=\ddot{\varphi},\quad c_2^2\nabla^2\phi+F=\ddot{\phi} \tag{1.16}$$

此处 $\mathbf{i}_3$ 为沿 x_3 方向的单位矢量.

③ **平面应力**，定义为

$$t_{\alpha\beta}=t_{\alpha\beta}(x_1,x_2,t),\quad t_{3j}=0,\quad b_3=0 \tag{1.17}$$

附加假定 $t_{\alpha\beta}$ 和 $u_{\alpha\beta}$ 代表沿 x_3 方向在厚度上的平均值．在（1.3）中利用（1.17），得到应力

$$t_{\alpha\beta}=\lambda' u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}+\mu(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}) \tag{1.18}$$

而考虑到（1.17）和（1.2）时，（1.1）化为

$$(\lambda'+\mu)u_{\alpha,\alpha\beta}+\mu u_{\beta,\alpha\alpha}+\rho b_\beta=\rho\ddot{u}_\beta \tag{1.19}$$

此处

$$\lambda'=2\lambda\mu/(\lambda+2\mu) \tag{1.20}$$

此外，在本情形中有

$$\varepsilon_{33}=-[\lambda/(\lambda+2\mu)]u_{\gamma,\gamma} \tag{1.21}$$

将方程（1.13）和（1.14）与方程（1.18）和（1.19）比较，表明平面应力情形容易从平面应变情形求得，只要把 λ 代之以（1.20）给出的 λ' 即可.

1.1 时域积分表达式　为建立方程（1.1）的积分表达式解，首先有必要指定下面将用到的所要求的基本解．在这一表述中，选择基本解为无限体由于一集中体力

$$\rho\mathbf{b}(\mathbf{x},t)=b(t)\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\mathbf{e} \tag{1.22}$$

而得到的（1.1）的奇解．上式中 $\mathbf{x}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 为物体内的点，δ 为 Dirac δ 函数，$\mathbf{e}$ 为上述力作用的方向，而 $b(t)$ 为其随时间的变化．对于由（1.22）给出的 $\mathbf{b}$，（1.1）的解为下列形式：

$$u_i=u_{ij}^0 e_j \tag{1.23}$$

此处基本奇解或 Stokes 位移张量 u_{ij}^0 由［113］给出为

$$\begin{aligned}u_{ij}^0(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}|b)=\frac{1}{4\pi\rho}\Bigg\{&\left(\frac{3r_ir_j}{r^3}-\frac{\delta_{ij}}{r}\right)\int_{c_1^{-1}}^{c_2^{-1}}\eta b(t-\eta r)d\eta\\&+\frac{r_ir_j}{r^3}\left[\frac{1}{c_1^2}b\left(t-\frac{r}{c_1}\right)-\frac{1}{c_2^2}b\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\right]+\frac{\delta_{ij}}{rc_2^2}b\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{1.24}$$

此处

$$r_i = x_i - \xi_i,\ r^2 = (x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i) \tag{1.25}$$

函数 $b(t-s)$，如在（1.22）中所用的，假定为时间推迟的，即，只要 $t-s>0$，它就是非零的．与 u^0_{ij} 有关的 Stokes 应力张量 t^0_{ijk} 可以通过将（1.24）代入本构方程（1.3）求得，并具有下列的符号形式：

$$t^0_{ijk} = t^0_{ijk}(\mathbf{x}, t;\ \boldsymbol{\xi}|b) \tag{1.26}$$

其显式表达式可在[113]中找到．“基本奇解对”$\{u^0_{ik}, t^0_{ijk}\}$具有因果性、平移性和对称性（只有 u^0_{ij}）等性质，且称为静止过去的 Stokes 状态[113]．

用静止过去的 Stokes 状态作为 Betti 互易定理的两个不同的弹性动力学状态的一个，另一个则是实际状态，就可以导出由方程（1.1），（1.5），（1.6）描述的弹性动力学问题的 Love 积分表达的下列形式的解[113]：

$$\begin{aligned}\epsilon(\boldsymbol{\xi})u_k(\boldsymbol{\xi},t) = &\int_S \{u^0_{ik}[\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}|t_{(\vec{n})i}(\mathbf{x},t)] - t^0_{(\vec{n})ik}[\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}|u_i(\mathbf{x},t)]\}dS(\mathbf{x})\\ &+\rho\int_V u^0_{ik}[\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}|b_i(\mathbf{x},t)]\,dV(\mathbf{x}) + \rho\int_V [v_{0i}(\mathbf{x})U_{ik}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi})\\ &+ u_{0i}(\mathbf{x})\dot{U}_{ik}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi})]dV(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{1.27}$$

此处

$$\epsilon(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \boldsymbol{\xi}\in V \\ 0.5, & \text{若 } \boldsymbol{\xi}\in S\ (S\text{平滑}) \\ 0, & \text{若 } \boldsymbol{\xi}\notin V\cup S \end{cases} \tag{1.28}$$

而 Green 张量 U_{ik} 可以从（1.24）的 u^0_{ik} 中令 $b(t)=\delta(t)$ 求得．对于零体力和零初条件的情形，对于在 S 上的一点 $\boldsymbol{\xi}$，方程（1.27）变为边界积分方程

$$\frac{1}{2}u_k(\boldsymbol{\xi},t) = \int_S \{u^0_{ik}[\mathbf{x},\ t;\ \boldsymbol{\xi}|t_{(\vec{n})i}(\mathbf{x},t)] - t^0_{(\vec{n})ik}[\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}|u_i(\mathbf{x},t)]\}dS(\mathbf{x}) \tag{1.29}$$

在二维情形中，弹性动力学解的积分表达式为[113]

$$\begin{aligned}\epsilon(\boldsymbol{\xi})u_\alpha(\boldsymbol{\xi},t) = &\int_C \{v_{\beta\alpha}[\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}|t_{(\vec{n})\beta}(\mathbf{x},t)] - \sigma_{(\vec{n})\beta\alpha}[\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}|u_\beta(\mathbf{x},t)]\}dC(\mathbf{x})\\ &+\rho\int_D v_{\beta\alpha}[\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}|b_\beta(\mathbf{x},t)]dD(\mathbf{x}) + \rho\int_D [v_{0\beta}(\mathbf{x})V_{\beta\alpha}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi})\\ &+ u_{0\beta}(\mathbf{x})\dot{V}_{\beta\alpha}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi})]dD(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}\epsilon(\boldsymbol{\xi})u_3(\boldsymbol{\xi},t) = &\int_C \{v_{33}[\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}|t_{(\vec{n})3}(\mathbf{x},t)] - \sigma_{(\vec{n})3}[\mathbf{x},t;\ \boldsymbol{\xi}|u_3(\mathbf{x},t)]\}dC(\mathbf{x})\\ &+\rho\int_D v_{33}[\mathbf{x},t;\ \boldsymbol{\xi}|b_3(\mathbf{x},t)]dD(\mathbf{x})\\ &+\rho\int_D [v_{03}(\mathbf{x})V_{33}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}) + u_{03}(\mathbf{x})\dot{V}_{33}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi})]dD(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{1.31}$$

此处 D 为二维正则区域，而 C 则为其边界，$\mathbf{x}=\{x_1,\ x_2\}$，$\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2\}$，$u_\alpha(\mathbf{x},t)$ 对应于平面运动而 $u_3(\mathbf{x},t)$ 对应于反平面运动，而且

$$\left.\begin{aligned}
u_{ik}[\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}|b(t)] &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} u^{0}_{ik}[\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}|b(t)]dx_2, && \text{在}D\text{中}\\
\sigma_{(\vec{n})ik}[\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}|b(t)] &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} t_{(\vec{n})ik}[\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}|b(t)]dx_3, && \text{在}C\text{上}\\
V_{ik}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} U_{ik}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi})dx_3, && \text{在}D\text{中}
\end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

Banaugh[26]已根据由方程（1.8）所给的位移势表述对于时域弹性动力学提供了积分表达式.

1.2 频域积分表达式 函数 $f(\mathbf{x},t)$ 的 Fourier 变换定义为

$$\bar{f}(\mathbf{x},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x},t)e^{-i\omega t}dt \tag{1.33}$$

此处 ω 为 Fourier 变换参数或圆频率，而 $i=\sqrt{-1}$. 对方程（1.1）和（1.3）—（1.5）应用 Fourier 变换，结合零初条件（非零初条件易于处理）和静止过去的假定，导出

$$(c_1^2-c_2^2)\bar{u}_{i,ij}+c_2^2\bar{u}_{j,ii}+\bar{b}_j=-\omega^2\bar{u}_j \tag{1.34}$$

$$\bar{t}_{ij}=\rho(c_1^2-2c_2^2)\bar{u}_{m,m}\delta_{ij}+\rho c_2^2(\bar{u}_{i,j}+\bar{u}_{j,i}) \tag{1.35}$$

$$\left.\begin{aligned}
\bar{t}_{(\vec{n})i}(\mathbf{x},\omega)=\bar{t}_{ij}n_j=\bar{p}_i(\mathbf{x},\omega),\ \ \mathbf{x}\in S_t\\
\bar{u}_i(\mathbf{x},\omega)=\bar{q}_i(\mathbf{x},\omega),\ \ \mathbf{x}\in S_u
\end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

（1.34）的解的积分表达式需要建立基本解. 这定义为无限体中由于下列形式的集中体力

$$\rho\bar{b}_i(\mathbf{x},\omega)=\bar{b}(\omega)\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})e_i \tag{1.37}$$

引起的位移场，上式正是方程（1.22）的 Fourier 变换. 于是（1.34）的 Fourier 变换为[113]

$$\bar{u}_i=\bar{u}^*_{ij}e_j \tag{1.38}$$

此处

$$\bar{u}^*_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\omega)=\frac{\bar{b}(\omega)}{4\pi\rho c_2^2}(Y\delta_{ij}-Xr_{,i}r_{,j}) \tag{1.39}$$

其中 Y 和 X 具有下列形式[113]：

$$\left.\begin{aligned}
Y&=\left(1-\frac{c_2^2}{\omega^2r^2}-\frac{c_2}{i\omega r}\right)\frac{e^{i\omega r/c_2}}{r}-\left(\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)\left(-\frac{c_1^2}{\omega^2r^2}-\frac{c_1}{i\omega r}\right)\frac{e^{i\omega r/c_1}}{r}\\
X&=\left(-\frac{3c_2^2}{\omega^2r^2}-\frac{3c_2}{i\omega r}+1\right)\frac{e^{i\omega r/c_2}}{r}-\left(\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)\left(-\frac{3c_1^2}{\omega^2r^2}-\frac{3c_1}{i\omega r}+1\right)\frac{e^{i\omega r/c_1}}{r}
\end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

将方程（1.38）代入方程（1.35）得到拉力相伴张量 $\bar{t}^*_{ij}$. 基本解对 $\{\bar{u}^*_{ij},\bar{t}^*_{ij}\}$，如上述定义，具有空间平移性质和对称性质（只 $\bar{u}^*_{ij}$）.

对于平面应变情形，将 i,j,m 分别代之以 α,β,γ 后方程（1.34）—（1.36）仍然适用，而将 4π 代之以 2π 后基本解 $\bar{u}^*_{ij}$ 再次由（1.39）给出，且有

$$\left.\begin{aligned} Y &= K_0\left(\frac{-i\omega r}{c_2}\right)-\frac{c_2}{i\omega r}\left[K_1\left(\frac{-i\omega r}{c_2}\right)-\frac{c_2}{c_1}K_1\left(\frac{-i\omega r}{c_1}\right)\right] \\ X &= K_2\left(\frac{-i\omega r}{c_2}\right)-\frac{c_2^2}{c_1^2}K_2\left(\frac{-i\omega r}{c_1}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

此处 K_0, K_1, K_2 分别为零阶、一阶、二阶第二类 Bessel 函数。

对于反平面应变情形，在 Fourier 变换域中方程（1.11）变为 Helmholtz 方程

$$c_2^2\bar{u}_{3,\alpha\alpha}+b_3=-\omega^2\bar{u}_3 \tag{1.42}$$

然后方程（1.42）的基本解为[113]

$$\bar{u}_{33}^*=\frac{i\bar{b}_3(\omega)}{4\rho c_2^2}H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r}{c_2}\right) \tag{1.43}$$

此处 $H_0^{(1)}$ 为零阶第一类 Hankel 函数。

利用 Betti 互易定理的变换域形式，其中需要的两个状态之一是 $\{\bar{u}_{ij}^*, \bar{t}_{ij}^*\}$，另一个是实际状态，就可以得到下列积分恒等式形式的 Fourier 变换后的弹性动力学问题的解[113]：

$$\begin{aligned} \epsilon(\boldsymbol{\xi})\bar{u}_j(\boldsymbol{\xi}) &= \int_S \bar{t}_{(\vec{n})i}(\mathbf{x})\bar{u}'_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\omega)dS(\mathbf{x})-\int_S \bar{u}_i(\mathbf{x})\bar{t}'_{ji}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\omega)dS(\mathbf{x}) \\ &\quad -\int_V \rho\bar{b}_i(\mathbf{x},\omega)\bar{u}'_{ji}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\omega)dV(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{1.44}$$

此处

$$\bar{u}'_{ij}=\bar{u}_{ij}^*/\bar{b}(\omega),\qquad \bar{t}'_{ij}=\bar{t}_{ij}^*/\bar{b}(\omega) \tag{1.45}$$

根据零体力的假定和点 $\boldsymbol{\xi}$ 在平滑边界 S 上，方程（1.44）化为

$$\frac{1}{2}\bar{u}_j(\boldsymbol{\xi})=\int_S[\bar{u}_i(\mathbf{x})\bar{t}'_{ji}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\omega)-\bar{t}_{(\vec{n})i}(\mathbf{x})\bar{u}'_{ji}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\omega)]dS(\mathbf{x}) \tag{1.46}$$

这就是 Fourier 变换形式或频域形式的边界积分方程。它应用于三维情形或平面应变情形，当然，要结合着每种情形中适当的基本解。

利用 Green 第二恒等式可在零体力条件下将（1.46）表述为下列积分形式[113]：

$$\epsilon(\boldsymbol{\xi})\bar{u}_3(\boldsymbol{\xi})=\int_S\left[\bar{u}_3(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\bar{u}'_{33})-\frac{\partial\bar{u}_3}{\partial\mathbf{n}}\bar{u}'_{33}\right]dS(\mathbf{x}) \tag{1.47}$$

此处

$$\bar{u}'_{33}=\bar{u}_{33}^*/\bar{b}_3(\omega) \tag{1.48}$$

于是对于反平面应变情形的边界积分方程可由假定 $\boldsymbol{\xi}$ 在 S 上并取 $\epsilon(\boldsymbol{\xi})=1/2$ 从（1.47）得到。

方程（1.46）和（1.47）可提供对于给定的动力学问题以频率参数 ω 表示的解。然后时域解可由此变换后的解的数值反演求得。当然，若动力扰动为零（自由振动问题）或随时间谐变（稳态问题），这种反演就没有必要。

另一个可供替代 Fourier 变换的途径是对于时间的 Laplace 变换。对于函数 $f(\mathbf{x},t)$ 它定义为

$$\bar{f}(\mathbf{x},s)=\int_0^\infty f(\mathbf{x},t)e^{-st}dt \tag{1.49}$$

此处 s 为 Laplace 变换参数，一般为复数．容易证明[113]，可以从 Fourier 变换域（或实频域）简单地将 ω 代之以 is，就得到 Laplace 变换域（或复频域）．

2 弹性动力学的数值解

显然，在上节中建立的在时域中或在频域中的边界积分方程的解析解，只对于非常简单的几何形状和有关函数随时间的非常简单的变化才是可能的．对于任意的几何形状和所涉及函数的任意时间变化的一般情形，则迫切需要这些方程的数值解．为此有必要在时域方法和频域方法中进行空间离散化．然而，与类似于静力学的频域问题对比，时域方法需要附加的在时间上的离散化．本节叙述具体的数值方法，对于时域三维情形是基于 Karabalis & Beskos[33,139] 的，而对于频域三维情形则是基于 Cruse[78]，Manolis & Beskos[185] 的．关于二维情形也提供某些资料．

2.1 *时域方法* 如［33,275,139—142,144—146］所述，三维中的时域边界元法分为两个基本步骤：①将实时轴离散为等距的时间间隔的序列，在每一时间间隔上位移和拉力都是恒定的；②将所关心的域的边界 S 离散为许多三角形和四边形单元，在每单元上假定位移和拉力都是均匀分布的．根据这些离散化，在每一单元和每一时段上可以建立关于边界位移和拉力方程（1.29）的时间分段解．应当指出，更复杂的时间离散和空间离散格式也已发展出来，它们将在 2.3 节中予以简要叙述．

为了说明步骤，应首先考虑连续的拉力矢量 $t_{(\vec{n})i}$ 离散为 N 个时间历程 Δt 的矩形脉冲，于是对于时间间隔 $(q-1)\Delta t<t<q\Delta t$，$q=1,2,\cdots,N$，可写出表达式

$$t_{(\vec{n})i}(\mathbf{x},t)\approx t^{q}_{(\vec{n})i}(\mathbf{x})\{H[t-(q-1)\Delta t]-H(t-q\Delta t)\} \tag{2.1}$$

此处

$$t^{q}_{(\vec{n})i}=t_{(\vec{n})i}[\mathbf{x},(q-0.5)\Delta t] \tag{2.2}$$

而 H 代表 Heaviside 函数．将 (2.1) 给出的 $t_{(\vec{n})i}(\mathbf{x},t)$ 代入方程 (1.24) 中的 $b(t)$，例如，对于 $q=1$ 就得到对于 u^0_{ik} 的下列时间离散表达式：

$$\begin{aligned} u^0_{ik}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}\,|\,t^1_{(\vec{n})i})=\frac{1}{4\pi\rho}\Big\{&\Big(\frac{3r_ir_k}{r^5}-\frac{\delta_{ik}}{r^3}\Big)\Big[H\Big(t-\frac{r}{c_1}\Big)F_1-H\Big(t-\frac{r}{c_2}\Big)F_2\Big]\\ &\times t^1_{(\vec{n})i}(\boldsymbol{\xi})+\frac{1}{c_1^2}\frac{r_ir_k}{r^3}H\Big(t-\frac{r}{c_1}\Big)t_{(\vec{n})i}\Big(\boldsymbol{\xi},t-\frac{r}{c_1}\Big)\\ &+\frac{1}{c_2^2}\Big(\frac{\delta_{ij}}{r}-\frac{r_ir_k}{r^3}\Big)H\Big(t-\frac{r}{c_2}\Big)t_{(\vec{n})i}\Big(\boldsymbol{\xi},t-\frac{r}{c_2}\Big)\Big\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

此处

$$F_\beta=\begin{cases}[t^2-(r/c_\beta)^2]/2, & \text{若 } 0<t-(r/c_\beta)\leqslant\Delta t\\ [2t(\Delta t)-(\Delta t)^2]/2, & \text{若 } \Delta t<t-(r/c_\beta)\end{cases}\qquad \beta=1,2 \tag{2.4}$$

将边界位移矢量 $u_i(\mathbf{x},t)$ 在时间上做类似的离散化，并将它直接代入方程（1.26）的 $t^0_{(\vec{n})ik}$ 表达式中的 $b(t)$，将得出 Stokes 应力张量的时间离散形式．

为了进行说明，按这里采取的空间离散格式，域 V 的表面 S 需离散为 M 个平的四边形单元，在每一单元上拉力和位移假定为常数．于是，由于（2.3），对于每一边界元 $R(R=1,$

2,…,M）写出边界积分方程（1.29），将得到对于每一时间段N的下列形式的M个代数方程的方程组：

$$\frac{1}{2}\{u^{N,R}\}=\sum_{n=q}^{N}\sum_{m=1}^{M}\{[G^{n-q+1,s}]\{t^{N-n+q,s}\}-[T^{n-q+1,s}]\{u^{N-n+q,s}\}\} \tag{2.5}$$

此处$\{u^{N,R}\}$为在时间段N上的位移矢量，$\{t^{k,s}\}$为在时间段k上的拉力矢量，而上标R和s分别标记“接收器”和“源”单元．“张量对”$\{[G^{n,s}],[T^{n,s}]\}$代表 Stokes 静止过去状态的时间离散等价量和空间离散等价量．例如，$[G^{n,s}]$ 给出为

$$G_{ik}^{n,s}=\frac{1}{4\pi\rho}\left\{B_c^n\int_{(s)}\left(\frac{3r_ir_k}{r^5}-\frac{\delta_{ik}}{r^3}\right)\left[H\left(t-\frac{r}{c_1}\right)F_1-H\left(t-\frac{r}{c_2}\right)F_2\right]d(s)\right.$$
$$\left.+\frac{B_{c1}^n}{c_1^2}\int_{(s)}\frac{r_ir_k}{r^3}d(s)+\frac{B_{c2}^n}{c_2^2}\int_{(s)}\left(\frac{\delta_{ik}}{r}-\frac{r_ir_k}{r^3}\right)d(s)\right\} \tag{2.6}$$

此处(s)为单元s的面积，而r为从单元R的中心到单元s的每一点的距离．系数B_c^n,B_{c1}^n,B_{c2}^n用以规定在方程（2.6）中涉及的各量按它们所代表的波的种类进行空间积分的极限[33,139]．关于拉力张量$T_{ijk}^{n,s}$的显表达式可在[33,145]中找到．

方程（2.6）中的空间积分通过标准的 Gauss 求积格式可容易地完成且有满意的结果．然而，在例如[33,139,145]中利用的是一个改进的空间积分方案，其中每一“源”单元分为若干子单元，于是方程（2.6）中的积分可按通常方式在每一子单元的面积（s）上进行．在奇异单元情形中，即在方程（2.5）中当$R=s$或与之等价的$r\to 0$时，要用一个特殊的解析积分．首先可以看出，由于行波的性质，奇性只能在第一个时间段中遇到，此时拉力$\{t^{q,s}\}$作用于源单元s上．然后使用极坐标和$r\to 0$时关于$G_{ik}^{1,s}$的所得表达式，结果表明没有奇性[33,139]．张量$T_{ijk}^{1,s}$在某些条件下在$r\to 0$时也可以是没有奇性的[33,145]．

在离散的边界表面的M个单元写出方程（2.5），可建立所得方程组的逐步的时间前进解．若适当考虑离散的基本解对的因果性、对称性和时间平移性质，则全部离散核的计算可大为简化．

对于二维情形可建立类似的步骤．如 Manolis[187] 所述，表述二维时域边界元法基本上有两种方式．一种方式如 Niwa et al[218] 和 Manolis[187] 所述，是将三维情形的边界元法连同对应的基本解对用到适应于平面应变情形的形式中．另一方式是以二维基本解对表述二维边界元法[187]．在第一种情形中积分是在随时间运动的一个面积部分上进行的；而在第二种情形中积分则在一线段和时间上进行．此外，在第一种情形中奇性只出现一次，即出现在第一时间段中；而在第二种情形中则在每一时间段中都出现[187]．然而，后来 Mansur & Brebbia[193,195]，Spyrakos & Beskos[34,275,141,276-279]，以及最近 Antes[18]，Spyrakos & Antes[280]，Fukui[117] 指出，甚至在纯二维边界元法表述中若时间积分可首先解析地进行，则奇性只在第一时间段上出现一次．

应当提及，在 Karabalis & Beskos[33,139-142,144-146] 以及 Spyrakos & Beskos[34,276-279] 的工作中是使用以 Heaviside 函数表示的基本解，而在关于此课题的所有其他工作中却是使用以δ函数表示的基本解．前一方法较为容易，它以时间步进的方式或通过脉冲响应的叠加，可用于确定结构的响应且得到非常经济的格式[33,34,139,278]．当然，只有时间步进格式

可推广到非线性情形．涉及使用 Heaviside 函数的近似可以有效地通过取足够小的时间步长予以消除。

至于反平面运动情形，它由波方程控制并具有积分表达式（1.31），可查阅线性声学方面的大量文章，例如 Friedman & Shaw[116]，Shaw[269,270,272] 以及最近 Mansur & Brebbia[190-192,194]，Misljenovic[200-202] 在波方程方面的工作．

最后，关于三维时域边界元法，Tanaka & Tanaka[284] 的工作的特征是只提出表述方式而无数值结果，而 Karabalis & Beskos[33,275,139-142,144-146]，Manolis et al[188,189] 以及 Banerjee et al[28,29] 的工作是应该提到的．

2.2 *频域方法* 频域边界积分方程（1.46）的数值解，比 2.1 节叙述的时域边界元法的数值解更为简单．当然，其原因是，在频域表述中时间变量被消去而问题变换为象静力学那样的形式．于是，对于方程（1.46）的数值解，只需要空间的离散化．

空间离散化的过程的基本步骤和在时域表述中的一样．这样，域 V 的表面 S 被离散为 M 个平三角形单元或平四边形单元，其特征为在每一单元上的位移和拉力的变化是恒定的．这些常数值假定与每一单元中心的节点相关联．也可以利用高阶单元，对此可查阅 2.3 节．根据恒定单元的假定，方程（1.46）可写成下列矩阵形式：

$$\frac{1}{2}\{\bar{u}^R\} = \sum_{s=1}^{M}([\bar{G}^s]\{\bar{t}^s\} - [\bar{T}^s]\{\bar{u}^s\}) \tag{2.7}$$

此处 $\{\bar{u}^s\}$ 和 $\{t^s\}$ 分别为在单元上 Fourier 变换后的位移矢量和拉力矢量，而 $\bar{G}^s_{ij}$ 和 $\bar{T}^s_{ij}$ 分别为离散的基本解对，由下式给出：

$$\bar{G}^s_{ij} = \int_{(s)} \bar{u}'_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\omega)ds(\mathbf{x}),\quad \bar{T}^s_{ij} = \int_{(s)} \bar{t}'_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\omega)ds(\mathbf{x}) \tag{2.8}$$

最近 Karabalis & Mohammadi[143] 发表了利用与自适应过程相结合的可变大小的边界．这种格式大大增加了准确度而没有增加计算工作量．

对于非奇异元 s，即当 $R\neq s$ 或 $r\neq 0$ 时，在方程(2.8)中可得出标准的数值积分过程．而对于奇异元，即当 $R=s$ 或 $r\to 0$ 时，积分应解析地进行[84]．

平面应变运动情形是以一种十分类似于三维情形那样地进行数值处理的．例如，关于 Laplace 变换法可查 Manolis & Beskos[185,38]，Tullberg[292,293]，关于 Fourier 变换法可查 Niwa et al[216,217]，Kobayashi & Nishimura[157]，关于自由振动和稳态振动问题的情形可查 Niwa et al[220,221-223]，Brebbia & Chuang[53]．关于由 Helmholtz 方程控制的频域中的反平面运动情形，其数值处理可查，例如，Banaugh & Goldsmith[23]，Schuster & Smith[262]，Shaw[269,270,272] 在线性声学方面的工作．

在频域中三维弹性动力学分析的例子，则是 Dominguez[89,90,94]，Ottenstreuer & Schmid[232,233]，Theocaris et al[288]，Sládek & Sládek[274]，Rizzo et al[250-253]，Banerjee et al[28-30]，Kitahara & Nakagawa[151,208]，Ahmad & Manolis[11]，Dasgupta et al[83,84] 的工作．

关于在二维和三维中时域性能、Fourier 变换法和 Laplace 变换法的比较研究，可分别在 Manolis[187] 以及 Mohammadi & Karabalis[205] 中找到．

2.3 *特殊计算方面* 2.1 和 2.2 节中叙述的时域和频域边界元法表述，使用的是恒定单

元，即，对于三维是平表面元或对于二维是直线段，在各单元上位移和拉力的变化是恒定的。此外，在时域表述中，每一时间间隔内的位移和拉力假定保持为常数。恒定单元的使用是广泛流行的，因为它们简单。然而，边界元法的准确度可用引入高阶元来改进，即，以在单元上的位移和拉力的某种变化（例如线性或抛物型）以及容易调节复杂边界表面的一种曲线几何形状为特征。此外，在时域法中每一时间间隔内的位移和拉力可有随时间的某种变化（例如线性）。在边界元法表述中使用高阶元的，人们可以提到，在频域中关于二维的有 Manolis & Beskos[186] 的表述，关于三维的有 Rizzo et al[250-253,268,247]，Kitahara & Nakagawa[151,208]，Ahmad & Manolis[11] 的表述，在时域中关于二维的有 Mansur 和 Brebbia[193,195] 的表述，关于三维的有 Manolis et al[188,189]，Banerjee et al[28-30] 的表述。在高阶元表述中需要特别注意的一个问题是边缘和拐角的处理，这在恒定单元表述中并不出现，其结果是得到离散的光滑表面。在高阶元表述中对于奇异情形，使用以一个单元分成子单元为特征的特殊积分格式。如 Rizzo et al[250-253] 所报道的，在频域边界元法表述中完全消除奇异积分（正则化）也是可能的，而且准确度有所提高。这种调整方法也由 Bui et al[59,60] 提出。

在 Fourier 变换后的域中的一个特殊计算问题是虚设本征频率问题。这些本征频率是对应于一个内部问题（或外部问题）的本征值的频率，使其边界积分方程对于相伴的外部问题（或内部问题）不能提供唯一解。为分离出这些不希望有的频率，已提出了各种方法，先是在声学中有 Schenck[260]，Burton & Miller[63]，Ursell[296]，Jones[135]，Tai & Shaw[282]，Kleinman & Roach[153]，Meyer et al[198]，Terai[287] 提出的方法，然后是分别在二维和三维弹性动力学中有 Kobayashi & Nishimura[155,157,159] 以及 Rizzo et al[250-253,247] 提出的方法。还可以提到最近由 Jones[136,137] 所提出的在弹性动力学中关于处理虚设本征频率的与数学有关的方法。

频域边界元法表述需要变换后解的数值反演以求出时域中的解。有时动力学输入的解析变换可能过于复杂。这两件事清楚地说明，对于 Fourier 变换和 Laplace 变换的正反数值计算需要准确和有效的算法。就 Fourier 变换而言，应当使用 Cooley & Tukey[76] 的快速 Fourier 变换，例如 Brigham[56] 所述。关于正反 Laplace 变换的数值计算存在各种可用的算法。Beskos et al[31,209] 所做的综合比较研究发现，对于弹性动力学问题，在 8 个已知算法中最好的是 Durbin[108] 的，它是以正弦和余弦变换为基础的，此外还使用了快速 Fourier 变换。

总之可以说，对于三维弹性动力学分析，现在可用的最先进计算格式在时域和频域中的有 Manolis et al[188,189]，Banerjee et al[28-30] 以及 Ahmad & Manolis[11]，而在频域中的有 Rizzo et al[250-253,247]。这些格式的特征是良好的文件编制、普遍性和高度准确性。

2.4 弹性动力学中的基本解　第 1 节中所述的在时域和频域中的二维和三维边界元法表述，是以使用对于无限大小的均匀、各向同性线弹性体而定义的基本解为特征的。若扰动为 Dirac δ 函数型，则这些解也称为无限（或自由）空间 Green 函数。尽管这些函数的形式比较简单，但是当他们用于涉及半平面或半空间的问题的求解时其自由表面需要离散化，因而需要附加计算工作量。然而，为了所有实际的目的，在所关心的结构周围此表面的有限部分

（下转第 561 页）

6 Еремин А Ф, Гольдберг Е Л, и др. Изв. СО АН СССР, Сер. хим. наун, 6 (1985) : 3, 12, 16; 5 (1986) : 41
7 Павлов П В, Хохлов А Д. Физика твердого тела. М., Высшая школа (1985)
8 Павлюхип Ю Т, Медиков Я Я, Болдырев В В. Изв. СО АН СССР, Сер. хим. наук, 2 (1983): 8; 5 (1983) : 46
9 Зырянов В В, Ляхов Н З, Болдырев В В. Докл. АН СССР, **258**, 2 (1981) : 394—396
10 Рыков А И, Павлюхин Ю Т, Болдырев В В,и др. Изв. СО АН СССР,Сер. хим, наук, 2 (1986): 36—44
11 Ляхов Н З, Маслий А И, Толочко Б П, Шеромов М А. Исследование динамики релаксационных процессов в дефомированном срезом серебре. Изв. СО АН СССР, Сер. хим. наук, 6 (1986) : 54—63
12 Еремин А Ф, Гольдберг Е Л, и др. Указ. соч.
13 Герасимов К Б, Иванов Е Ю, Болдырев В В. Изв. СО АН СССР, Сер. хим. наук, 1 (1985) : 27—32; Иванов Е Ю, Констанчук И Г, Степанов А А,и др. Докл. АН СССР, **286** (1986): 385—388; Констанчук И Г, Иванов Е Ю, и др. Изв. СО АН СССР, Сер. хим. наук, 3(1986): 29—35
14 Аввакумов Е Г. Указ. соч.
15 Бергер А С, Менжерес Л Т, и др. Изв. СО АН СССР, Сер. хим. наук, 1 (1981) : 74
16 Ляхов Н З, Болдырев В В. Изв. СО АН СССР, Сер. хим. наук, 5 (1982) : 3—9; Ляхов Н З, Banicke Listy. Mimoriadne cislo. VEDA, Bratislava (1984) : 40—49; Павлюхин Ю Т, Энс Н И, Медиков Я Я. Изв. СО АН СССР, Сер. хим. наук, 5 (1985) : 24—29
17 Бутягин П Ю. Кинетика и катализ. No. 1 (1987) ; Он же. Энергетический выход механохимических процессов. УДА-технология, Таллин (1983) : 5—8
18 Колосов А С, Болдырев В В, Чайкина М В, и др. Изв. СО АН СССР, Сер. хим. наук, 6 (1979): 148—155
19 Возвращение амальгамы. Сов. Россия, No. 84 (1986)

沈　青　唐锦荣译自：*Вес. АН СССР*, 8 (1989) : 65—74.

(上接第 572 页)　应当予以离散.

另一方案是，人们可使用满足在半空间或半平面的自由表面上无拉力的边界条件的特殊 Green 函数，从而不需要表面离散化. 对于三维和二维半空间时域中的 Green 函数已分别由 Johnson[134] 和 Buchen[58] 作出，而频域中的则分别由 Kobayashi & Nishimura[154], Dravinski[97] 和 Kobayashi[159] 作出. 关于半空间和半平面的 Green 函数，还应当提到分别由 Lamb[176] 和 Lapwood[177] 的经典论文. 使用半空间和半平面 Green 函数，尽管离散化有所简化，但由于这些函数的高度复杂性却增加了计算工作量. 表面离散化与无限空间或无限平面 Green 函数相结合，可得到更经济的格式[159,38,84,173]. 对于反平面运动的特殊情形，关于半平面的 Green 函数的构作可用映象法容易地实现[5]. 对于半平面的近似 Green 函数的构作，映象法最近已由 Kontoni et al[173] 成功地采用.

当由于具有水平分层因而半空间是非均匀时，采用特殊Green函数甚为方便. 对于层状半空间，文献中可以获得的频域中的各种 Green 函数，可提及的有 Luco & Apsel[181,19], Kausel & Peek[147,148], Bouchon[50], Franssens[115], Chapel & Tsakalidis[65]. Beskos et al[40] 最近对于层状半空间问题成功地采用无限平面 Green 函数同自由表面及分层界面的离散化相结合方法. 此方法尽管花费较大但具有能处理任意几何形状的分层而不只是水平分层的优点.

在半空间或半平面中各向异性的出现使Green函数的构作变得非常困难. 在这方面，就笔者所知，唯一可获得的是由 Payton[239-242] 构作的横观各向同性半空间的 Green 函数.

(未完待续)　　**钟宏九**译自：*Appl. Mech. Rev.*, **40**, 1 (1987): 1—23. (**梁焰**校)