

# 流体力学问题的三次样条配置法\*

王 璞

兰州大学数学力学系 (邮政编码730000)

**提要** 本文给出了三次样条配置法在流体力学问题数值解中的应用以及在这一领域的新进展。给出了流体力学方程中主要的样条函数关系和解算步骤。所有情形都是便于反演的三对角形矩阵。简要评述了SADI方法和样条方法在每一坐标方向的分步计算方法、截断误差和稳定性。给出了处理混合边界条件的一般公式。最后简要讨论了样条近似引起的数值弥散和耗散。

**关键词** 三次样条配置; 数值解; 流体力学; SADI方法; 弥散和耗散

## 1 引言

样条近似是国际上近十几年发展起来的求解流体力学问题的数值方法, 对于处理带有激波、边界层、不规则边界和相变等一些较特殊问题具有重要的实用价值。

样条 (spline) 作为数值方法中的术语, 首见于1946年 Schoenberg<sup>[1]</sup>的论文。此后样条的理论和应用研究都有了相当大的发展<sup>[2-6]</sup>。Rubin等<sup>[6-8]</sup>是用三次样条近似求解流体力学问题的倡导者。他们系统地研究了求解偏微分方程的配置法, 给出了可用于直接求解的 $3 \times 3$ 矩阵系统, 还把差分法中的交替方向隐式 (ADI) 法推广到样条中, 称为样条交替方向隐式 (SADI; Spline Alternating Direction Implicit) 法<sup>[6]</sup>, 并研究了高精度计算格式<sup>[7]</sup>。为了便于实际计算和节省机时, 笔者和 Kahawita<sup>[9-11]</sup>扩展了 Rubin 等的工作, 把求解上述 $3 \times 3$ 矩阵系统的过程转变为求解仅包含在节点上的函数值, 或一阶导数值, 或二阶导数值的三类等价的标量方程组, 且总保持为三对角形。实际应用时, 可根据问题及边界条件选用任一组。Lauriat<sup>[12]</sup>以方形空腔中的自然对流问题为实际算例, 对上述两种形式做了比较, 证实变换后的形式比应用 $3 \times 3$ 矩阵系统可节约 $1/3$ 左右的机时。为了便于实际应用, 笔者还对相关量的计算和各类边界条件给出了相应的公式<sup>[13,14]</sup>。根据样条近似和配置法的特点, 笔者新近提出了按坐标方向进行分步 (或分裂) 计算 Navier-Stokes 方程的方法<sup>[15,16]</sup>。该方法不仅可以节省机时, 减少内存, 而且有效地避免了 SADI 法中每一步都需确定附加边界条件, 计算一、二阶导数值的缺点。

\* 中国科学院国家科学基金资助课题。

显式样条计算格式与相应的有限差分格式相比,其稳定性条件更受限制,因此Rubin和Graves<sup>[6]</sup>认为不值得推荐。在通常情况下这是正确的。但笔者和Kahawita<sup>[11]</sup>指出,当粘性系数趋于零,网格雷诺数在稳定条件中起主导作用时,显式样条格式的稳定性条件反而放宽了。为了探讨用该方法求解无粘流动问题的可能性,笔者尝试把差分方法中一些典型的计算格式扩展到样条方法中,提出了样条Lax-Wendroff格式和样条蛙跳格式<sup>[17,18]</sup>,并导出了它们的修正微分方程,分析了格式的稳定性条件及数值弥散和耗散效应,然后又扩展到对非线性Burgers方程的研究。与中心差分不同,一阶导数用三次样条近似所引起的数值弥散是五阶的,这在对流项起主要作用的问题的数值计算中能使结果更接近实际。某些算例已在[18,19]作了介绍。

近年来,参量样条配置方法也有所发展<sup>[20,21]</sup>。而三次样条是参量趋于零时的特殊情况。笔者曾指出<sup>[21]</sup>,与参量不为零时的样条近似精度相比,三次样条具有最小截断误差。

三次样条配置法的主要优点是:①所得到的标量方程组总是三对角形的,因而易于求解。②选用的计算网格可以是均匀的,也可以是非均匀的。对于一阶导数而言,在均匀网格中,近似精度为四阶;在非均匀网格中为三阶。对二阶导数,不管网格均匀与否皆为二阶精度。③由于函数的一阶导数和二阶导数以未知量的形式出现,包含导数的边界条件可以直接纳入求解过程之中,因而易于避免在通常的有限差分法中处理带有导数的边界条件时所遇到的困难。

应该指出,尽管该方法所需求解的方程组为三对角形的,但其系数计算一般比相应的差分方法中的复杂。如用相同的网格节点,样条方法计算机时要长。不过由于样条方法本身具有某些优点,在处理边界条件和流动较复杂的问题时,适当选择非均匀网格,常能用较少的节点得到良好的结果。这一点在[12]中也与差分法作了比较。因此应根据具体问题选用数值方法,也可将不同的方法配合使用。

样条配置法已在流体力学、水动力学和传热学领域中得到成功的应用,且通常用非均匀网格。本文将侧重于介绍该方法的基本思想,发展过程和主要公式。已涉及的应用,仅在相应的地方指出参考文献。

## 2 基本关系式和数值方法概述

2.1 基本思想和常用样条关系式 三次样条近似的基本思想是:分段用三次曲线来逼近真实解,在不同的段上它们一般是不同的,但必须满足插值条件和连接条件。从而导出在节点处的函数值、一阶导数值及二阶导数值之间的基本关系式。把上述三类值都作为未知量,直接代入微分方程中,结果得到一个有限的线性方程组,通过解线性方程组而求出微分方程的近似解。

设 $x_i$ 为区间 $[a, b]$ 上的节点坐标,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b, \quad h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$u(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数,并且在节点上的值表示为 $u(x_i) = u_i$ 。

设 $\text{Sp}(u, x) = \text{Sp}(x)$ 表示三次样条函数。在区间 $[a, b]$ 的每个分段 $[x_{i-1}, x_i]$ 上都是三次多项式,且满足以下两组条件:

①插值条件。在节点处取给定的函数值 $u_i$ ,即 $\text{Sp}(u_i, x_i) = \text{Sp}(x_i) = u_i, i = 0, 1, \dots, N+1$ 。

②连接条件。在分点处具有连续的一阶和二阶导数，即

$$\left. \begin{aligned} \text{Sp}'(x_i - 0) &= \text{Sp}'(x_i + 0) \\ \text{Sp}''(x_i - 0) &= \text{Sp}''(x_i + 0) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

利用上述条件并引进符号  $\text{Sp}''(x_i) = M_i$  和  $\text{Sp}'(x_i) = m_i$ ，可以得到在分段  $[x_{i-1}, x_i]$  上的样条插值函数和基本关系式<sup>[5]</sup>

$$\begin{aligned} \text{Sp}(x) &= M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} \\ &+ \left( u_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i} + \left( u_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{(h_i + h_{i+1})}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{(u_{i+1} - u_i)}{h_{i+1}} - \frac{(u_i - u_{i-1})}{h_i} \quad (2.2)$$

$$\frac{m_{i-1}}{h_i} + 2 \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) m_i + \frac{m_{i+1}}{h_{i+1}} = \frac{3(u_{i+1} - u_i)}{h_{i+1}^2} + \frac{3(u_i - u_{i-1})}{h_i^2} \quad (2.3)$$

$$m_{i+1} - m_i = h_{i+1}(M_i + M_{i+1})/2 \quad (2.4)$$

$$m_i = \frac{h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{(u_i - u_{i-1})}{h_i} \quad (2.5)$$

或者

$$m_i = -\frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} \quad (2.6)$$

$$M_i = \frac{2m_{i-1}}{h_i} + \frac{4m_i}{h_i} - 6 \frac{(u_i - u_{i-1})}{h_i^2} \quad (2.7)$$

或者

$$M_i = -\frac{4m_i}{h_{i+1}} - \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}} + 6 \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}^2} \quad (2.8)$$

对于二维问题，唯一需要修正的是将原下标换成相应空间方向上的混合下标<sup>[6]</sup>。

2.2 误差估计 引入算子符号  $E^{+1} = \exp(h_{i+1}D)$ ， $E^{-1} = \exp(-h_i D)$ ，并代入到样条关系式 (2.3) 可得<sup>[11]</sup>

$$m_i = \frac{1}{h_{i+1}h_i} \left\{ \frac{3[h_i^2(E^{+1} - 1) + h_{i+1}^2(1 - E^{-1})]}{h_{i+1}E^{-1} + 2(h_{i+1} + h_i) + h_i E^{+1}} \right\} u(x_i)$$

将上式展成幂级数，整理合并得出

$$\begin{aligned} m_i &= (u_x)_i - \frac{h_{i+1}h_i(h_{i+1} - h_i)}{72} (u_{xxxx})_i \\ &- \frac{h_{i+1}h_i(h_{i+1}^2 - h_{i+1}h_i + h_i^2)}{180} (u_{xxxxx})_i + O(h_i^5, h_{i+1}^5) \end{aligned} \quad (2.9)$$

当  $h_{i+1} = h_i = h$  时，则有

$$m_i = (u_x)_i + \frac{1}{180} h^4 (u_{xxxxx})_i + O(h^5) \quad (2.10)$$

可见一阶导数的近似精度对非均匀网格是三阶的，在均匀网格中为四阶。

用类似的方法得到

$$M_i = (u_{xx})_i - \frac{h_{i+1}^3 + h_i^3}{12(h_{i+1} + h_i)} u_{xxxx} + O[(h_{i+1} - h_i)^3, h_i^4] \quad (2.11)$$

说明二阶导数为二阶精度，与网格类型无关。

为了改进二阶导数的近似精度，Rubin等<sup>[7]</sup>给出

$$(u_{xx})_i = M_i + \frac{\Delta_i}{6} [M_{i+1} - (1 + \sigma_i)M_i + \sigma_i M_{i-1}] + O[(\sigma_{i-1})h_i^3, h_i^4] \quad (2.12)$$

其中

$$\sigma_i = h_{i+1}/h_i, \quad \Delta_i = (1 + \sigma_i^3)/[\sigma_i(1 + \sigma_i)^2]$$

它的近似精度与一阶导数一致。不过在隐式计算格式中，离散方程不再具有简单的三对角形式了。

**2.3 解偏微分方程概要** 设  $u = u(x, t)$ ,  $u_t = f(u, u_x, u_{xx})$  为二阶偏微分方程。它的一个关于  $u_i$  的近似解能够通过研究如下方程的解而求得：

$$(u_t)_i = f(u_i, m_i, M_i) \quad (2.13)$$

如果对时间的导数是以常用的向前差分方式进行离散，则有

$$(u_i^{n+1} - u_i^n)/\Delta t = (1 - \theta)f^n + \theta f^{n+1} \quad (2.14)$$

式中上标  $n$  表示第  $n$  个时间步长，当  $\theta = 0$  时，则为显式计算格式； $\theta = 1$  为隐式格式；而  $\theta = 1/2$  时，为 Crank-Nicolson 格式。

可以把 (2.14) 写成更为一般的形式

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t(1 - \theta)f^n + \Delta t\theta f^{n+1} = F_i + R_i m_i^{n+1} + Q_i M_i^{n+1} \quad (2.15)$$

当第  $n$  时间层的值为已知时， $F_i$ ,  $R_i$  和  $Q_i$  可直接求得。

很明显，方程组 (2.15) 中包含有  $3(N+2)$  个未知量，因为  $u_i$ ,  $m_i$  和  $M_i$  皆是未知的，而仅有  $N+2$  个方程。如果与 (2.2) 和 (2.3) 联立，则可写成

$$A_i v_i^{n+1} + B_i v_i^{n+1} + C_i v_i^{n+1} = D_i \quad (2.16)$$

其中

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/h_i & 0 & h_i/6 \\ 3/h_i^2 & 1/h_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 & -R_i & -Q_i \\ \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} & 0 & \frac{h_{i+1} + h_i}{3} \\ \frac{3}{h_{i+1}^2} - \frac{3}{h_i^2} & \frac{2}{h_i} + \frac{2}{h_{i+1}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/h_{i+1} & 0 & h_{i+1}/6 \\ 3/h_{i+1}^2 & 1/h_{i+1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_i = \begin{bmatrix} u_i \\ m_i \\ M_i \end{bmatrix}$$

这就是通常所说的 $3 \times 3$ 矩阵系统,是由Rubin和Graves<sup>[6]</sup>1975年给出的。当然该系统尚不封闭,但补充相应的边界条件后可以求解。文献[6]中列举了有关激波、二维空腔回流及扩散等问题的算例。Lauriat<sup>[22,23]</sup>也用该系统成功地计算了高Rayleigh数下的自然对流问题。

为了简化上述计算过程,避开有时因添加边界条件带来的困难,笔者和Kahawita<sup>[9,10,24]</sup>在河口环流数值模型的研究过程中,把上述 $3 \times 3$ 矩阵系统分别转化为仅包含在节点上的函数值,或一阶导数值,或二阶导数值的三类三对角形方程组,可根据所给边界条件,选用便于计算的一类求解。

### 3 隐式计算格式

3.1 对三角形方程组和递推关系式 以一维非定常问题为例,把微分方程离散成式(2.15)的形式以后,利用样条基本关系式,可得到三类等价的三对角形方程组<sup>[9,10]</sup>及相应的递推关系式。而方程组的系数仅与已知量 $F_i$ ,  $R_i$ 和 $Q_i$ 以及空间网格距有关。现分述如下:

①仅包含节点上函数值的关系为(时间标记 $n+1$ 被省略,下同)

$$A_i u_{i-1} + B_i u_i + C_i u_{i+1} = D_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.1)$$

式中

$$A_i = \frac{c_i h_i}{6c_i} - \frac{1}{h_i}$$

$$B_i = \frac{d_i h_i}{6c_i} + \frac{c_{i+1}(h_i + h_{i+1})}{3c_{i+1}} - \frac{R_{i+1}(h_{i+1}^2 + 3R_i h_{i+1} - 6Q_i)}{36c_{i+1}} + \frac{h_i + h_{i+1}}{h_i h_{i+1}}$$

$$C_i = \frac{d_{i+1}(h_i + h_{i+1})}{3c_{i+1}} - \frac{R_i(2h_{i+1}^2 - 3R_{i+1}h_{i+1}) - 6Q_i(h_{i+1} - R_{i+1})}{36c_{i+1}} - \frac{1}{h_{i+1}}$$

$$D_i = \frac{a_i h_i}{6c_i} + \frac{a_{i+1}(h_i + h_{i+1})}{3c_{i+1}} - \frac{F_{i+1}(2R_i h_{i+1}^2 - 6Q_i h_{i+1}) + F_i R_{i+1} h_{i+1}^2}{36c_{i+1}}$$

$$a_i = \frac{F_i R_{i-1} h_i}{6} + F_{i-1} \left( \frac{R_i h_i}{3} + Q_i \right)$$

$$c_i = \frac{R_i R_{i-1} h_i^2}{36} - \frac{(R_i h_i + 3Q_i)(R_{i-1} h_i - 3Q_{i-1})}{9}$$

$$d_i = R_{i-1} \left( \frac{h_i}{6} - \frac{R_i}{2} - \frac{Q_i}{h_i} \right), \quad e_i = R_i \left( \frac{h_i}{3} + \frac{R_{i-1}}{2} \right) + Q_i \left( 1 + \frac{R_{i-1}}{h_i} \right), \quad h_i = x_i - x_{i-1}$$

为了计算 $m_i$ 的值,可直接利用下述递推关系:

$$m_0 = \frac{d_0 b_1 - d_1 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}, \quad m_i = \frac{d_i - a_i m_{i-1}}{b_i}, \quad i \neq 0 \quad (3.2)$$

$$a_0 = -R_0 + 4Q_0/h_1, \quad b_0 = 2Q_0/h_1$$

$$d_0 = F_0 - u_0 + 6Q_0 \frac{u_1 - u_0}{h_1^2}$$

$$a_1 = -2Q_1/h_1, \quad b_1 = -R_1 - 4Q_1/h_1$$

$$d_i = F_i - u_i - 6Q_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}$$

②仅包含一阶导数值的方程是

$$A_i m_{i-1} + B_i m_i + C_i m_{i+1} = D_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3.3)$$

式中

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{3h_i} - \frac{2Q_i + 4Q_{i-1} - R_{i-1}h_i}{h_i^3 \Delta_i} \\ B_i &= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) - \frac{2Q_{i+1} + 4Q_i - R_i h_{i+1}}{h_{i+1}^3 \Delta_{i+1}} - \frac{2Q_{i-1} + 4Q_i + R_i h_i}{h_i^3 \Delta_i} \\ C_i &= \frac{1}{3h_{i+1}} - \frac{2Q_i + 4Q_{i+1} + R_{i+1}h_{i+1}}{h_{i+1}^3 \Delta_{i+1}} \\ D_i &= \frac{F_{i+1} - F_i}{h_{i+1}^2 \Delta_{i+1}} + \frac{F_i - F_{i-1}}{h_i^2 \Delta_i}, \quad \Delta_i = 1 + 6 \left( \frac{Q_i + Q_{i-1}}{h_i^2} \right) \end{aligned}$$

为了求 $u_i$ , 可用如下的递推关系:

$$u_0 = \frac{d_0 b_1 - d_1 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}, \quad u_i = \frac{d_i - a_i u_{i-1}}{b_i}, \quad i \neq 0 \quad (3.4)$$

$$a_0 = 1 + 6Q_0/h_1^2, \quad b_0 = 1 - a_0$$

$$d_0 = F_0 + R_0 m_0 - Q_0 \frac{2m_1 + 4m_0}{h_1}$$

$$a_i = -6Q_i/h_i^2, \quad b_i = 1 - a_i$$

$$d_i = F_i + R_i m_i + Q_i \frac{2m_{i-1} + 4m_i}{h_i}$$

③仅包含二阶导数值的方程是

$$A_i M_{i-1} + B_i M_{i+1} + C_i M_{i+1} = D_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3.5)$$

式中

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{h_i}{6} + \frac{R_i + 2R_{i-1}}{6\Delta_i} - \frac{Q_{i-1}}{h_i \Delta_i} \\ B_i &= \frac{h_i + h_{i+1}}{3} - \frac{R_{i+1} + 2R_i}{6\Delta_{i+1}} + \frac{2R_i + R_{i-1}}{6\Delta_i} + Q_i \left( \frac{1}{\Delta_{i+1} h_{i+1}} + \frac{1}{\Delta_i h_i} \right) \\ C_i &= \frac{h_{i+1}}{6} - \frac{2R_{i+1} + R_i}{6\Delta_{i+1}} - \frac{Q_{i+1}}{h_{i+1} \Delta_{i+1}} \\ D_i &= \frac{F_{i+1} - F_i}{\Delta_{i+1} h_{i+1}} - \frac{F_i - F_{i-1}}{\Delta_i h_i}, \quad \Delta_i = 1 - \frac{R_i - R_{i-1}}{h_i} \end{aligned}$$

求解 $u_i$ 的递推关系式为:

$$u_0 = \frac{d_0 b_1 - b_1 d_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}, \quad u_i = \frac{d_i - a_i u_{i-1}}{b_i}, \quad i \neq 0 \quad (3.6)$$

$$a_0 = 1 - R_0/h_1, \quad b_0 = 1 - a_0$$

$$d_0 = F_0 - R_0 \left( \frac{h_1}{6} M_1 + \frac{h_1}{3} M_0 \right) + Q_0 M_0$$

$$a_i = B_i / h_i, \quad b_i = 1 - a_i$$

$$d_i = F_i + R_i \left( \frac{h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i-1} \right) + Q_i M_i$$

### 3.2 稳定性分析 研究一维线性对流-扩散方程

$$u_i + \bar{u} u_x = v u_{xx} \quad (\bar{u} \text{ 为常数}) \quad (3.7)$$

相应于 (2.15) 的一般离散形式中的

$$F_i = u_i^n - \Delta t \bar{u} (1 - \theta) m_i^n + \Delta t v (1 - \theta) M_i^n$$

$$R_i = -\Delta t \bar{u} \theta, \quad Q_i = \Delta t v \theta$$

因为式 (3.1), (3.3) 和 (3.5) 是相互等价的, 文[13]利用 von Neumann 稳定性分析方法研究了包含一阶导数值的公式

$$A_i m_i^{n+1} + B_i m_i^{n+1} + C_i m_{i+1}^{n+1} = D_i \quad (3.8)$$

在均匀网格中, 假定  $m_i^{n+1} = \tilde{m}_i^{n+1} e^{I i \varphi}$ ,  $m_i^n = \tilde{m}_i^n e^{I i \varphi}$ ,  $m_{i+1}^n = \tilde{m}_i^n e^{I(i+1)\varphi}$ . 这里  $I = \sqrt{-1}$ ,  $\varphi$  为相角函数. 然后由 (3.8) 导出

$$\tilde{m}^{n+1} = G \tilde{m}^n$$

放大因子  $G$  为

$$G = \frac{4 + 2\cos\varphi + 12\theta d(1 - \cos\varphi) + 6I\theta c \sin\varphi}{4 + 2\cos\varphi - 12(1 - \theta)d(1 - \cos\varphi) - 6I(1 - \theta)c \sin\varphi} \quad (3.9)$$

其中  $c = \bar{u} \Delta t / h$ ,  $d = \Delta t v / h^2$ . 当  $\theta \geq 1/2$  时, 对任何  $\varphi$  值都有  $|G| \leq 1$ , 即方法是无条件稳定的. 如果取  $\theta = 0$ , 即显式格式, 则有

$$G = 1 - \frac{6d(1 - \cos\varphi)}{2 + \cos\varphi} - \frac{3Ic \sin\varphi}{2 + \cos\varphi} \quad (3.10)$$

于是, 显式格式的稳定性条件为

$$d \leq 1/6, \quad R_c = \bar{u} h / v \leq 2\sqrt{3} \quad (R_c \text{ 为网格 Reynolds 数})$$

与相应的空间中心差分格式的稳定性条件  $d \leq 1/2$ ,  $R_c \leq 2$  相比, 当  $R_c$  在稳定性条件中起主导作用时, 样条格式的限制反而放宽了. 这也为数值计算所证实<sup>[11]</sup>.

3.3 SADI法 在求解多维问题时, Rubin等<sup>[6]</sup>把差分方法中常用的交替方向 (ADI) 法直接推广到样条计算中, 称为 SADI 法. 例如研究二维问题

$$u_t = f(u, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy})$$

在两步计算过程中, 可采用如下形式: 如果第一步计算在  $x$  方向进行,

$$u_{i,j}^{n+1/2} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} f(u_{i,j}^n, m_{i,j}^{n+1/2}, M_{i,j}^{n+1/2}, l_{i,j}^n, L_{i,j}^n) \quad (3.11)$$

第二步则在  $y$  方向进行,

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} f(u_{i,j}^{n+1/2}, m_{i,j}^{n+1/2}, M_{i,j}^{n+1/2}, l_{i,j}^{n+1}, L_{i,j}^{n+1}) \quad (3.12)$$

显然,在上述两步方法的每一步中,笔者所建议的公式(3.1) — (3.6) 仍然适用。

对于线性问题, Rubín 等<sup>[6]</sup>证明了 SADI 法是无条件稳定的。

应该指出的是,为了实现交替方向的计算,每一步都要求计算在另一方向的一阶和二阶导数值,即(3.11)中的 $l_{i,j}^n$ 和 $L_{i,j}^n$ 及(3.12)中的 $m_{i,j}^{n+1/2}$ 和 $M_{i,j}^{n+1/2}$ 。为此还要求相应的边界条件。这常带来困难,要求一定的技巧。该方法的应用实例,可参看文献[10, 12, 23—25]。

### 3.4 按坐标方向分步计算法 研究二维输运方程

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \quad (3.13)$$

它的求解可归结为求解下述问题:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial t} + u \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial x^2}, \quad t \in \left[ n\Delta t, \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right] \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial t} + v \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial y^2}, \quad t \in \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta t, (n+1)\Delta t \right] \end{aligned}$$

式中 $n$ 为时间层, $\Delta t$ 为时间步长。

如果时间微商项用前向差分处理,则有前半步(在 $x$ 方向)

$$\xi_{i,j}^{n+1/2} - \xi_{i,j}^n + u_{i,j} m_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{\text{Re}} M_{i,j}^{n+1/2} \quad (3.14)$$

后半步(在 $y$ 方向)

$$\xi_{i,j}^{n+1} - \xi_{i,j}^{n+1/2} + v_{i,j} l_{i,j}^{n+1} = -\frac{1}{\text{Re}} L_{i,j}^{n+1} \quad (3.15)$$

式中 $m_{i,j}$ ,  $M_{i,j}$ ,  $l_{i,j}$ 和 $L_{i,j}$ 分别表示 $\partial \xi / \partial x$ ,  $\partial^2 \xi / \partial x^2$ ,  $\partial \xi / \partial y$ 和 $\partial^2 \xi / \partial y^2$ 在节点 $x_{i,j}$ 和 $y_{i,j}$ 处的样条近似值。很明显,每一计算步都完全类似于一个一维问题的求解。但与 SADI 法不同,它并不要求计算象式(3.11)和(3.12)中的 $l_{i,j}^n$ ,  $L_{i,j}^n$ 和 $m_{i,j}^{n+1/2}$ ,  $M_{i,j}^{n+1/2}$ 。因为它们没有出现在实际计算中。于是该方法可节省计算时间,减少内存,又不要求附加边界条件。

该方法是有限差分中分步(或分裂)算法的推广。之所以选取按坐标方向进行分裂,主要是考虑到样条方法的一些特点。因为这时几乎可以照搬处理一维问题的方法和公式。数值实验表明,该方法对于计算高 Reynolds 数和高 Rayleigh 数流动及河口环流等问题是相当有效的<sup>[15,16,26,27]</sup>。但关于方法本身的研究还刚刚开始。如稳定性,一致收敛性等问题还有待于进一步研究。

## 4 边界条件的处理

由于导数作为未知量可以直接计算,因而包含导数的边界条件能够纳入求解过程之中。不需要象有限差分中那样先对导数边界值进行差商处理。为了使所讨论的问题一般化,现给出如下混合边值条件的不同类型的匹配公式。设有

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + p(t)u = \lambda_1(t), \quad x = a, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

$$\beta \frac{\partial u}{\partial x} + q(t)u = \lambda_2(t), \quad x = b, \quad t > 0 \quad (4.2)$$



(4.1) 的离散形式可以表示为

$$\alpha m_0^{n+1} + p^{n+1} u_0^{n+1} = \lambda_1^{n+1} \quad (4.3)$$

它对应于在节点  $i=0$  处的关系 (边界  $x=a$  处)。仅包含函数值的公式为<sup>[13]</sup>

$$B_0 u_0 + C_0 u_1 = D_0 \quad (4.4)$$

其中

$$B_0 = p + \alpha c_0 / K, \quad C_0 = \alpha c_1 / K, \quad D_0 = \lambda_1 - \alpha c_2 / K$$

$$K = \left( R_1 + \frac{4Q_1}{h_1} \right) \left( \frac{R_0 h_1}{2Q_0} - 2 \right) + \frac{2Q_1}{h_1}$$

$$c_0 = \left( R_1 + \frac{4Q_1}{h_1} \right) \left( \frac{3}{h_1} + \frac{h_1}{2Q_0} \right) - \frac{6Q_1}{h_1^2}$$

$$c_1 = 1 - 3R_1/h_1 - 6Q_1/h_1^2$$

$$c_2 = -F_1 - \left( \frac{h_1 R_1}{2} + 2Q_1 \right) \cdot \frac{F_0}{Q_0}$$

而在另一端  $x=b$  处, 相应的关系则为

$$A_{N+1} u_N + B_{N+1} u_{N+1} = D_{N+1} \quad (4.5)$$

其中

$$A_{N+1} = \frac{\beta C_N}{K'}, \quad B_{N+1} = q + \frac{\beta C_{N+1}}{K'}, \quad D_{N+1} = \lambda_2 \frac{\beta C_{2'}}{K'}$$

$$K' = \left( \frac{R_{N+1} h_{N+1}}{2Q_{N+1}} + 2 \right) \left( \frac{4Q_N}{h_{N+1}} - R_N \right) - \frac{2Q_N}{h_{N+1}}, \quad C_N = 1 + \frac{3R_N}{h_{N+1}} - \frac{6Q_N}{h_{N+1}^2}$$

$$C_{N+1} = \left( \frac{4Q_N}{h_{N+1}} - R_N \right) \left( \frac{3}{h_{N+1}} + \frac{h_{N+1}}{2Q_{N+1}} \right) - \frac{6Q_N}{h_{N+1}^2}$$

$$C_{2'} = -F_N + \left( R_N \frac{h_{N+1}}{2} - 2Q_N \right) \frac{F_{N+1}}{Q_{N+1}}$$

为了与仅包含一阶导数的关系式匹配, 则有

$$b_0 m_0 + c_0 m_1 = d_0 \quad (4.6)$$

其中

$$b_0 = \alpha + p \left[ \left( Q_0 - \frac{4R_0}{h_1} \right) z_1 - \frac{2R_1 z_0}{h_1} \right] / (y_0 z_1 - y_1 z_0)$$

$$c_0 = -p \left[ (2R_0 z_1 / h_1 + (Q_1 + 4R_1 / h_1) z_0) \right] / (y_0 z_1 - y_1 z_0)$$

$$d_0 = \lambda_1 - p (F_0 z_1 - F_1 z_0) / (y_0 z_1 - y_1 z_0)$$

并且有

$$y_0 = 1 + 6Q_0/h_1^2, \quad y_1 = -6Q_1/h_1^2$$

$$z_0 = -6Q_0/h_1^2, \quad z_1 = 1 + 6Q_1/h_1^2$$

在另一端边界上  $x=b$  处, 我们有

$$a_{N+1} m_N + b_{N+1} m_{N+1} = d_{N+1} \quad (4.7)$$

其中

$$a_{N+1} = q \left[ (R_N - 4Q_N/h_{N+1}) y_{N+1} - 2y_N Q_{N+1}/h_{N+1} \right] / K_{N+1}$$

$$b_{N+1} = \beta - q[2Q_N y_{N+1}/h_{N+1} + (R_{N+1} + 4Q_{N+1}/h_{N+1})y_N]/K_{N+1}$$

$$d_{N+1} = \lambda_2 - q(F_N y_{N+1} - F_{N+1} y_N)/K_{N+1}$$

并且

$$y_N = 1 + 6Q_N/h_{N+1}^2, \quad z_N = -6Q_N/h_{N+1}^2$$

$$y_{N+1} = -6Q_{N+1}/h_{N+1}^2, \quad z_{N+1} = 1 + 6Q_{N+1}/h_{N+1}^2$$

$$K_{N+1} = z_N y_{N+1} - y_N z_{N+1}$$

显然, 上述公式中当  $p=0$  或  $q=0$  时, 对应于第二类边值问题; 而当  $\alpha=0$  或  $\beta=0$  时, 则对应于第一类边值问题。

由于以上公式是由离散方程和样条基本关系式求得的, 因此它们与支配方程的离散精度一致<sup>[13]</sup>。这些公式的某些应用可在文献[14, 28, 29]中找到。

### 5 数值弥散和耗散效应

与流体流动现象中出现的物理耗散和弥散类似, 数值计算格式也会引进耗散和弥散, 即假物理效应。文[17, 18]中以样条 Lax-Wendroff 格式和样条蛙跳格式为例, 通过研究它们的修正微分方程讨论了上述效应和稳定性条件。

设有线性双曲方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

其样条 Lax-Wendroff 格式 (简称 S-L-W) 为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c m_i^n = \frac{c^2 \Delta t}{2} M_i^n \quad (5.2)$$

考虑关系式 (2.10) 和 (2.11) 并反复消除  $\partial u / \partial t$  外包含  $t$  的微分项, 可得修正方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c^3 \Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{c^2 \Delta t}{24} (\Delta x^2 - 3c^2 \Delta t^2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (5.3)$$

可见 S-L-W 格式的三阶弥散项的系数为  $c^3 \Delta t^2 / 6$ , 仅来源于时间导数的离散误差; 而 Lax-Wendroff 差分格式的三阶弥散项的系数为  $-c(\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2) / 6$ 。由于稳定性要求, (5.3) 中右端第二项的系数为负<sup>[31]</sup>, 即  $c \Delta t / \Delta x < 1 / \sqrt{3}$ 。于是  $-c(\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2) / 6$  与  $c^3 \Delta t^2 / 6$  正负相反。因此, 在数值结果中, 一般存在着前者使相位超前, 而后者却使相位滞后的现象。

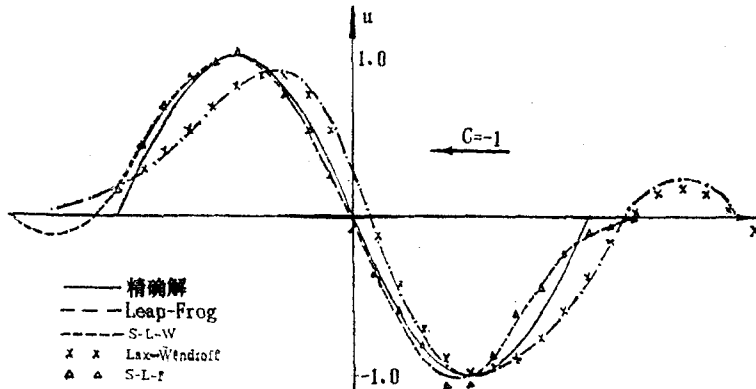


图1 不同格式数值结果比较<sup>[47]</sup>

图 1 给出了在无限空间中沿  $x$  负方向传播的正弦波, 当取  $\Delta t/\Delta x = 0.5$  时, 经 100 个时间步后的不同格式的数值结果与精确解的比较。

样条蛙跳格式 (简称 S-L-f) 为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + cm_i^n = 0 \quad (5.4)$$

其修正微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c^3 \Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right) \quad (5.5)$$

由相应的修正方程可知, S-L-W 格式是三阶弥散、四阶耗散格式; 而 S-L-f 格式为三阶弥散而无耗散。

在 (5.2) 和 (5.4) 的基础上可以得到关于 (5.1) 的更高精度的格式<sup>[17]</sup>

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + cm_i^n = \frac{c^2 \Delta t}{2} M_i^n + \frac{c^3 \Delta t^2}{6} \frac{m_{i+1}^n - 2m_i^n + m_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (5.6)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{\Delta t} + cm_i^n = \frac{c^3 \Delta t^2}{6} \frac{m_{i+1}^n - 2m_i^n + m_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (5.7)$$

(5.6) 是四阶耗散、五阶弥散的格式, 而 (5.7) 是五阶弥散而无耗散的格式。不过它们并不易推广到复杂的非线性方程中去。由 (5.6) 和 (5.7) 所得到的解, 与精确解非常接近, 已不易在图中画出其差别。

本研究曾得加拿大国家科学和工程研究委员会的部分资助, 特表感谢。现为中国科学院科学基金资助课题。

## 参 考 文 献

- 1 Schoenberg I J. *Quart. Appl. Math.*, **4** (1946): 45-99; 112-141
- 2 Holladay J C. *Math. tables aids computation*, **11** (1957): 233-243
- 3 Walsh J L, Ahlberg J H, Nilson E N. *J. Math. Mech.*, **11** (1962): 225-234
- 4 Ahlberg J H, Nilson E N, Walsh J L. *J. Math. Mech.*, **14** (1965): 231-244
- 5 Ahlberg J H, Nilson E N, Walsh J L. *The Theory of Splines and Their Applications*. Academic Press (1967)
- 6 Rubin S G, Graves R A. *Cubic spline approximation for problem in fluid mechanics*. NASA TR R-436, Washington, D. C. (1975)
- 7 Rubin S G, Khosla P K. *AIAA J.*, **14** (1976): 851-858
- 8 Rubin S G, Khosla P K. A simplified spline solution procedure. Proc. 6th Int. Conf. Numer. Meths. Fluid Dynamics, Held in Tblisi, U. S. S. R. (1978)
- 9 Wang Pu (王璞), Kahawita R. *Int. J. Computer Math.*, **13** (1983): 271-286
- 10 Wang Pu, Kahawita R. *Can. J. Civil Eng.*, **10** (1983): 116-124
- 11 王璞, Kahawita R. *空气动力学学报*, **2**, 1 (1984): 11-18
- 12 Lauriat G, Altimir I. *Computer and Fluids*, **13** (1985): 141-155
- 13 王璞. 立方样条方法及其在流体力学中的应用. 兰州大学选修课教材 (1984)
- 14 王璞. 具有混合边值条件的一维 Stefan 问题的变时间步长三次样条数值解法. 传热传质学文集, 科学出版社 (1986): 38-43
- 15 Wang Pu. *Numer. Heat Transfer*, **11** (1987)
- 16 王璞. *空气动力学学报*, **5**, 3 (1987): 218-225
- 17 王璞. *空气动力学学报*, **3** (1985): 90-95
- 18 Wang Pu. Numerical dispersive and dissipative effects for cubic spline approximation. Proc.

- IASTED Int. Symp. Modelling and Simulation, ACTA Press (1985) : 5—8
- 19 王璞. 三次样条近似中的数值弥散和耗散. 第3届全国计算流体力学会议论文, 杭州 (1986年4月)
- 20 Jian M K, Tariq Aziz. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engig.*, **26** (1981) : 129—143
- 21 王璞. 流体力学问题的参量样条数值解法. 第3届全国流体力学会议 (1985年11月, 长沙) 论文集. 科学出版社 (1988)
- 22 Lauriat G. These Doctorat d'Etat. Universite Paris 6 (Dec. 1981)
- 23 Lauriat G. Accurate solutions of natural convection flow in square cavities at high Rayleigh numbers with a cubic spline approximation. ASME Winter Annual Meeting, Phoenix, Arizona (1982)
- 24 王璞, Kahawita R. 空气动力学学报, **3** (1983) : 17—29
- 25 王璞, Kahawita R. 应用数学和力学, **8**, **3** (1987) : 215—224
- 26 Wang Pu, Kahawita R. Hydrodynamic Modelling of Estuarine Circulation Using a Spline Method of Fractional Steps (Submitted in *Int. J. Sediment Res.* )
- 27 王璞. 力学学报, 增刊 (1987) : 79—86
- 28 Lin S, Wang Pu, Kahawita R. *AIAA J.*, **22** (1984) : 1176—1177
- 29 Lin S, Wang Pu, Kahawita R. The cubic spline numerical solution of the ablation problem, AIAA Paper 83—1556
- 30 Wang Pu, Lin S, Kahawita R. *ASME J. Heat Transfer*, **107** (1985) : 485—489
- 31 Warming R W, Hyett B J. *J. Comput. Phys.*, **14** (1974) : 159—179

## CUBIC SPLINE COLLOCATION TECHNIQUE FOR PROBLEMS OF FLUID MECHANICS

Wang Pu

Department of Mathematics and Mechanics, Lanzhou University

**Abstract** This paper presents techniques for the numerical solution of problems in fluid mechanics using cubic spline collocation and some of their recent developments in this field.

The main spline relations are presented and incorporated into solution procedures for fluid mechanics equations. The computational algorithm in every case is a tridiagonal matrix system amenable to efficient inversion methods. SADI method and a spline method of fractional steps in each coordinate direction as well as truncation errors and its stability are briefly reviewed. General formulations for treating mixed boundary condition are presented. Finally, numerical dispersive and dissipative effects for spline approximation are briefly discussed.

**Keywords** *cubic spline collocation; numerical solution; fluid mechanics; SADI method; dispersive and dissipative effects*