

快速颗粒流动

C. S. Campbell

美国 Southern California 大学机械工程系

1 引言

颗粒材料是大量离散固体粒子的聚集。一般地说, 粒子间的间隙充满着诸如空气或水之类的流体, 因此技术上, 颗粒流动是多相过程。然而, 如果粒子是密堆积的, 或者如果它们比间隙流体稠密得多, 则在材料内部的动量输运中粒子将单独地 (而不是流体的作用或流体-粒子间相互作用) 起最大的作用, 在这种情况下, 在描述流动行为时可以忽略间隙流体。颗粒材料的流动通常归入这种极端情况的范畴, 这样就可把它看成是弥散的单相流动而不是多相流动。本评述将论述颗粒固体的流体样行为, 尤其是颗粒材料作快速剪切运动的那些流动。我将概述关于快速颗粒流动方面目前已经知道的知识, 讨论用于描述整体材料运动的各种模拟技术, 并且指出许多有待回答的问题。

视局部应力情况而定, 颗粒材料的行为或者可能象弹性固体, 或者可能象流体。当颗粒材料显示出它的弹性固体行为时, 它可以承受建筑物基础的巨大载荷, 或者可以形成有限坡度的小山。然而, 大部分载荷是通过粒子间的摩擦结合力来承受的, 并因此, 系统的强度被限制在那些摩擦结合力所能承受的载荷范围内。当足够大的摩擦结合力被克服时, 系统将破裂并开始流动。初始的破裂由沿着剪切带彼此相对运动的许多粒子团构成, 这些剪切带大致上按照应力特性通过材料。如果运动是缓慢地发生, 则在很长时间内粒子将保持接触, 并与它们的邻近粒子相互摩擦着。只要变形保持相当缓慢, 破裂就将照这种样子继续下去。这是颗粒流动的“准静态”状态, 并且已经用基于 Coulomb 摩擦准则的改进塑性模型进行了经典的研究。

另一个极端是快速流动状态。如同它的名称含有的意思那样, 它对应于高速流动, 远远超出了初始破裂情况。(Savage 1984, 1988 b 编写了本领域的另两篇最新综述文章。) 这时已经不是许多粒子团的运动, 而是每个粒子自由地并且甚至与它的最近邻的粒子彼此无关地运动。如果这种运动快到足以把足够的能量传递给邻近滑移线的那些粒子, 打碎它们, 使它们脱离原来的粒子团, 则这种状况便可自然地由准静态行为发展而产生; 按这种方式, 滑移区一直增长到整团颗粒中的每个粒子独立地运动为止。在快速流动状态中, 每个粒子的速度都可以分解成整体材料的平均速度与一个表观无规分量 (apparently random component) 之和, 以描述粒子相对于平均的运动。在颗粒粒子的无规运动与气体动理论模型 (kinetic-theory picture of gases) 中的分子热运动之间是如此之酷似, 以致无规速度的均方值通常被称为“颗粒温度”或简单地称为“温度”——此术语由 Ogawa (1978) 首先使用。(本文中, 用 $T = \langle u'^2 \rangle$ 来表示此温度, 其中 u' 是偏离平均速度的瞬间差, 而 $\langle \rangle$ 代表一个适当的平均。于是 T 代表粒子无规运动中每单位质量所含能量的 2 倍。) 正象在本文其余部分中所

阐明的那样，热力学温度和颗粒温度二者在控制它们各自系统的行为中起着类似的作用。特别是，二者都产生压力，并且都控制着质量、动量和能量的内部输运率。因此，尽管“温度”这个术语有时导致外行人发生一些语义上的混淆，但这两个温度之间物理意义的类似是如此之贴切，以致它的使用在整个领域中已经成为标准。

因为宏观固体粒子之间的碰撞是非弹性的，所以颗粒系统和分子系统有许多基本的差别。特别是，与颗粒温度有关的能量总是通过粒子间的碰撞而耗散，要是听其自然，颗粒温度将迅速消耗光。事实上，这是一种普通经验：摇动颗粒材料，例如一瓶阿司匹灵或一盆谷子，在颗粒之间引起无规的温度样运动，但是一旦摇动停止，颗粒将几乎瞬间损失它们的颗粒温度，并且停止它们的所有运动。为了维持这种温度，必须把能量连续不断地增加给无规的速度分量，以平衡耗费在耗散碰撞上的能量。与分子系统不同，颗粒温度是作为流动本身的副产品产生的，并且不能脱离流体力学而确定，正如人们只能通过把分子系统与一个大的等温容器接触来确定这个分子系统的温度一样。

颗粒温度可以由两种机理产生。第一是粒子间碰撞的副产品。当两个粒子碰撞时，它们的合速度将不仅与它们的初速度有关，而且与两个粒子相撞的角度、接触点处的表面摩擦、以及其他可能影响碰撞冲击的几何因素有关。因此，即使粒子初始移动具有符合于它们在速度场内位置的平均速度，它们的合速度仍将包含表观无规速度分量。注意，在这种模式中产生的无规速度值将正比于碰撞时刻粒子的相对速度，并因而必须在平均的意义上正比于材料内部的平均速度梯度。温度产生的第二种模式是无规粒子速度本身的副产品。沿着粒子的无规路径，平行于局部速度梯度运动的粒子将获得表观无规的速度，此速度大约等于它的现时地点和它的上次碰撞点之间平均速度的差。注意，类似于第一种温度产生的模式，这样产生的无规速度值将同样是正比于局部速度梯度。然而，与碰撞温度的产生不同，这种“流动 (streaming)”机理只能产生一个无规速度分量，这分量位于垂直于平均速度梯度的方向上。结果，这样产生的温度将是各向异性的，而在平均运动的方向上具有它的最大分量（尽管与其他粒子随后发生的碰撞往往将使无规速度的方向无规化）。显然，在粒子稠密堆积时，相互碰撞间的粒子不能向远处运动，碰撞温度的产生占优势；而在粒子稀疏堆积时，碰撞很少发生，流动温度的产生占主要地位。因此，对于稀疏堆积，人们可以预料各向异性的温度，正如 Campbell (1989), Campbell & Gong (1986) 和 Walton & Braun (1986 a,b) 在计算机仿真结果中所观察到的那样。

颗粒温度的这种概念可能是了解快速颗粒流动行为的唯一最重要的关键。而了解颗粒温度，同样也要求了解图 1 所说明的内能流。所有能量的源是靠外力对系统做功，此外力或者是体力（例如重力等），或者是由于系统边界的运动。对系统所作的剪切功（剪应力和速度梯度的乘积）把平均运动的

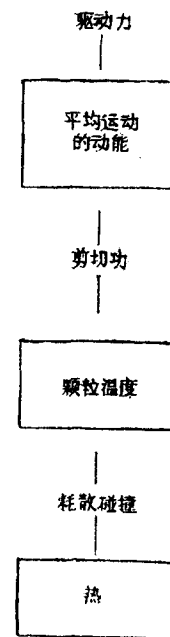


图 1 快速流动颗粒材料内的机械能转换途径

一些动能转变成成为颗粒温度（它是与无规粒子速度有关的动能）；这反映了这样的事实：以上所描述的两种温度机理都与速度梯度有关。最后，粒子间的非弹性碰撞将消耗颗粒温度，把它变成真正热力学的热。因此，颗粒温度值依赖于剪切功所产生的温度和由非弹性碰撞所消耗的温度之间的综合权衡。

尽管上述内容描述了贯穿颗粒系统的总的能量转换途径，但颗粒温度的局部值还可能受到邻近区域的颗粒温度值的影响。这是一种热传导样的过程，并且它的发生是由于和气体中的热力学传导完全类似的物理原因，也就是说，当粒子按照它的无规行走通过材料时，粒子随身携带着它的无规动能（流动温度输运），而当两颗粒子相撞时，它们交换它们的无规动能的一部分（碰撞温度输运）。两种机理都引起颗粒温度贯穿材料的扩散，并且象它的热力学对应物一样，颗粒温度沿着它的梯度在温度递减的方向上传导。[颗粒温度的传导在 Campbell & Brennen (1985 b) 所观察到的情况下是十分明显的。]

关于颗粒温度还有一点应该了解。在气体动理论模型中，分子的无规速度是如此之大，以致施加一个平均速度场，对热速度仅提供了一阶修正。相反，对颗粒材料，无规速度是正比于平均速度梯度并因此将比粒子平均速度小得多。因此，当观察颗粒流动时，粒子涨落并不象人们可以预料的那样剧烈。

1.1 一个说明例子

图 2 是取自 Campbell & Brennen (1985 b) 所作计算机仿真研究的一个曲线图。颗粒流动的计算机仿真是分子动力学计算的派生物，在分子动力学计算中，粒子力学系统范围内的每个粒子当它运动以及与它的近邻互相作用时被精确地跟踪着。仿真仅依赖于各个粒子性质的模型，依赖于粒子彼此互相作用的方式和粒子与系统边界相互作用的方式，因而这些仿真可以被看作是对理想化的材料所进行的理想化实验。可以把这些仿真分为两种类型。Campbell (1982,1988,1989), Campbell & Brennen (1985a,b) 和 Campbell & Gong (1986, 1987) 所采用的刚性粒子仿真，假设粒子具有无穷大的弹性模量，所以任何粒子碰撞都是瞬间的。Haff (1987), Haff & Werner (1986), Walton (1984, 1986 b), Walton et al¹ (1988), Walton & Braun (1986 a, b), Werner (1988) 和 Werner & Haff (1985, 1986, 1988) 所采用的软性粒子模型，则假设有限的弹性性质，并因此必须更详细地研究碰撞。此外，Hopkins (1985, 1987), Hopkins & Shen (1988), Shen & Hopkins (1988)

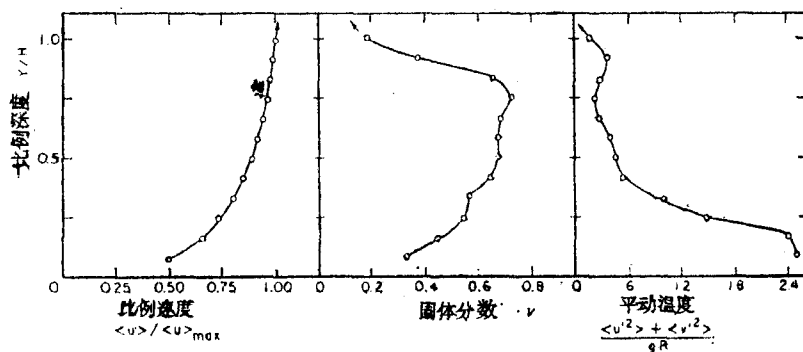


图 2 二维颗粒片沿着与水平面成 30° 角的倾斜平面向下流动，对这种颗粒流动进行计算机仿真所得速度、固体分数和温度分布图。取自 Campbell & Brennen (1985b)

和 Shen et al (1986, 1987, 1988) 使 Monte Carlo 仿真法也适合于颗粒流动。这些作法都不能完全跟踪粒子的轨迹，而代之以产生分布函数，由这些分布函数可以推断出系统的性质；可惜，这种方法假设在分布函数范围内粒子是既空间地又统计地独立自由地分布的，这是一个在大密度时失灵的假设。在发展颗粒流动理论中，计算机仿真已经起了宝贵的作用，因为可以不夸张地说，关于所仿真的系统的每一件事都是知道的。相反，实验研究却受到了阻碍，因为一般还缺乏在稠密的有摩擦力的介质中进行实验研究工作的测试设备和实验对策，原因是这种介质不能很好接受侵入式的探测。因此，密度和温度分布曲线以及应力张量等的大部分详细的测量产生于计算机仿真，而不是产生于直接的实验。Campbell (1986 b) 和 Walton (1986 a) 已经综述了计算机仿真领域的工作。

这种特殊的研究(图2)是沿着与水平面成 30° 角的倾斜平面向下的重力驱动颗粒流动的仿真。其中 y 是垂直于流道底部的坐标，而 H 是质量平均深度的2倍，因而它接近自由表面高度。流动在底部($y=0$)受到固体壁约束，但在顶部不受约束。在此研究中的材料，在许多其他情况下一样是由圆片组成，而不是球体，并且流动被限制为在圆片平面范围内的二维运动。对三组研究对象在水平坐标上给出了速度、密度和颗粒温度，在竖直坐标上，它们全都绘成相对于固体壁上方高度的关系曲线。总起来说，它们说明了流体力学和颗粒温度之间的复杂的相互作用。速度分布图展示出在底部壁面处有很大程度的滑移，并在近壁面处显示出有一个大速度梯度的区域。从上节的讨论中，人们会预料在速度梯度大(从而剪切功大)的地方有大温度产生，这种推测通过分析第三组研究对象的温度分布图证实了。这张曲线图的最有意义部分是在第二组研究对象中所展示的密度分布图。这里所标出的是“固体分数”，它是无量纲密度，等于在单位体积(或在这种二维情况下是单位面积)中固体材料所占有的分数。曲线表明，靠近流道底部的密度小，趋近中心达到了最大，然后在近自由表面处又渐渐变小。Bailard (1978) 和 Ridgway & Rupp (1970) 已经用实验在斜槽流动中观察到了近流道底部处的低密度情况，Shook et al (1968) 则在浆体流动中观察到了这种现象，这就是 Spelt et al (1982)，Patton (1985) 和 Patton et al (1986) 观察到的高速度处传热下降的合理解释。在靠近底部壁面处，尽管上面有材料的大覆盖层，但由于有大的颗粒温度，所以流动仍可以维持一个低密度区域，这清楚地说明了在颗粒温度和热力学温度之间的类似。

注意到了，近壁面处的低密度是独自对相当大的局部颗粒温度值作出贡献的。如图1所说明的那样，颗粒温度值是由通过剪切功使温度产生和通过粒子非弹性碰撞使温度耗散之间的平衡来决定的。碰撞率是密度和颗粒温度(它控制着驱动粒子聚集在一起的速率)的函数，而当粒子密度是小的时候，碰撞率相应地是减小的。除非颗粒温度有相应的增加。而且为了在碰撞率减小的情况下将给定的能量耗散，要求每一次碰撞都耗散更多的能量，这意味着碰撞速度大从而颗粒温度大。因而可以认为近壁面处的颗粒温度大是由于大的剪切率引起温度产生的增加和较低密度对温度耗散的影响二者联合所造成的。

2 本构行为

快速颗粒流动的本构行为的开创性工作是由 Bagnold (1954) 对蜡球的实验研究。蜡球悬浮在甘油-水-酒精混合液中，并且在同轴圆柱流变仪中受剪切。他发现，在相当大的浓度和剪切率情况下，所产生的应力依赖于所施加的剪切率的平方，并且满足以下形式的关系式：

$$\tau_{ij} = \rho_p R^2 f_{ij}(\nu) \gamma^2 \quad (1)$$

其中 ρ_p 是粒子密度, R 是粒子半径, γ 是剪切率, 而 f_{ij} 是固体分数 ν 的张量值函数。这种类型的关系式, 已经由 Craig et al (1986, 1987 a, b) Hanes (1983), Hanes & Inman (1985), Savage & McKeown (1983) 和 Savage & Sayed (1984) 在湿的和干的两种混合物的剪切-室实验 (shear-cell experiments) 中证实了; 由 Campbell (1982, 1989), Campbell & Brennen (1985 a, b), Campbell & Gong (1986), Hopkins (1985), Hopkins & Shen (1986, 1988) 和 Walton & Braun (1989 a, b) 在计算机仿真中证实了; 并且在理论的研究中也证实了。

如此普遍的一致实在是并不奇怪的。只要忽略间隙流体, 可用的有量纲的量就只是粒子性质 ρ_p 和 R , 由于量纲的需要, 这 (与由速度梯度 γ 所提供的时间尺度一道) 要求应力是方程 (1) 中的形式。同样值得注意的是, 因为颗粒温度有速度平方的单位, 又由于量纲的需要, 它必须是正比于 $R^2 \gamma^2$ 。方程 (1) 表明, 颗粒材料的有效粘度变化线性地正比于剪切率, 并因此以和动理论预测的气体粘度随热力学温度的平方根而变化的大致相同的方式正比于颗粒温度的平方根。另一方面, 这也不应该奇怪, 只要粒子间没有长程力, 则任何性质的输运必须由粒子的无规运动来完成, 并且输运率必须是正比于无规速度值 (也就是正比于颗粒温度的平方根)。在这方面, 饶有趣味的是, Campbell & Wang (1986) 指出, 干颗粒材料的表观热导率变化同样线性地正比于剪切率, 并因此同样正比于颗粒温度的平方根, 这又一次象根据气体动理论所预料的那样。

方程 (1) 可能导致快速颗粒流动的行为象幂律流体这样的错误结论。对于幂律流体, 粘度线性地正比于剪切率。可惜, 正象上段提出的那样, 只有在温度的平方根是线性地正比于速度梯度的情况下这才是正确的。(对于大多数分子流体, 温度是独立地确定的, 因此流动引起的温度变化并不是引起幂律行为的原因。) 回忆起颗粒温度是由剪切功产生的, 剪切功又正比于速度梯度。因此可以论证, 在局部颗粒温度值唯一地受局部生产率控制的任何状况下方程 (1) 都是正确的。然而, 对图 2 中所应用的斜槽流动, 在流动内部有大的温度梯度, 在这种情况下, 局部温度值, 从而局部粘度, 可能由于上面所讨论的传导机理而受到周围区域中温度的影响。[Ahn et al (1989 b) 对斜槽流动的分析表明, 在确定系统的最终行为中传导率是非常值得注意的。] Campbell & Gong (1987) 已经指出, 特别是在合适选择边界条件的情况下, 速度梯度、密度和颗粒温度在简单剪切流动中 (例如 Bagnold 的实验) 都几乎是均匀的, 因而将有最小的传导效应。这解释了为什么方程 (1) 在这种情况下是正确的, 但同样指出了简单剪切流动是颗粒流动的异常简单的情况。因此, 这是 Couette 流变仪实验可能指出不能推广到简单剪切流动之外的其他情况中去的那种本构律的情况。

注意, 因为函数 $f_{ij}(\nu)$ 是张量值函数, 所以方程 (1) 表明, 简单剪切流动可能在材料内部产生应力, 这些应力不只是对所加速度梯度的反作用力。特别是, 简单剪切运动产生颗粒温度, 颗粒温度又以与气体中热力学温度产生热力学压力完全相同的方式产生法向应力。这些法向应力已由 Bagnold (1954) 首先在实验上观察到了, 并且他称它们为“弥散应力”, 因为它们有引起材料的胀流性 (dilatation) (或者使粒子“弥散”) 的趋势。

由于粒子的无规热运动, 在快速颗粒流动中的每个粒子都是处在相对运动中, 甚至是与它最靠近的邻位粒子。结果, 粒子间的接触是短暂的, 因此常常把粒子的互相作用理想化为

瞬间的碰撞。正如在普通流体中那样，被理解为连续介质应力的正是材料内部动量传递的微观机理的副产品。对于颗粒材料和气体的硬球模型，动量以两种模式传递，它们完全类似于产生和传导颗粒温度的两种模式。“流动的”或“动理的”模式把动量的运输描述为是粒子随身携带着它的运动动量通过材料的运动。例如 Chapman & Cowling (1970) 的著作中所提出的那些论证，对应力张量的最终贡献是

$$\tau_s = -\rho_s \nu \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle \quad (2)$$

其中 \mathbf{u}' 为与平均速度的瞬间偏差。注意，式 (2) 实质上与 Reynolds 应力张量是相同的，并且明显地与颗粒温度密切相关。[事实上，颗粒温度 T 恰好是 τ_s 除以 $(-\rho_s \nu)$ 后得到的迹。]

“碰撞”模式，正如此名称所含有的意义那样，反映了当粒子碰撞时粒子之间的动量传递。碰撞的结果是，动量的运输等于在粒子中心之间的距离 $2R$ 范围内的碰撞冲量 J 。如果 \mathbf{k} 表示在碰撞时连接两个碰撞粒子中心的方向上的单位矢量，则通过分隔两个粒子的表面由单个碰撞运输的有效动量是 $2R J \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$ ，其中 \mathbf{n} 是垂直于表面的矢量。运输率由碰撞频率 \mathcal{S} 确定，它与碰撞粒子间的相对速度有关，因而与颗粒温度的平方根有关。(注意， \mathcal{S} 也是固体分数 ν 的强函数，并且在浓度大到足以使粒子总是相接触时，它将变为无穷大。) 在乘上碰撞频率之后，所有这些碰撞的平均将得到以碰撞方式引起的在那个表面上的牵引力 $2R \mathcal{S} \langle J \mathbf{k} \rangle \cdot \mathbf{n}$ 。这个表达式应该是应力张量和向外法向单位矢量的点积，因此由于粒子间碰撞产生的应力张量部分 τ_c 由下式给出：

$$\tau_c = 2R \mathcal{S} \langle J \mathbf{k} \rangle \quad (3)$$

显然，在低密度时流动模式将是主要的，在这种情况下，碰撞很少发生，并且在碰撞之间，粒子移动很长的距离；而在高密度时碰撞模式将占优势，在这情况下碰撞频繁，并且在碰撞前粒子不能长距离移动。(在许多早期理论研究中通常都忽略流动的贡献，这是一个被证明多少有点正确的假设，因为大多数颗粒流动发生在密度非常高的情况下，在这种情况下碰撞的贡献是主要的。) 由流动模式和碰撞模式二者贡献的总和找到总应力张量。注意，两种模式的运输率都受到颗粒温度的控制，并且按照两种机理中的任一种可以交换的动量值就是由无规粒子运动的惯性所携带的动量值。因此，Bagnold (1954) 用了术语“颗粒惯性”状态描述遵守方程 (1) 的那类流动。

图 3a 示出了在简单剪切流中剪切应力函数 $f_{xy}(\nu)$ 的一些测量结果。图 3b 示出了下节中所讨论的多种理论的相应预测结果。下标 “xy” 反映来自自由 x 方向速度的 y 方向梯度在材料中所造成的剪应力。这些结果的大多数是 Campbell (1989), Campbell & Gong (1986), Walton (1986b), Walton & Braun (1986b) 和 M.A.Hopkins (私人通信, 1986) 对均匀尺寸的球用计算机仿真产生的。图上一同画上了 Savage & Sayed 对玻璃球的进行剪切-室实验得到的数据，以及 Campbell & Wang (1986) 尚未发表的对玻璃珠传热实验的数据。选择单个分量 f_{xy} 作为说明的例子是因为文献中广泛地报告了它，不过 f_{ij} 的所有其他分量也示出同样的定性行为。在计算机仿真中，用几个表面摩擦系数 μ 来表示材料性质，但用单一的恢复系数 $\varepsilon = 0.8$ 。(恢复系数规定质量中心处进入速度与反冲速度之比，因此它影响碰撞中的能量耗散率。) 曲线显示出“U”形特征，而在大 ν 和 $\nu \rightarrow 0$ 两种情况下则都有趋向于 ∞ 的渐近线。产生大 ν 的渐近线是因为有一个最大的浓度(对于均匀尺寸的球大约 $\nu = 0.6$)，在这个浓度下，不管施加什么应力，均匀尺寸粒子的总体都能保持为剪切流动。在 $\nu \rightarrow 0$ 的渐

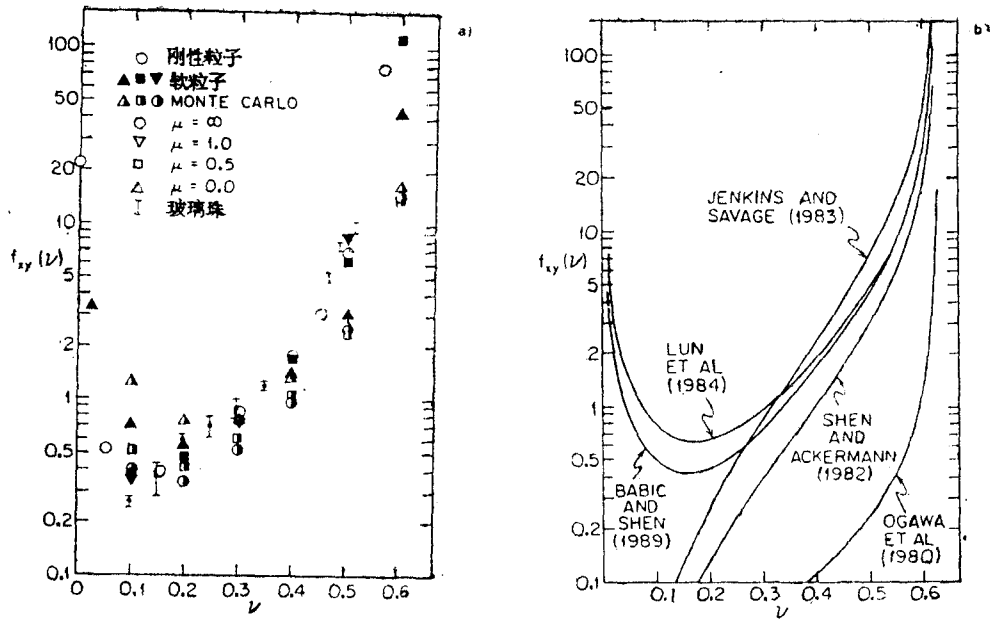


图3 (a) 对球形粒子简单剪切流动的固体分数函数 $f_{xy}(v)$ 的测量结果, 数据取自各种计算机仿真(假设恢复系数 $c=0.8$) 和实验研究. 刚性粒子仿真取自 Campbell (1989). 软粒子仿真取自 Walton (1986 b) 和 Walton & Braun (1986 b), Monte Carlo 仿真由 M.A. Hcpkias (私人通信, 1986) 提供. 这张图取自 Campbell (1986b). (b) 相应的理论预测结果

近线背后的原因更难捉摸, 但可以根据图 1 所示的能量转换途径来了解. 记得温度是由剪切功 ($=\tau_{xy}\gamma$) 所产生, 并由非弹性碰撞所耗散. 但当 $v \rightarrow 0$ 时, 碰撞率, 从而能量耗散, 二者都趋于零. 碰撞率正比于发现二粒子相接触的概率; 在任何给定的位置找到一个粒子的概率正比于 v , 并且在低密度时(这时粒子的存在对它的近邻粒子的位置将几乎没有什么影响), 与第一个粒子相接触的第二个粒子的概率也正比于 v . 因此, 对于小的 v 值, 碰撞率和能量耗散率二者都正比于 v^2 . 另一方面, 温度产生受到由流动产生的应力张量所做的剪切功 $\tau_{xy}\gamma$ 的支配, 并且正如在方程 (2) 中所见到的那样, τ_{xy} 只线性地正比于固体分数 v . 因而, 当 $v \rightarrow 0$ 时, 温度耗散率要比温度产生率更快地趋于零, 这就产生了伴有无穷大应力的无穷大颗粒温度, 因为流动所产生的应力张量与颗粒温度强烈相关.

至于 $v \rightarrow 0$ 的渐近线是否有任何实际的意义还有一些疑问. 注意, 它只出现在图 3 上的计算机仿真数据中, 而在实验结果中是不明显的. 这恰好可能指出在旋转系统中在低密度下进行实验的困难性, 在这种情况下离心力可能引起密度的分层. 但另一种可能的解释是间隙空气施加给粒子的阻力. 回想起低密度渐近线的出现是因为碰撞提供的只是耗散机理, 但在真实实验系统中, 作用于粒子的气动力将与碰撞率无关地使颗粒温度衰减, 并可能足以消除低密度渐近线. 然而在 Patton (1985) 和 Patton et al (1987) 的斜槽流动实验中有某些观察结果表明, 在低密度渐近线背后的机理可能仍然是有作用的, 甚至在有间隙空气的情况下. 对于大的、重的粒子(它们几乎不受气动力的影响), 他们提到了在高速低密度斜槽流动中, 当流动沿斜槽向下加速时, 流动的深度不断地增加, 这表明该系统逐渐地变得越来越稀.(如果没有密度的变化, 则当流动加速时深度将减小.) 这表明, 颗粒温度随着引起材料

变稀的流速的增大而增大。这种连续不断的深度增大看来并不能趋于定常状态，它可能是一种迹象，表明在 f_{xy} 曲线的低密度渐近线上，流动正在经历着固有的不稳定性。也就是说，一旦流动已经扩大到固体分数低于 f_{xy} 曲线上的最小值，则任何进一步的加速都会造成颗粒温度的增大，同时造成相应的密度减小，这种密度减小通过减小颗粒温度的耗散率又引起了更大的颗粒温度，并因此引起了更大的压力和更浅的深度。这种过程将继续下去，只有当空气阻力和少数仍然有的碰撞的联合作用大到足以用颗粒温度产生的速率来耗散颗粒温度时，这种过程才能稳定下来。

Campbell (1989), Campbell & Gong (1986), Walton & Braum (1986 a, b) 和 Hopkins (1987) 通过二维和三维两种计算机仿真证明了一个有关的情况，即在低密度下的颗粒流动中出现法向应力差。这些结果表明，对于在 y 方向上具有速度梯度的 x - y 平面上的简单剪切流动，法向应力 τ_{xx} 总是比 τ_{yy} 大，并且表明，当 $v \rightarrow 0$ 时比值 τ_{xx}/τ_{yy} 大约可以是 10，但当 v 趋于可剪切极限时， τ_{xx}/τ_{yy} 减小到趋于比 1 稍大一点的值。由计算机仿真的

此值的测量结果示于图 4。而且，对于小的恢复系数（大的碰撞能量损失），这种效应是大的，而对于接近 1 的恢复系数，这种效应几乎是不重要的。这种效应可归因于能产生颗粒温度的两种模式。记得在低密度时占主要地位的流动模式，将只在垂直于速度梯度的方向上（在现在这种情况下是 x 方向）产生温度，而在高密度时占优势的碰撞模式，将产生大体上是各向同性的颗粒温度。结果，流动模式仅影响流动应力张量的 τ_{xx} 分量，这就解释了为什么在较低浓度时 τ_{xx}/τ_{yy} 值是大的。对恢复系数的依赖关系有类似的解释。碰撞将造成较小的恢复系数，较大程度的能量耗散和较小的颗粒温度。在流动模式主要时，这改变了温度产生的碰撞模式和流动模式之间的平衡，因而引起了较大的 τ_{xx}/τ_{yy} 值。Campbell (1989) 还报告了在 τ_{xx} 和 τ_{yy} 之间的法向应力差，以及剪切平面外的法向应力 τ_{zz} 。

3 动力学理论模拟

快速颗粒流动和气体的动理论观点之间的物理类似性，已经导致创建颗粒材料的类似模型的大量工作。这种想法完全是从各个粒子的互相作用的微观模型中推导出一组连续介质方程。所有模型都假设，粒子通过瞬间碰撞互相作用，这意味着，只需要考虑双粒子，即两个粒子的相互作用。简单地模拟了粒子的性质，通常用常数的恢复系数表示通过垂直于粒子间接触点的碰撞所耗散的能量，并且忽略了大部分表面摩擦或与接触点相切的任何其他粒子的互相作用。而且，一般假设分子是浑沌的（Boltzmann 的分子混乱性假设），这意味着，甚至连最接近的近邻粒子的无规运动都是独立自由地分布的（这是一个在高浓度时应该不存在

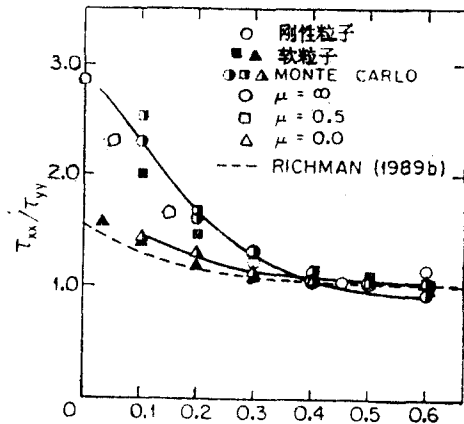


图4 作为固体分数 v 的函数的球粒子的法向应力差。取自计算机仿真（假设恢复系数 $e=0.8$ ），刚性粒子仿真取自 Campbell (1989)，软粒子仿真取自 Walton (1986b) 和 Walton & Braun (1986b)，Monte Carlo 仿真由 M. A. Hopkins 提供（私人通信，1986），还示出了 Richman (1989b) 的光滑球理论预测结果

的条件)。尽管这些模型仍然处在发展的早期阶段,但它们已被应用于各种大不相同的问题中,象沿倾斜槽向下的流动 (Savage 1983a, b, Ahn et al 1989b, Richman & Marciniec 1988), 滑坡 (Hutter et al 1986a, b, Szidarovsky et al 1987), 大块浮冰的运动 (Shen et al 1986, 1987), 颗粒尺寸减小 (Richman & Akkoc 1987, Richman & Chou 1989) 以及土星环 (Borderies et al 1985, Goldreich & Tremaine 1978)。

尽管各种各样的理论得自极不相同的计算原理,但它们都得到大致相同类型的连续介质方程,这些方程形式上都与 Navier-Stokes 方程类似。首先,有质量守恒方程

$$d\rho/dt + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

其中 ρ 是局部密度, \mathbf{u} 是局部速度矢量, 而 $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ 是 Lagrange 导数。同样还有动量守恒方程

$$\rho d\mathbf{u}/dt = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_v + \boldsymbol{\tau}_c$) 是总应力张量, 而 \mathbf{g} 是体力矢量。(如果计算包括粒子表面摩擦和旋转, 则应该包括一个角动量守恒的类似方程。) 最后, 对颗粒温度中所包含的动能有一个能量守恒方程

$$(1/2)\rho dT/dt = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - \Gamma \quad (6)$$

其中, 与前面一样, $T = \langle \mathbf{u}'^2 \rangle$ 是单位质量涨落动能的 2 倍 (因此 1/2 作为一个乘数); \mathbf{q} 是“颗粒热流矢量”, 它表示材料内部颗粒温度的传导; $\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}$ 是由剪切功造成的颗粒温度的产生; 而 Γ 是颗粒温度耗散成的热力学热。(又如果理论中考虑粒子表面摩擦和旋转, 那么, 或者对自旋能要求有一个附加方程 (通过颗粒自旋温度), 或者在颗粒温度 T 中必须包括自旋能。) 所有理论之间的主要差别是量 $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{q} 和 Γ 对流动性性质 $\nabla \mathbf{u}$, ρ 和 T 的本构依赖关系以及对固体粒子的性质和尺寸的本构依赖关系。

Bagnold (1954) 以探索性方式进行了把快速颗粒材料的本构行为与微观性质相结合的首次计算, 并且得到了由方程 (1) 所描述的应力/应变率行为。McTigue (1978) 和 Pasquarell et al (1988) 已经进行了类似的和稍稍复杂一点的计算。得到一组完整的全部运输系数的计算。从 Haff (1983) 的探索性 (尽管非常直观和物理目的明确的) 计算开始, 变化到 Ackermann & Shen (1982), Babic & Shen (1989), Hopkins & Shen (1986), Raymond & Shen (1986), Shen & Ackermann (1982, 1984, 1986), Kanatani (1979, 1980) 和 Ogawa et al (1980) 的大量计算, 都是建立在简化例如关于碰撞频率和粒子互作用之类的性质的假设基础之上的, 再变化到根据象 Chapman & Cowling (1970) 所描述的那种非均匀稠密气体的动理论形式体系推导出最后的计算类型。以上最后一种类型的首次计算 (Savage & Jeffrey 1981) 是在假设无规粒子速度遵守 Maxwell 分布的基础上, 对均匀尺寸的光滑球推导出应力张量的碰撞部分的。[通过 Campbell & Brennen (1985a) 和 Walton & Braun (1986a, b) 的计算机仿真以及 Drake (1988) 的斜槽流动实验对速度分布的测量表明, 速度分布与 Maxwell 分布相差不大。] 但理论没有包括象式 (6) 这样的能量方程, 因此不可能预测颗粒温度值, 在这种意义上, 这一理论是不完善的。Savage & Jeffrey 当时确实认识到, 施加一个其平方与颗粒温度同量级的速度梯度, 可能引起粒子间发生碰撞角度的分布的各向异性。他们的各向异性预言后来为 Campbell & Brennen (1985a) 所证实。Jenkins & Savage (1983) 所作的下一步工作是解决颗粒温度的能量平衡, 但

这样做就要求对碰撞分布的各向异性作近似；不过后来，在 Lun et al (1984) 的论文的第一部分中用 Savage & Jeffrey (1981) 的较精确的碰撞分布完成了相同的计算。更重要的是，那篇论文的后半部分是首次企图用一些方法计算流动对应力张量的贡献。直到这时为止，所有的计算都假设了 Maxwell 速度分布，并且都只给出应力张量的碰撞部分。严格地说，当系统是处于平衡时（即没有速度和温度梯度，以及没有能量耗散），速度分布才应该是 Maxwell 分布。Maxwell 速度分布将预言流动应力张量中对角线外的所有分量都为零，但在低固体分数时强烈地表现出的非零的流动应力表明，尽管 Maxwell 分布和测得的分布之间有表面上的相似性，但流动中有强的非 Maxwell 效应的作用。Lun et al (1984) 计算了 Maxwell 速度分布的第一次修正，并得到了流动应力的出乎意料的准确的预测；可是这么做，就要求放弃各向异性的碰撞分布。Jenkins & Richman (1985a) 几乎同时完成了类似的计算。Richman (1986) 和 Jenkins (1987 a, b) 最近综述了这种方法，许多理论的计算结果都已示于图 3b。根据最初所写的，这些理论之间的很大差别在于它们对密度依赖于应力的函数关系形式的选择。在所有情况下，密度关系式的确定与其他解无关，通常根据气体分子动力学模型的曲线拟合来确定。为了消除由于这种函数的选择在结果中所造成的任何偏差，描绘在图 3b 上的所有曲线都用 Babic & Shen (1989) 所给的密度关系式重新计算过。许多早期理论只考虑应力张量的碰撞分量；这些分量在图 3b 中很容易区别，因为当 $v \rightarrow 0$ 时曲线趋向零，而不是趋于无穷大。

在这些结果的推广过程中，主要由于计算的巨大复杂性，出现了一些问题。例如，Lun et al (1984) 的理论没有计算出任何法向应力差。为了包括这些法向应力差要求进行更加复杂的分析，正如 Jenkins & Richman (1988) 对光滑圆片在稠密（碰撞占优势）和稀疏（无碰撞）两种极限情况所完成的分析，以及 Richman (1989 a) 对光滑球在稀疏极限方面所完成的分析。Richman (1989 b) 对法向应力差还发展了一种探索性理论；他的结果中的一些已画在图 4 上，并且与光滑球的计算机仿真数据极其一致。[此精确理论最近已在数字上扩大到包括全部固体浓度范围 (M.W. Richman, 私人通信, 1989)，至少对于 $\epsilon = 0.8$ 的情况，它与更有探索性的理论是一致的 (Richman 1989 b)，相差在百分之几以内。] 在计算中包含旋转和表面摩擦（甚至在避开法向应力差时）同样证明是非常困难的。Lun & Savage (1987) 把他们的粒子摩擦功建立在较早的 Jenkins & Savage (1983) 理论上，此理论只考虑碰撞应力，因为他们发现考虑摩擦太复杂以致在 Lun et al (1984) 计算中不能计入。Jenkins & Richman (1985 b) 进行了一种类似于 Lun et al 对粗糙圆片所进行的那种计算，但发现，理论只有在粒子表面摩擦值小得不现实时才正确。Nakagawa (1988a) 进行了一种对任何表面摩擦都正确的计算，但限于稀疏极限情况。这些复杂性被反映在计算的复杂性上，当 Lun & Savage (1986) 在他们较早的计算中力图计入一个速度相关的恢复系数时，他们揭示了这种计算的复杂性（尽管他们用了易于并入他们的碰撞积分的按指数衰减的恢复系数）。

4 边界条件

传统流体力学有一个无滑移的极优越的条件，在这种条件下固体边界处的速度和热力学温度二者都假设成是从外部加到边界上的性质。这就允许无论流场的其余部分发生了什么情况，边界处的材料性质都能独立地确定。颗粒材料并不如此有福气，并且在固体表面或者自

由表面处的流动行为是整个流场解的组成部分。例如，象图 2 中那样，在边界处通常有速度滑移，这就引起了一大堆问题，因为滑移速度由流动与边界相互作用的方式来决定，从而要求边界的物理本质与远离边界的流动相匹配。同样地，壁面处的颗粒温度不能独立地确定。因为那里有滑移速度，边界将做剪切功，并以等于壁面剪应力和滑移速度乘积的速率产生颗粒温度。因此壁面可看成为局部温度源。但是，在同一时间，与壁面的碰撞在耗散着能量。因而在不同情况下，壁面可以充当颗粒温度的源或汇。

边界效应也已由实验观察到了。Savage & Sayed (1984) 和 Hanes & Inman (1985) 都对几乎相同的材料进行了差不多相同的剪切-室实验。这两种研究之间仅有的主要不同是，Savage & Sayed 的壁面用砂纸打磨过，使其粗糙度一般比试验材料的粗糙度小得多，而 Hanes & Inman 则在壁面上粘上试验材料的粒子使壁面粗糙。不管是什么样的情况，当其他条件相当时，Hanes & Inman 测得的应力达到 Savage & Sayed 测得应力的 3 倍。Craig et al (1987 a) 研究了边界条件对金属粉末的剪切-室实验的影响，这些研究表明，在决定试验结果时驱动表面要比试验材料更重要。与边界条件的关系也可以解释在一些斜槽流动实验和仿真中的不一致性。例如，图 2 所示的速度分布曲线非常类似于 Bailard (1978)，Drake & Shreve (1986) 和 Augenstein & Hogg (1978) 所观察到的速度分布曲线，但后者缺少由 Savage (1979) 和 Ishida & Shirai (1979) 所观察到的拐点。同样，相应的固体分数分布曲线非常类似于 Ridgway & Rupp (1970) 所观察到的，但靠近斜槽底部的低密度区几乎是 Ahn et al (1989a) 的数据所没有的。这种差别不仅可能认为是边界特性所造成，而且可认为是用了不同材料进行这些研究这样的事实所造成，而这些材料可以以非常不同的方式与类似的边界相互作用。

最近，一些理论研究把边界条件结合进了他们的问题的解中。所有这些研究中的第一个 (Hui et al 1984) 把壁面的相互作用模拟成一个等效粗糙度系数，但忽略由于表面处速度滑移边界所做的剪切功。Jenkins & Richman (1986) 对二维光滑圆片流动在粘接到平坦壁面上的半圆凸缘所组成的边界附近提出了一组边界条件。他们假设，粒子的速度分布是 Maxwell 分布，并且假设，被粘结粒子的间距要使自由粒子总能撞到一个被粘结的粒子，并且不会与边界的平坦部分相撞。然而，在研究 Couette 流动问题的相应解时困难变得明显了。结果表明，对于固体分数的一个确切的平均值，在驱动表面之间的一个给定分隔距离定常流动是可能的。相反，对这些流动的剪切-室实验和计算机仿真指出，定常流动对于任何平均浓度都是可能的。后来 Richman & Chou (1988) 把这项工作扩大到圆片的非 Maxwell 速度分布，Richman (1988) 则把它扩大到球形粒子。后面这两项工作通过不太严格地应用边界处法向应力连续的条件对唯一性问题提出了一个探索性解。但最近 Gutt & Haff (1988) 和 Hanes et al (1988) 都独立找到了唯一性问题的解答。他们注意到了，壁面的存在在最靠近它的地方造成了粒子排列的局部畸变。因此，在应用边界条件时作为当然的事他们使最接近边界的邻区中的流动浓度成为要确定的自由参数。允许壁面处密度有变化将在解中引入足够的自由度，以便在任何平均浓度时都有可能产生定常流动。[这证明问题的这种解实质上等同于 Richman & Chou (1988) 和 Richman (1988) 所采用的探索性论证。] Richman & Marciniak (1988) 还分析了沿具有凸缘壁面的倾斜槽向下的流动。

如果分析中包括粒子表面摩擦，那将将出现一些其他的问题。图 2 上近壁面处大温度的

产生是粒子表面和壁面之间的大的摩擦耦合的直接结果。这些仿真假设,在与边界碰撞之后离开的时候,在粒子表面和边界之间没有滑移;就是说,粒子将采用转动速度 ω ,使得它的表面速度 $R\omega$ 恰好等于它在壁面处的滑移速度¹⁾。对于第一个边界条件,以平均速度的滑移表明,通过与壁面的碰撞,粒子将获得一个大的转动速率。在与壁面碰撞的所有粒子都将以几乎相同的速率转动的意义上,这种大的转动本身并不是无规的或温度样的。然而,由于以后接着发生碰撞,粒子将通过表面摩擦耦合把这种转动能量传递给其他一些粒子。传递的转动能中的一部分将加入运动的转动模式,另一部分将加入平移模式。但所产生的平移速度将依赖于碰撞的几何形状,因此近乎是无规分布的,这将使相干的转动运动很快转变成颗粒温度。因此,在固体表面和粒子间的摩擦使边界成为大的颗粒温度源。Campbell & Gong (1987)和 Campbell (1988)已经较详细地研究了这个问题。两种情况都观察到,在边界处的高转动速率引起了应力张量的不对称。他们得出结论,在定常流动中这样的不对称意味着颗粒材料的行为象 Cosserat 连续介质,并且由于应力不对称所含有的内转矩必须由力偶-应力张量的梯度来平衡。(力偶-应力张量产生了穿过材料内部的表面所施加的转矩,正如应力张量描述穿过表面所施加的力一样。)显然,在定常流动中,壁面碰撞引起大的转矩,从而引起大的材料的力偶应力,这种应力必须由材料施加的反向转矩来平衡。Campbell (1988)已经观察到了这种过程,他测量了材料内部产生的力偶应力。这些效应强烈地与粒子表面摩擦相关,因此等待着提出在理论上能够处理它们以前可以考虑有限摩擦的本构模型。

5 迫切关心的事

快速颗粒流动的许多方面只进行了很少一点工作或者仍然还需进行工作。在这里我提到其中的几个并对它们可能的重要性作一点推测。

5.1 材料性质 快速颗粒流动的理论模型研究和计算机仿真研究二者都以粒子性质和相互作用的模型开始,并且由这些模型推知整个颗粒群体的行为。极少有例外,至今的工作都假设,碰撞时的能量损失主要由为常数的恢复系数 ϵ 控制, ϵ 是相对进入速度与垂直于粒子碰撞点的反冲速度之比。按照定义,有 $0 \leq \epsilon \leq 1$,其中 $\epsilon = 1$ 是指没有任何能量耗散的完全弹性碰撞,而 $\epsilon = 0$ 是指完全非弹性碰撞,对于这种非弹性碰撞,在初始法向相对速度中所含有的全部动能在碰撞时都损失了。然而,Goldsmith (1952, 1960), Lun & Savage (1986), Raman (1918)和 Sondergaard et al (1989)的测量表明,恢复系数是相对碰撞速度的强函数。物理上,能量耗散产生于粒子表面的塑性变形。于是,如果碰撞没有强到足以在固体材料内部产生屈服,则人们就预料发生完全弹性碰撞($\epsilon = 1$),并且实际上所有测量都表明,在零碰撞速度时,恢复系数都接近于1。但是显然,对任何速度都发生相当大的塑性耗散,因为所有测得的恢复系数都立刻从1下降。Walton & Braun (1986a)在计算机仿真中和 Lun & Savage (1986)在理论分析中都结合进了速度相关的恢复系数。但是有一些证据说明,结合简单的速度相关性与一阶修正几乎没有什么差别。例如,Raman (1918)指出,通过在试验之间磨光粒子只能得到在他实验中的重复性结果。这表明,由早期试验所造

1) Campbell & Brennen (1985 b) 同样简要地分析了另一种边界条件,这里,在一种经典的无滑移条件的近似中,在与壁面碰撞以后粒子中心速度等于在转动速率方面无任何变化的壁面速度。他们指出,在壁面附近的大速度梯度,大颗粒温度和低密度区(此种区域是图2的重要特点),对于第二种边界型式大多消失了。Campbell & Brennen (1985 a) 在 Couette 流动仿真中对同样的两种边界条件作了类似的观察。

成的塑性变形足以对后来试验结果产生影响。[这同样可解释 Lun & Savage (1986) 结果中的明显分散性。] 这样，一个真正可靠的微观模型将必须包括粒子表面的变形历史。这样的修正在任何理论模型中或甚至在计算机仿真中可能都是难以处理的，所以关于什么构成一个能满足要求的微观模型（根据这个模型可以构造精确的宏观模型）这个问题仍然存在。

类似的问题出现在粒子表面摩擦的模拟中。标准的表面摩擦系数 μ 代表一个极限条件 (yield condition)；如果在碰撞点的切向力与法向力之比没有超过 μ ，在粒子表面之间就没有滑移，而如果超过了 μ ，则通过接触点所传递的切向力将恰好为法向力的 μ 倍。Sondergaard et al (1989) 测量了粒子与壁面碰撞时实际上受到的表面摩擦。在粒子和壁表面之间产生滑移的那点之前，此种试验都有比较好的重复性。然而，当粒子滑移时，试验结果就有相当大的分散性，这表明粒子的表面摩擦系数不是唯一的值。如果假设表面摩擦的微观成因在于两个接触表面上的微观粗糙部分的相互作用，那这是可以预料的。对于碰撞，法向应力将很少大到足以引起粒子的显著变形，所以接触面积将是小的，因而只有微观粗糙部分的小部分将在碰撞时起作用。所以，碰撞的结果对表面摩擦的局部变化极其敏感。而且，有迹象表明，碰撞砍掉了微观粗糙部分，在流动发展中甚至造成了平均表面摩擦的变化。

一个实际的表面摩擦系数是很难结合到理论模型中的，因为粒子表面之间的滑移/无滑移的判定在碰撞积分中引入了不连续性。代替它的是，大多数理论利用了一个切向恢复系数 β ，它代表粒子表面之间最终与最初相对切向速度之比。根据定义，有 $-1 \leq \beta \leq 1$ ，其中 $\beta = 1$ 表示光滑粒子（也就是没有摩擦的互相作用）， $\beta = 0$ 表示粒子表面之间无滑移，而 $\beta = -1$ 表示反向的相对速度 [也就是不仅有摩擦相互作用，而且通过粒子表面的弹性变形储存和释放切向能量；在 Sondergaard et al (1989) 的实验中由于切向变形引起的能量储存效应是明显的。] 一些理论 (Jenkins & Richman 1985b, Lun & Savage 1987) 假设： β 是一个常数，但这不是一种好的近似，因为在真实摩擦材料中， β 将强烈地取决于碰撞几何条件

(参看 Goldsmith 1960)。在 Nakagawa (1988 a,b) 的理论中已经结合了这种几何相关性，不过他假设，粒子表面总是互相地相对滑移，因此避免了碰撞积分中滑移/无滑移的不连续性。

5.2 微结构 Savage & Sayed (1984) 的剪切-室实验以及 Campbell (1989)，Campbell & Gong (1986) 和 Walton & Braun (1986 a,b) 的计算机仿真表明，剪切颗粒材料的整体摩擦系数 τ_{xy}/τ_{yy} 随粒子浓度增加而下降。这些测量的一些例子示于图 5。这是一种相当出乎意料的结果，因为测量静态试样屈服强度的标准土力学试验指出，极限摩擦系数随浓度的增加而增加。综合这两种观察结果指出， τ_{xy}/τ_{yy} 的

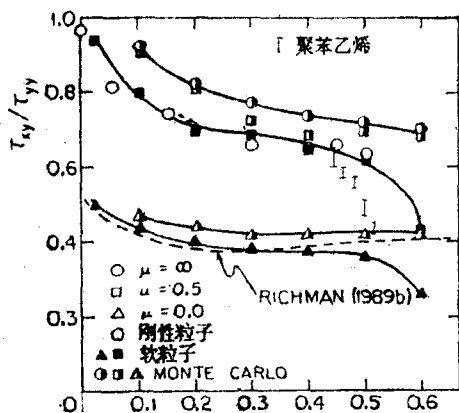


图 5 作为固体分数 ν 的函数的球粒子摩擦系数。刚性粒子仿真取自 Campbell (1989)，软粒子仿真取自 Walton (1986b) 和 Walton & Braun (1986b)，而 Monte Carlo 仿真由 M. A. Hopkins 提供 (私人通信, 1986)。所有这些仿真都假设 $\epsilon = 0.8$ 。还示出了 Richman (1989 b) 的光滑球理论的计算结果以及取自 Savage & Sayed (1984) 对聚苯乙烯珠的剪切-室实验的数据

下降是充分发展颗粒流动的标志,这种颗粒流动在未被扰动试样中是不存在的。Campbell (1989) 和 Campbell & Gong(1986) 的计算机仿真指出,所观察到的下降可能是由两个原因引起。在低密度时(流动应力是主要的),摩擦系数将是大的,并且当碰撞应力变得较重要时,它随密度的增加而减小;一些理论,例如 Lun et al(1984) 和 Richman(1989b) 的理论预报了完全相同的行为。在较高密度时(此时碰撞应力占优势),摩擦系数进一步的下降可能是在材料内部发展了一种内在的微结构而引起。(注意,理论结果和 Monte Carlo 仿真结果——按照它们的解释,二者都没有考虑到微结构的形成——都没有显示出在大密度时的这种附加的逐渐下降。)微结构通过引起碰撞角分布上的强各向异性(也就是碰撞将在给定的连接两个粒子中心的单位矢量 \mathbf{k} 处发生的概率)间接地影响着碰撞应力。因为由并矢积 $\langle \mathbf{k} \mathbf{k} \rangle$ 的平均形成碰撞应力张量,所以占优的 \mathbf{k} 值可能强烈地影响应力张量分量的绝对值和相对值二者。

微结构的发展和它对碰撞角分布的影响已经被 Campbell & Brennen (1985 a) 对二维圆片简单剪切流动的研究所证实。他们指出,为了维持在大密度时的剪切流动,粒子自行排列成按平均流动方向取向的许多层;这种组织允许在层间在沿着层的方向上有几乎不受约束的运动,并因此容许在(没有层的形成时)有可能呈现固体行为的浓度上存在剪切流动。这样的微结构引起粒子喜欢沿着平行于层的路线与它自己层内的一些粒子碰撞,以及在大致垂直于流动方向的角度上与近邻层内的一些粒子碰撞。这使倾向于占优的碰撞角,而 Campbell(1986 a) 正是结合这样的微结构作了探索性计算,计算表明,在碰撞摩擦系数方面有预料的下降。对刚性球粒子系统还没有报告过任何有关相当的微结构发展的观察结果,虽然这样的微结构的作用在图 5 所示的实验结果中和仿真结果中是明显的。然而,由 Heyes (1986) 对 Leonard-Jones 分子所进行的分子动力学研究指出,剪切作用迫使分子自己大致朝着流动方向(相应于现在仿真中的 x 方向)排列成线性的分子“带子”。这些带子自己在垂直于流动方向的平面上组织成三角形的堆积。于是,在高密度时在这样的堆积内部就可能以和通过层与层之间的相对运动来维持二维剪切运动大致相同的方式,通过带子与带子之间的相对运动来维持剪切运动。象这样的一种排列是最少约束的,它仍然容许剪切运动,看来,预料在颗粒剪切流动中在高密度时形成类似的微结构似乎是有道理的。对碰撞几何条件的最终限制与二维情况非常类似。这就是,在同一带子内部的粒子之间,碰撞发生在粒子的两极附近,而粒子与邻近带子中的粒子之间的碰撞则大致上是均匀地分布在赤道附近。然而,人们可以猜测,由于额外的平移自由度,三维微结构比它的二维对应物的约束少得多。

注意,上节中的讨论纯粹是运动学的,也就是它们采取了“为了使剪切流动得以存在,粒子必须假设是这种排列”那样的方式,但是对微结构的形成过程没有作任何描述。遗憾的是,没有任何好的理论模型来描述微结构的发展,并且甚至对推动这种发展的力也没有好的直观的了解。因此,在有描述微结构是如何产生的方法之前,把微结构的发展结合入理论模型中将是不可能的。[Campbell(1986 a) 在他的探索性研究中简单地创造了一种微结构,它类似于 Campbell & Brennen(1985 a)的那种。]事实上,现有的理论,例如如图 5 上所画出的 Richman 理论计算结果,当趋于可剪切极限时,整体摩擦系数实际上随浓度的增加而稍有增加。因而,这是一个需要进一步做大量非常有意义的工作的领域,它可能有着大大超出颗粒流动范畴的关联领域。

图 5 可能给出对这种问题复杂性的一些领会,观察到了,所有计算机仿真都显示出在大

ν (约 $\nu=0.6$) 时 τ_{xy}/τ_{yy} 值有大的下降, 这似乎与 Heyes (1986) 所观察到的六角棱柱状微结构的发展相符合。但实验结果表明, 在固体分数小一些, 约在 $\nu=0.52$ 时 τ_{xy}/τ_{yy} 下降, 这可能指示一种微结构的发展, 在这种微结构中球粒子组织成了垂直于速度梯度的层。二者中任何一种微结构都使在大密度时有可能维持剪切流动, 并且二者对 τ_{xy}/τ_{yy} 都有类似的影响。于是显然, 人们不能作一个关于流动将采取哪种形式的先验假设, 并且两种情况在微结构选择上的表现差异必须与不同的流动情况有某些关系。计算机仿真假设了一个无重力的环境, 并通过假设周期地重复的控制体积假设了在无限介质中大致均匀的剪切。剪切-室实验是在有限体积中在一个具有指向施加的速度梯度方向 (可能垂直于所形成的层) 的重力加速度矢量的旋转系统中进行的。但没有办法知道微结构的选择是否代表了某种由试验体积几何条件所造成的长程序 (long-range order), 是否有重力或者离心力的某种复杂作用, 或者就此而言, 图 5 上的实验结果和仿真结果之间的不一致性是否真实地反映了微结构的不同。

5.3 非均匀粒子尺寸和偏聚 至今, 大多数实验和理论研究都假设颗粒材料是由均匀尺寸的圆片或球形粒子组成。但由压碎操作或采矿操作所形成的真实材料, 有各种各样的粒子尺寸分布, 这可以显著地改变流动的性质。例如, Zeininger et al (1983) 发现, 送料器的流量可能因二元混合物 (两种粒子尺寸) 而极大地提高, 当每种尺寸的浓度大致相等时流量最大, 而当粒子尺寸比增大时, 这种效应更加惹人注目。

对二元混合物已经总结了许多动理论的研究成果 (Shen 1984 a, Farrell et al 1986, Jenkins & Mancini 1987, Shen & Hopkins 1988), 并且对粒子尺寸的分布也已作了一些总结 (Shen 1984 b, Shen & Hopkins 1988)。然而, 在这些研究之中, 只有 Jenkins & Mancini 对二维二元圆片混合物的分析考虑了应力张量的碰撞分量和流动分量二者。处理二元混合物的一般方法, 是把每种尺寸粒子的集体作为单独一种介质来处理, 这种介质中的粒子一方面自己相互作用, 一方面与其他尺寸的粒子相互作用, 并作为对每种组分导致各个单独的相方程和对混合物导致联合的相方程的过程来处理。

但是这样的方法将不能得到粒子混合物的所有感兴趣的性质。一个已经使工业遭受麻烦和有力地排除了对上述理论进行实验室试验可能性的问题是, 在剪切-室中所遇到的重力或离心力这样的任何体力的作用下, 颗粒流动有根据尺寸偏聚的强烈趋势。[例如, 在 Savage & Lun (1988) 所进行的二元混合物斜槽流动实验中有明显的非常快速的分离率。] 最近 Savage (1987) 已经综述了这个课题。简单地提出, 粒子团的无规运动对于把间隙张大到足以使小粒子落入其中, 其可能性要比使一个大粒子落入其中更大。因此, 小粒子向流动的底部迁移, 而大粒子向顶部迁移。要指出, 这种过程与物质的分子扩散并不类似; 事实上, 它是完全相反的, 因为均匀混合物向着完全分离的方向发展, 而不是相反的方向。而且, 这种效应不可能用上节提出的理论预测, 因为出现在各个相的动量方程中的表面力和体力将不推动这种类型的过程。而, 这是粒子尺寸间复杂互相作用的副产品, 它没有被充分了解, 而且应该出现在各个相的方程的互相作用项中的某处。

5.4 非球形粒子 来自破碎或采矿操作的颗粒材料一般是带非常多的角的, 而挤压出的塑料小丸则常常有着圆柱的形状。但是所有分析研究和大多数计算机仿真都是对完全球粒或圆片进行的。Walton (1984) 和 Hopkins & Shen (1988) 对多角形粒子的计算机仿真是少

数个例外, 不过他们的粒子都没有很大的长径之比。在大多数研究中由于种种理由都假设成球形。在理论工作和计算机仿真中检测圆形粒子的碰撞是容易的, 因为相接触的粒子不管什么时候它们的中心相距总是两个半径。对于非圆形粒子, 接触的判断变得复杂得多, 因为必须考虑随着粒子转动而改变的粒子的取向。再有从实验观点来看, 非球形的粒子是不希望有的, 因为当试验进行时粗糙部分势必会破坏, 造成粒子性质的缓慢下降。

球形粒子可能是砂粒子的好的近似, 尽管砂粒子是有角的, 但它仍然大致是球形的, 并且当碰撞破坏了任何突起部时就变得更近于球形了。然而, 挤压出来的小丸和一些农业谷物, 例如大米有特别大的长径比, 并且不清楚这可能有什么影响。有大长径比的粒子在给定流场内也许更容易取它们的主轴方向。这样的粒子将会趋向于将它们自己无规排列在当地速度梯度的方向上和垂直于它的方向上吗? 或者它们将是不稳定的和象圆片在粘性剪切流动中那样转圈子跳动吗? 其回答也许大大地影响流动的性质, 因为这样的粒子的无规取向势必将使粒子的自由运动变得混乱, 并且特别是可能干扰微结构的形成。

5.5 间隙流体效应 产生式 (1) 的 Bagnold(1954) 原始实验是在甘油-水-酒精混合物中对密装载的蜡球悬浮液进行。他发现式 (1) 的有效性取决于称为 Bagnold 数的无量纲量

$$Ba = 4\rho_p R^2 \lambda(\nu)^{1/2} \gamma / \eta \quad (7)$$

其中 ρ_p 是粒子密度(或者在本情况下是流体密度, 因为在悬浮液中密度必须是一样的), η 是间隙流的动力粘度, 而 $\lambda(\nu) = (\nu_0/\nu - 1)^{-1/3}$ 是“线性浓度”, 在此浓度下 ν_0 是最大的静态体积浓度。[函数 $\lambda(\nu)$ 大致是粒子直径与粒子间平均自由间隔之比, 并且在方程 (1) 中是对 $f_{ij}(\nu)$ 函数的 Bagnold 近似。] 如果 $Ba < 40$, 他就把它叫做“宏观粘性”状态, 他发现悬浮液的行为象具有正比于 $\lambda^{3/2} \eta$ 的粘度的牛顿粘性流体。如果 $Ba > 440$, 也就是“颗粒惯性”状态, 粘度正比于 $\rho R^2 \lambda^2 \gamma$ 而变化, 与方程 (1) 大致相同。因此, Bagnold 数是颗粒惯性状态和宏观粘性状态的粘度之比。Savage & McKeown(1983) 重复了这些试验。然而他们发现, 惯性应力近乎与粒子尺寸无关, 并且没有显示出由 Bagnold (以及量纲分析) 所确定的那样依赖于 R^2 的关系。Savage & McKeown 由这种观察结果得出结论, 液体湍流(它在长度尺度范围内以剪切间隙宽度的数量级而不是以粒子尺寸起作用) 在结果中所起的作用比 Bagnold 所承认的更大。Bagnold 仅用一种粒子尺寸进行他的实验, 并且与 R^2 的依赖关系是从他的分析中推测出来的。然而, 在 Bagnold 的辩护中, 应该注意的是, 尽管两组实验都在共轴圆筒流变仪中进行, 但 Savage & McKeown 旋转了流变仪的内圆筒, 而 Bagnold 则旋转了外圆筒。这将使 Savage & McKeown 的流动遇到 Taylor 不稳定性, 二者都将使流动更趋向于湍流, 并且还引起作用在正比于间隙距离的长度尺度范围内的流动。因此仍然有可能二者都是正确的, 并且 Savage & McKeown 的测量受不稳定性长度尺度的控制, 而其他实验则可能受粒子尺寸的控制。

但所有这一切都产生了问题: 什么机理产生了 Bagnold 在颗粒惯性状态下所测得的力? 因为这些实验都在悬浮液中进行, 所以流体的密度等于固体的密度, 因此人们不能假设, 由粒子惯性所携带的力超过流体惯性所携带的力而占优势。在解决这种混乱问题时, 方程 (1) 强烈地使人想起 Prandtl 对流体湍流的混合长度理论, 指出引起 Bagnold 弥散应力的相同的流体力学原理同样激发流体湍流。还没有足够详细的资料使得在确定最终应力时就每种机理的重要性作出判断。

不管对悬浮液数据的有疑问的解释,有限数量的现有证据指出,对于固体粒子比间隙流体更稠密的那些流动,方程(7)也许是正确的。Hanes & Inman (1985)报告了对水中玻璃珠的剪切-室实验,它们大致服从 Bagnold 规定。Buggish & Stadler (1986) 和 Stadler & Buggish (1985)对空气中的细粉末进行了剪切-室实验,由于粉末的尺寸小,所以相应于小的 Bagnold 数;这些试验指出了一种比快速颗粒流动更类似于 Bingham 流体的行为。在这种情况下粉末要求有一个初始屈服应力(它可能由于粒子间的强的内聚力和附着力引起),并且在屈服之后承受线性地正比于剪切率的附加应力,同时显出宏观粘性行为。最后,Zeininger & Brennen (1985)(还可参看 Zeininger et al 1983)对水下漏斗流动(它是拉伸流动而不是剪切流动)进行了实验,发现其数据极好地服从基于拉伸的 Bagnold 数的 Bagnold 规定,它指出了 Bagnold 概念的某种普遍性。

显然,充分考虑粒子与流体湍流之间相互作用的间隙流体内部的粒子流动理论太复杂,以致不能精确地处理。这种问题已经由 Shen & Ackermann (1982)从理论上以良好的近似方法,以及由 Shen et al (1988)以计算机仿真着手研究了。他们假设,间隙流体的单独贡献是充当粒子的简单阻力,它的主要影响是对颗粒温度添加一种与碰撞率无关的耗散机理。结果,所产生的温度和应力较小,并且在图3上当 $v \rightarrow 0$ 时所产生的应力渐近线(它与温度耗散趋于零有关)将有相当大的衰减,并可能根本就不出现。当粒子碰撞提供了大量动量传递时,对于非常稠密的混合物这可能是一种好的近似。一种完善得多的理论最近已由 Savage & Lun (1989)创造出来了,他们考虑了粒子运动和流体湍流的相互作用。混合物被模拟成粒子和流体的各自独立的相方程,这些相方程通过相互作用项产生耦合。粒子力学是以和 Lun et al (1984)在无流体快速流动理论中所用的大致相同的方法来模拟,但在运动方程中加进了计及浮力阻力和粒子上的附加质量力等的补充项并且在能量方程中也加进描述碰撞时穿过流体的粒子间的能量交换以及从粒子到流体的能量交换的补充项。用涡粘性理论模拟流体湍流,该理论中粒子-流体的相互作用作为湍流能的源项。这种方法依赖于几个由探索性方法确定的常数,但它是一种启发式的直观方法,并且显示出有很大的前途。

5.6 颗粒系统的固体/流体行为 大量工业情况中的颗粒材料可以假设为流体(流动)行为或固体(不流动)行为。其中最重要的是送料器中的漏斗流动。对于这种流动,停滞的材料覆盖着壁面,形成一只漏斗,材料的中央核心通过此漏斗流动。停滞漏斗的边缘是一个界面,在此界面的一侧,材料在流动着,而在其另一侧材料是停滞的。类似的行为在几乎所有松散材料的处理装置中,在 Hanes & Inman (1985)的剪切-室中以及在 Campbell & Brennen (1985 b)的斜槽流动计算机仿真中都观察到了。任何这样的系统的性能都与上述这种界面的形状有关。而这种界面的形状又必须由控制固体和流体行为之间的变化的力来确定。然而,没有可能精确地预测漏斗流动的发生或者预测最终漏斗的形状。这似乎象是快速颗粒流动理论的一个理想的课题,不过在流体/固体的转变中,可以预料粒子间有长时间持续的接触,这些扩大了快速颗粒流假设的有效性,并且不仅提出了从流体行为向固体行为的转变,而且提出了从快速流动到准静态流动的转变。[然而值得注意的是, Campbell & Brennen (1985 b)在他们的计算机仿真中假设,粒子间所有的接触都是瞬间碰撞,但是他们仍然观察到了流体行为-固体行为的转变。]

因为快速颗粒流动是作为耗散气体来处理的,所以流动/不流动的转变可以看成类似于

材料内部的相变，并因而由应力、浓度和颗粒温度的局部条件通过某种类型的状态方程来控制。在它的最简单情况下，材料表现为固体行为，因为局部颗粒温度太小，以致在给定局部应力状态之后，不能使低于能产生流动的最大固体浓度的材料膨胀。推测起来，如果温度可以上升到足够高的水平，则材料将膨胀并且表现出流体行为。这问题是混合的，因为在固体区域内没有速度梯度，那里可能不作任何剪切功，因而没有任何局部温度产生，以致在固体区域中任何颗粒温度都必须由外部传导进来。[Campbell & Brennen (1985 b) 在斜槽流动仿真之一中观察到了这种过程。]然而，由于局部微结构的性质，所以更可能有相变过程，而不是只有简单的某种压力-密度-温度关系。回想起，如果粒子是无规构形的，则在材料内部的成层结构或带子样结构的形成将允许在材料表现为固体行为的那些密度上维持一个剪切流动。因此在给定的压力、密度和温度情况下，相变可能产生或不可能产生，视局部微结构的情况而定。但是，正如前述，微结构的演变以及产生微结构的机理都并不十分了解。

Johnson & Jackson (1987) 从完全不同的观点研究了这个问题。他们根据 Lun et al (1984) 的分析模拟了颗粒流动，但简单地在运动方程中增加了 Coulomb 摩擦应力，作为快速流动和准静态流动状态之间的桥梁。当粒子间有长时间持续接触时，这也许更好地近似了材料行为；但在这种描述中，在不能克服 Coulomb 摩擦力的区域中同样没有剪切。因为容许极限摩擦（它可能不同于流动材料中的摩擦）随固体分数而变，所以这种分析反映了上节中描述的许多特点。

6 结束语

仅在 12 年以前，Ogawa (1978) 才第一次提出颗粒温度的思想，并且只在近 10 年中才在文献中出现了快速颗粒流动的流体力学理论。从那时以来作了大量工作，目的是要证明在颗粒温度代替热力学温度作为所有输运过程背后的驱动力的假设下，把颗粒材料模拟成稠密气体是正确的。至今，颗粒流动理论的进展主要是由于理论模型和计算机仿真之间的互相促进。所有这些工作是在实验室实验的庇护下进行的，但遗憾的是，直接的实验室实验技术相对说来是不够高级的。确实存在着的实验数据是测量整体性质的，例如系统的应力/应变率行为等，但极少测量微观性质，例如颗粒温度等；试验装置内部关于实际材料行为的不确定性，使得实验结果显得那么含糊不清。然而理论分析和计算机仿真二者都是建立在材料性质和边界性质基础之上的，并且流动的行为可能由于在所选择的模型中表面上看起来无关紧要的变化而剧烈地改变。与此同时，几乎没有直接的实验资料来估计模型选择的适应程度。此领域非常需要能够进行例如速度、密度和颗粒温度分布这样的性质的详细测量的实验措施，以帮助顺利地结束这些争论。

参 考 文 献 (116篇，略)

程屏芬译自: *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 22 (1990): 57—92. (董务民校)