第20卷 第3期　　力 学 进 展　　Vol. 20 No. 3
1990年8月25日　　ADVANCES IN MECHANICS　　Aug. 25, 1990

从主轴表示到抽象表示

郭仲衡
北京大学数学系（邮政编码100871）

梁浩云
中山大学力学系，广州（邮政编码510275）

提要 本文提供一个系统的方法，将主轴法的结果转换为不依赖于主标架的抽象表示，从而把主轴法结果的进一步应用向前推进了一大步.

关键词 主轴表示；抽象表示

1 导 言

Hill的"主轴法"[1]为固体力学提供了一个有效的方法，使许多问题易于解决. 文[2]已向我国读者详细介绍了这个方法. 然而，曾一度认为，把用主轴法得到的结果（主轴表示）转换为不依赖于坐标系的抽象表示很困难[3]. 这种情况限制了由主轴法得到的结果的进一步应用，因为对物理法则的一般特征的讨论要求所有的量都表成抽象记法，而且对每一具体问题，以主轴方向为坐标曲线方向的坐标系在问题解决以前是未知的. 本文提供一个从主轴表示到抽象表示的一般性方法，并系统地应用于由主轴法得到的主要结果[4-6].

设 $\mathbf{F}$ 是变形梯度，有极分解

$$\mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U}=\mathbf{V}\mathbf{R} \tag{1.1}$$

这里 $\mathbf{U}$，$\mathbf{V}$ 正定对称，分别称为右和左伸长张量，$\mathbf{R}$ 是转动张量. $\mathbf{U}$ 的特征值（同时也是 $\mathbf{V}$ 的特征值）$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是主伸长，和 $\mathbf{U}$（以及 $\mathbf{V}$）的主不变量 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 有关系

$$\mathrm{I}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\qquad \mathrm{II}=\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2,\qquad \mathrm{III}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{1.2}$$

$\mathbf{U}$ 的三个相互正交的单位特征向量 $\mathbf{N}_1$，$\mathbf{N}_2$，$\mathbf{N}_3$ 组成 Lagrange 标架，而相对应的 $\mathbf{V}$ 的特征向量 $\mathbf{n}_1$，$\mathbf{n}_2$，$\mathbf{n}_3$ 称为 Euler 标架. 按 Hill 的主轴法，$\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 有主轴表示

$$\mathbf{U}=\sum_i \lambda_i \mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i \tag{1.3}$$

$$\mathbf{V}=\sum_i \lambda_i \mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i \tag{1.4}$$

两组标架间有关系

$$\mathbf{n}_i=\mathbf{R}\mathbf{N}_i \tag{1.5}$$

其中转动张量

$$\mathbf{R}=\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{N}_i \tag{1.6}$$

如果 $\mathbf{F}$ 是时间的连续可微函数，则

$$\mathbf{L}=\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \tag{1.7}$$

是速度梯度. 它的对称部分

$$\mathbf{D}=(1/2)(\mathbf{L}+\mathbf{L}^{T}) \tag{1.8}$$

是伸长率张量，这里 $\mathbf{L}^T$ 是 $\mathbf{L}$ 的转置. 反称部分

$$\mathbf{W}=(1/2)(\mathbf{L}-\mathbf{L}^{T}) \tag{1.9}$$

称为自旋. $\mathbf{D}$ 有主轴表示

$$\mathbf{D}=\sum_i d_i\mathbf{n}_i^D\otimes\mathbf{n}_i^D \tag{1.10}$$

这里 d_i 是 $\mathbf{D}$ 的特征值，而 $\mathbf{n}_i^D$ 是相应的相互正交的单位特征向量.

$$\mathbf{\Omega}=\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{T} \tag{1.11}$$

表示 $\mathbf{n}_i$ 相对于 $\mathbf{N}_i$ 的转动速度，称为相对旋率.

2 应变度量

对有限变形，文献中曾给出许多应变度量. 归纳起来可分为两类：一类与 Euler 标架共轴，称为 Euler 型的；另一类与 Lagrange 标架共轴，叫 Lagrange 型的. Hill[1] 又称后者为物质应变度量. 下面我们主要讨论物质应变度量，相应的结果一般可自然地推广到 Euler 型应变度量；如有不同之处，将作特殊说明.

Hill 按主轴法给出一类物质应变度量的一般的主轴表示：

$$\mathbf{E}=\sum_i f(\lambda_i)\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i \tag{2.1}$$

这里，为了满足：①无变形时应变为零；②相应的纤维伸长时应变是正的且是递增的；③线性化时将退化为通常的线性度量，Hill 要求 $f(\lambda)$ 满足

$$f(1)=0,\quad f'(1)=1 \quad 和 \quad f'(\lambda)>0 \tag{2.2}$$

其中一个子类是所谓 Seth 应变[7]，这时 $f(\lambda)$ 选为

$$f^{(m)}(\lambda)=(1/2m)(\lambda^{2m}-1) \tag{2.3}$$

例如，$m=1$ 是所谓 Lagrange 应变

$$\mathbf{E}^{(1)}=(1/2)(\mathbf{C}-\mathbf{I}) \tag{2.4}$$

这里 $\mathbf{C}=\mathbf{U}^2$ 是右 Cauchy-Green 伸长张量；$m=(1/2)$ 是 Biot 应变

$$\mathbf{E}^{(1/2)}=\mathbf{U}-\mathbf{I} \tag{2.5}$$

对于 $m=0$，有所谓对数应变

$$\mathbf{E}^{(0)}\equiv\ln\mathbf{U}=\sum_i\ln\lambda_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i \tag{2.6}$$

为了得到（2.1）的抽象表示，我们只要注意到 $\mathbf{E}$ 是 $\mathbf{U}$ 的各向同性张量函数. 由单变量的各向同性张量函数表示定理[8]，应有

$$\mathbf{E}=\varphi_0\mathbf{I}+\varphi_1\mathbf{U}+\varphi_2\mathbf{U}^2 \tag{2.7}$$

这里 $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$ 是 $\mathbf{U}$ 的主不变量（1.2）的函数. 将（2.7）的两边都写成主轴表示，即有

$$\varphi_0+\varphi_1\lambda_i+\varphi_2\lambda_i^2=f(\lambda_i),\qquad i=1,2,3 \tag{2.8}$$

这是关于 $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$ 三个未知量的线性方程组. 如果

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1 \tag{2.9}$$

则方程组的系数矩阵的行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0 \tag{2.10}$$

方程组（2.8）有唯一解

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{\Delta}\sum_i f(\lambda_i)\lambda_j\lambda_k(\lambda_k - \lambda_j) \\ \varphi_1 &= \frac{1}{\Delta}\sum_i f(\lambda_i)(\lambda_j^2 - \lambda_k^2) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{\Delta}\sum_i f(\lambda_i)(\lambda_k - \lambda_j) \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

这里 i,j,k 是 1,2,3 的偶排列.

当 $\mathbf{U}$ 有且只有一对相同的特征值时，例如 $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$ 的情况，此时

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{U} = \lambda_0\mathbf{I} + (\lambda_1 - \lambda_0)\mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_1 \\ &\mathbf{U}^2 = \lambda_0^2\mathbf{I} + (\lambda_1^2 - \lambda_0^2)\mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_1 = (\lambda_1 + \lambda_0)\mathbf{U} - \lambda_1\lambda_0\mathbf{I} \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

因此，（2.7）应改为

$$\mathbf{E} = \bar{\varphi}_0\mathbf{I} + \bar{\varphi}_1\mathbf{U} \tag{2.13}$$

在 $\mathbf{U}$ 的主标架下，有

$$\bar{\varphi}_0 + \lambda_i\bar{\varphi}_1 = f(\lambda_i), \qquad i = 1,2 \tag{2.14}$$

解之，得

$$\bar{\varphi}_0 = \frac{\lambda_2 f(\lambda_1) - \lambda_1 f(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \bar{\varphi}_1 = \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{2.15}$$

在 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \equiv \lambda$ 的情况下，$\mathbf{U} = \lambda\mathbf{I}$，我们得到

$$\mathbf{E} = f(\lambda)\mathbf{I} \tag{2.16}$$

我们注意到，尽管 $\mathbf{E}$ 在三种情况下分别由（2.7），（2.13）和（2.16）给出，但实际上它们是统一的．即当 $\lambda_1 \to \lambda_0$ 时，（2.13）→（2.16），而当 $\lambda_3 \to \lambda_2 \neq \lambda_1$ 时，（2.7）→（2.13）．我们下面给出证明．

当 $\lambda_1 \to \lambda_0$ 时，由 L'Hopital 法则可证

$$\bar{\varphi}_0 \to f(\lambda_1) - \lambda_1 f'(\lambda_1), \quad \bar{\varphi}_1 \to f'(\lambda_1)$$

而 $\mathbf{U} \to \lambda_1\mathbf{I}$，于是

$$\mathbf{E} = \bar{\varphi}_0\mathbf{I} + \bar{\varphi}_1\mathbf{U} \to [f(\lambda_1) - \lambda_1 f'(\lambda_1)]\mathbf{I} - f'(\lambda_1)[\lambda_1\mathbf{I}] = f(\lambda_1)\mathbf{I}$$

当 $\lambda_3 \to \lambda_2 \neq \lambda_1$ 时，（2.12）表明

$$\mathbf{U}^2 \to (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{U} - \lambda_1\lambda_2\mathbf{I}$$

经过计算，有

$$\varphi_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\varphi_2 = \frac{1}{\Delta}[f(\lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2) + f(\lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_1 - \lambda_2)]$$

$$= \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} = \bar{\varphi}_1$$

$$\varphi_0-\lambda_1\lambda_2\varphi_2=\frac{1}{\Delta}[f(\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2\lambda_3-\lambda_1\lambda_2)+f(\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1\lambda_3-\lambda_1\lambda_2)]$$

$$=\frac{\lambda_2 f(\lambda_1)-\lambda_1 f(\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}=\bar{\varphi}_0$$

于是

$$\varphi_0\mathbf{I}+\varphi_1\mathbf{U}+\varphi_2\mathbf{U}^2\to(\varphi_0-\lambda_1\lambda_2\varphi_2)\mathbf{I}+[\varphi_1+(\lambda_1+\lambda_2)\varphi_2]\mathbf{U}=\bar{\varphi}_0\mathbf{I}+\bar{\varphi}_1\mathbf{U}$$

把以上结果整理，我们有

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{(\mathbf{U}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{U}-\lambda_3\mathbf{I})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}f(\lambda_1)+\dfrac{(\mathbf{U}-\lambda_3\mathbf{I})(\mathbf{U}-\lambda_1\mathbf{I})}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)}f(\lambda_2)+\dfrac{(\mathbf{U}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{U}-\lambda_2\mathbf{I})}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}f(\lambda_3), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 当\ \lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_1\ 时 \\ \dfrac{\mathbf{U}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}f(\lambda_1)+\dfrac{\mathbf{U}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}f(\lambda_2), \qquad 当\ \lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3\ 时 \\ f(\lambda)\mathbf{I}, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 当\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda\ 时\end{cases}\tag{2.17}$$

在[9]中可找到上述结果的第一式，但 Sedov 没有详细讨论有相同特征根的情况，只说可由取极限得到．由上述分析可见，$\bar{\varphi}_0$ 不是简单地 φ_0 的极限．我们终于得到了不依赖坐标系的物质应变度量类（2.1）的抽象表示．例如，当取 $f(\lambda)=\ln\lambda$ 时，我们可以得到对数应变张量的表达式．特别地，当以 $\mathbf{C}$ 代替（2.17）中的 $\mathbf{U}$，且取 $f(\lambda)=\sqrt{\lambda}$，我们就得到用 $\mathbf{C}$ 来表示平方根 $\mathbf{U}$ 的表达式（尽管这时 $f(\lambda)$ 已不满足（2.2））：

$$\mathbf{U}=\frac{1}{\mathrm{I}\,\mathrm{II}-\mathrm{III}}[\mathrm{I}\,\mathrm{III}\,\mathbf{I}+(\mathrm{I}^2-\mathrm{II})\mathbf{C}-\mathbf{C}^2]$$

应注意，这里 I，II，III 是 $\mathbf{U}$ 的主不变量．

注　例如 $\mathbf{C}^2$ 项的系数可根据公式计算如下：

$$\frac{\lambda_1}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)(\lambda_1^2-\lambda_3^2)}+\frac{\lambda_2}{(\lambda_2^2-\lambda_3^2)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}+\frac{\lambda_3}{(\lambda_3^2-\lambda_1^2)(\lambda_3^2-\lambda_2^2)}$$

$$=\frac{1}{\Delta(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3)}[\lambda_1(\lambda_3^2-\lambda_2^2)+\lambda_2(\lambda_1^2-\lambda_3^2)+\lambda_3(\lambda_2^2-\lambda_1^2)]$$

$$=-\frac{1}{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)}=-\frac{1}{\mathrm{I}\,\mathrm{II}-\mathrm{III}}$$

3　应变张量的时间导数

由上节我们已得到各种应变度量的抽象表示．自然，对它们直接求导就可以得到各应变度量的时间导数．但是，我们还可以有比较简捷而系统的方法：由主轴法得到一般应变张量的导数的主轴表示，应用表示定理采取类似于上节的解线性方程组的方法就可求得各应变张量的导数的抽象表示．下面以 $\dot{\mathbf{U}}$ 为例说明．由

$$\dot{\mathbf{C}}=\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}+\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}=\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F}+\mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}=2\mathbf{F}^T\mathbf{D}\mathbf{F}=2\mathbf{U}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{U}\tag{3.1}$$

其中

$$\hat{\mathbf{D}}=\hat{d}_{ij}\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_j\equiv\mathbf{R}^T\mathbf{D}\mathbf{R}\tag{3.2}$$

在 $\mathbf{U}$ 的主标架下，我们得到 $\dot{\mathbf{U}}$ 的分量

$$\dot{U}_{ij} = \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}\hat{d}_{ij} \tag{3.3}$$

另一方面，由（3.1）知，$\dot{\mathbf{U}}$是$\mathbf{U}$和$\hat{\mathbf{D}}$的各向同性张量函数，且关于$\hat{\mathbf{D}}$是线性的．于是由张量函数表示定理，注意到关于$\hat{\mathbf{D}}$的线性性质，有

$$\dot{\mathbf{U}} = \alpha_1\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{U} + \alpha_3\mathbf{U}^2 + \alpha_4\hat{\mathbf{D}} + \alpha_5(\mathbf{U}\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{U}) + \alpha_6(\mathbf{U}^2\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{U}^2) \tag{3.4}$$

这里$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\mathbf{U}$的不变量 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 以及$\mathbf{U}$和$\hat{\mathbf{D}}$的关于$\hat{\mathbf{D}}$为线性的公共不变量

$$J = \mathrm{tr}\hat{\mathbf{D}}, \quad J_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{U}\hat{\mathbf{D}}), \quad J_2 = \mathrm{tr}(\mathbf{U}^2\hat{\mathbf{D}}) \tag{3.5}$$

的函数，而$\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$则是 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 的函数．在$\mathbf{U}$的主标架下，（3.4）的分量形式是

$$\dot{U}_{ij} = (\alpha_1+\alpha_2\lambda_i+\alpha_3\lambda_i^2)\delta_{ij} + \alpha_4\hat{d}_{ij} + \alpha_5(\lambda_i+\lambda_j)\hat{d}_{ij} + \alpha_6(\lambda_i^2+\lambda_j^2)\hat{d}_{ij} \tag{3.6}$$

与（3.3）比较，得

$$\alpha_1+\alpha_2\lambda_i+\alpha_3\lambda_i^2+\alpha_4\hat{d}_{ii}+2\alpha_5\lambda_i\hat{d}_{ii}+2\alpha_6\lambda_i^2\hat{d}_{ii} = \lambda_i\hat{d}_{ii}, \quad i=1,2,3(\text{不求和}) \tag{3.7}$$

和

$$\alpha_4\hat{d}_{ij} + \alpha_5(\lambda_i+\lambda_j)\hat{d}_{ij} + \alpha_6(\lambda_i^2+\lambda_j^2)\hat{d}_{ij} = \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}\hat{d}_{ij}, \quad i\neq j \tag{3.8}$$

如果$\hat{d}_{23}\hat{d}_{31}\hat{d}_{12}\neq 0$，则(3.8)等价于

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_2+\lambda_3 & \lambda_2^2+\lambda_3^2 \\ 1 & \lambda_3+\lambda_1 & \lambda_3^2+\lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1^2+\lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\lambda_2\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} \\ \dfrac{2\lambda_3\lambda_1}{\lambda_3+\lambda_1} \\ \dfrac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

在$\mathbf{U}$有不同特征值，即条件（2.9）满足的情况下，（3.9）的系数矩阵行列式

$$\Delta = (\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2) \neq 0 \tag{3.10}$$

（3.9）有唯一解

$$\alpha_4 = \frac{2(\text{Ⅰ}\,\text{Ⅲ} - \text{Ⅱ}^2)}{\text{Ⅰ}\,\text{Ⅱ} - \text{Ⅲ}}, \quad \alpha_5 = 2, \quad \alpha_6 = -\frac{2\,\text{Ⅱ}}{\text{Ⅰ}\,\text{Ⅱ} - \text{Ⅲ}} \tag{3.11}$$

这里 $\text{Ⅰ}\,\text{Ⅱ} - \text{Ⅲ} = (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1) \neq 0$，将（3.11）代到（3.7），得到

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{d}_{11}\nu_1 \\ \hat{d}_{22}\nu_2 \\ \hat{d}_{33}\nu_3 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

其中

$$\nu_i = \lambda_i - \alpha_4 - 2\lambda_i\alpha_5 - 2\lambda_i^2\alpha_6 \tag{3.13}$$

方程组（3.12）的系数矩阵行列式仍为Δ．在$\Delta\neq 0$的情况下，它有唯一解

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{\mathrm{I}\,\mathrm{II}-\mathrm{III}}[(2\,\mathrm{II}^2-\mathrm{I}\,\mathrm{III})J+(\mathrm{III}-2\,\mathrm{I}\,\mathrm{II})J_1+2\,\mathrm{II}\,J_2]\\
\alpha_2 &= \frac{1}{\mathrm{I}\,\mathrm{II}-\mathrm{III}}[(\mathrm{III}-2\,\mathrm{I}\,\mathrm{II})J+(\mathrm{I}^2+\mathrm{II})J_1-\mathrm{I}\,J_2]\\
\alpha_3 &= \frac{1}{\mathrm{I}\,\mathrm{II}-\mathrm{III}}(2\,\mathrm{II}\,J-\mathrm{I}\,J_1+J_2)
\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

将（3.11）和（3.14）代回（3.4），我们就得到$\dot{U}$的绝对表示．该结果与[6]的（8.17）是一致的．

当 $\hat{d}_{23}\hat{d}_{31}\hat{d}_{12}=0$ 或 $\Delta=0$ 时，解（3.11）或（3.14）是不唯一的．但α_i 的不唯一并不影响最终表达式（3.4）的唯一性．

事实上，例如若 $\hat{d}_{12}=0$，则从（3.8）只能得到两个独立的方程

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_2+\lambda_3 & \lambda_2^2+\lambda_3^2 \\ 1 & \lambda_3+\lambda_1 & \lambda_3^2+\lambda_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2\lambda_2\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}\\ \dfrac{2\lambda_3\lambda_1}{\lambda_3+\lambda_1}\end{pmatrix} \tag{3.15}$$

其中一个未知量，例如α_6，将可能是任意的．当然，（3.11）仍满足（3.8）．如果假设α_6有一值$\alpha_6+\delta_6$，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_5$将必然产生相应的增量$\delta_1,\cdots,\delta_5$，这些增量应满足方程

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\hat{d}_{11}\phi_1\\ \hat{d}_{22}\phi_2\\ \hat{d}_{33}\phi_3\end{pmatrix} \tag{3.16}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_2+\lambda_3 \\ 1 & \lambda_3+\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_4\\ \delta_5\end{pmatrix}=-\delta_6\begin{pmatrix}\lambda_2^2+\lambda_3^2\\ \lambda_3^2+\lambda_1^2\end{pmatrix} \tag{3.17}$$

其中

$$\phi_i=\delta_4+2\lambda_i\delta_5+2\lambda_i^2\delta_6,\quad i=1,2,3 \tag{3.18}$$

（3.16）和（3.17）的解是

$$\delta_1=(1/\Delta)[\hat{d}_{11}\phi_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_2-\lambda_3)+\hat{d}_{22}\phi_2\lambda_3\lambda_1(\lambda_3-\lambda_1)+\hat{d}_{33}\phi_3\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)]$$

$$\delta_2=-(1/\Delta)[\hat{d}_{11}\phi_1(\lambda_2^2-\lambda_3^2)+\hat{d}_{22}\phi_2(\lambda_3^2-\lambda_1^2)+\hat{d}_{33}\phi_3(\lambda_1^2-\lambda_2^2)]$$

$$\delta_3=(1/\Delta)[\hat{d}_{11}\phi_1(\lambda_2-\lambda_3)+\hat{d}_{22}\phi_2(\lambda_3-\lambda_1)+\hat{d}_{33}\phi_3(\lambda_1-\lambda_2)]$$

$$\delta_4=(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3-\lambda_3^2)\delta_6,\qquad \delta_5=-(\lambda_1+\lambda_2)\delta_6$$

于是，$\dot{U}_{ij}$的相应增量为

$$\begin{aligned}
\delta\dot{U}_{ii}=(1/\Delta)\{&\hat{d}_{11}\phi_1[\lambda_2\lambda_3(\lambda_2-\lambda_3)+\lambda_i(\lambda_3^2-\lambda_2^2)+\lambda_i^2(\lambda_2-\lambda_3)]\\
&+\hat{d}_{22}\phi_2[\lambda_3\lambda_1(\lambda_3-\lambda_1)+\lambda_i(\lambda_1^2-\lambda_3^2)+\lambda_i^2(\lambda_3-\lambda_1)]\\
&+\hat{d}_{33}\phi_3[\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)+\lambda_i(\lambda_2^2-\lambda_1^2)+\lambda_i^2(\lambda_1-\lambda_2)]\}+\hat{d}_{ii}\phi_i=0,\quad i=1,2,3
\end{aligned}$$

$$\delta\dot{U}_{ij}=[(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2-\lambda_3^2)-(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_i+\lambda_j)+(\lambda_i^2+\lambda_j^2)]\delta_6\hat{d}_{ij}=0,\quad i\neq j$$

因此，α_i的不唯一性不会引起抽象表示（3.4）的不唯一性．

同样地，$\Delta=0$ 也会引起 $\alpha_1,\cdots,\alpha_6$ 的不唯一．但是用类似的方法可以证明 α_i 的不唯一也不会影响表示（3.4）的唯一性．

这样，采用上述方法我们可以系统地将物质应变度量的导数的主轴表示转换成抽象表示，它们都只和 $\hat{\mathbf{D}}=\mathbf{R}^T\mathbf{D}\mathbf{R}$ 以及 $\mathbf{U}$ 有关．

至于 Euler 型应变张量，情况是不同的．它们的导数将不仅依赖于 $\mathbf{D}$，而且还和相对旋率 $\mathbf{\Omega}$ 有关，即它们的导数不再是标架无差异的．实际上，由于

$$\mathbf{V}=\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T \tag{3.19}$$

它的导数等于

$$\dot{\mathbf{V}}=\dot{\mathbf{R}}\mathbf{U}\mathbf{R}^T+\mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{R}^T+\mathbf{R}\mathbf{U}\dot{\mathbf{R}}^T=\mathbf{\Omega}(\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T)+\mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{R}^T+(\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T)\mathbf{\Omega}^T=\mathbf{\Omega}\mathbf{V}+\mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{R}^T-\mathbf{V}\mathbf{\Omega}$$

其中 $\mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{R}^T$ 项是标架无差异的，而 $\mathbf{\Omega}\mathbf{V}-\mathbf{V}\mathbf{\Omega}$ 则不是．所以 $\dot{\mathbf{V}}$ 也不是．但 $\mathbf{V}$ 的共转导数

$$\overset{\circ}{\mathbf{V}}\equiv\dot{\mathbf{V}}+\mathbf{V}\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}\mathbf{V}=\mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{R}^T \tag{3.20}$$

却仍是标架无差异的．从上面的讨论我们可简捷地求出 Euler 型应变张量的导数．因为如果

$$\mathbf{e}=f(\mathbf{V}) \tag{3.21}$$

则

$$\mathbf{e}=\mathbf{R}f(\mathbf{U})\mathbf{R}^T\equiv\mathbf{R}\mathbf{E}\mathbf{R}^T \tag{3.22}$$

其中 $\mathbf{E}$ 是相应的 Lagrange 型应变张量．如果我们已用前面的方法求得 $\dot{\mathbf{E}}$，则

$$\dot{\mathbf{e}}=\dot{\mathbf{R}}\mathbf{E}\mathbf{R}^T+\mathbf{R}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{R}^T+\mathbf{R}\mathbf{E}\dot{\mathbf{R}}^T=\mathbf{\Omega}\mathbf{e}-\mathbf{e}\mathbf{\Omega}+\mathbf{R}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{R}^T \tag{3.23}$$

或者它的共转导数

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}=\mathbf{R}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{R}^T \tag{3.24}$$

4 标架旋率 在变形中，Lagrange 标架和 Euler 标架都在连续变化．设 $\mathbf{\Omega}^L$ 和 $\mathbf{\Omega}^E$ 分别是所谓 Lagrange 旋率和 Euler 旋率，使

$$\dot{\mathbf{N}}_i=\mathbf{\Omega}^L\mathbf{N}_i \tag{4.1}$$

$$\dot{\mathbf{n}}_i=\mathbf{\Omega}^E\mathbf{n}_i \tag{4.2}$$

由（1.11），知相对旋率为

$$\mathbf{\Omega}=\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \tag{4.3}$$

伸长率标架 $\mathbf{n}_1^D,\mathbf{n}_2^D,\mathbf{n}_3^D$ 在变形中也变动，记

$$\dot{\mathbf{n}}_i^D=\mathbf{\Omega}^D\mathbf{n}_i^D,\quad i=1,2,3 \tag{4.4}$$

以往人们一直以为 $\mathbf{\Omega}^D$ 即 $\mathbf{W}$．文献[10]指出，这是一种误解，并给出 $\mathbf{\Omega}^D$ 的主轴表示．此外，还可以讨论 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的单位特征向量 $\mathbf{n}_i^\sigma$ 组成的标架的转动

$$\dot{\mathbf{n}}_i^\sigma=\mathbf{\Omega}^\sigma\mathbf{n}_i^\sigma,\quad i=1,2,3 \tag{4.5}$$

于是，我们有 $\mathbf{\Omega}^L,\mathbf{\Omega}^E,\mathbf{\Omega}^D,\mathbf{\Omega}^\sigma,\mathbf{\Omega}$，加上 $\mathbf{W}$ 共六种旋率．一些文献还给出一些新的旋率．所有这些旋率（除 $\mathbf{W}$ 外）都是同一型式的张量方程的解．以 $\mathbf{\Omega}^L$ 为例说明．将 $\mathbf{U}$ 的主轴表示

$$\mathbf{U}=\sum_i\lambda_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i \tag{4.6}$$

两边求导，得

$$\dot{\mathbf{U}}=\sum_i(\dot{\lambda}_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i+\lambda_i\dot{\mathbf{N}}_i\otimes\mathbf{N}_i+\lambda_i\mathbf{N}_i\otimes\dot{\mathbf{N}}_i)$$

$$=\sum_i[\dot{\lambda}_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i+\lambda_i(\mathbf{\Omega}^L\mathbf{N}_i)\otimes\mathbf{N}_i+\lambda_i\mathbf{N}_i\otimes(\mathbf{\Omega}^L\mathbf{N}_i)]$$

$$=\sum_i\dot{\lambda}_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i+\mathbf{\Omega}^L\mathbf{U}-\mathbf{U}\mathbf{\Omega}^L$$

故 $\mathbf{\Omega}^L$ 是张量方程

$$\mathbf{U}\mathbf{\Omega}^L-\mathbf{\Omega}^L\mathbf{U}=\sum_i\dot{\lambda}_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i-\dot{\mathbf{U}}\tag{4.7}$$

的解．同样地，$\mathbf{\Omega}^E$，$\mathbf{\Omega}^D$，$\mathbf{\Omega}^\sigma$ 分别是

$$\mathbf{V}\mathbf{\Omega}^E-\mathbf{\Omega}^E\mathbf{V}=\sum_i\dot{\lambda}_i\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i-\dot{\mathbf{V}}\tag{4.8}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{\Omega}^D-\mathbf{\Omega}^D\mathbf{D}=\sum_i\dot{d}_i\mathbf{n}_i^D\otimes\mathbf{n}_i^D-\dot{\mathbf{D}}\tag{4.9}$$

和

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{\Omega}^\sigma-\mathbf{\Omega}^\sigma\boldsymbol{\sigma}=\sum\dot{\sigma}_i\mathbf{n}_i^\sigma\otimes\mathbf{n}_i^\sigma-\dot{\boldsymbol{\sigma}}\tag{4.10}$$

的解．而对 $\mathbf{\Omega}$ 则可由方程

$$\mathbf{R}\mathbf{U}=\mathbf{V}\mathbf{R}$$

两边求导

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{U}+\mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}=\dot{\mathbf{V}}\mathbf{R}+\mathbf{V}\dot{\mathbf{R}}$$

整理后，得

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T(\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T)-\mathbf{V}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T=\dot{\mathbf{V}}-\mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{R}^T$$

即

$$\mathbf{V}\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}\mathbf{V}=\mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{R}^T-\dot{\mathbf{V}}\tag{4.11}$$

由（1.5），我们还得到 $\mathbf{\Omega}$，$\mathbf{\Omega}^L$ 和 $\mathbf{\Omega}^E$ 的关系

$$\mathbf{\Omega}=\mathbf{\Omega}^E-\mathbf{R}\mathbf{\Omega}^L\mathbf{R}^T\tag{4.12}$$

注意到 $\mathbf{\Omega}^L=\omega_{ij}\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_j$ 是反对称的，在 $\mathbf{U}$ 的主标架下，（4.7）左端的对角线元为零．实际上，只剩下 3 个方程来确定 $\mathbf{\Omega}^L$ 的三个不为零分量．下面我们讨论（4.7）的解法．

先讨论 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_1$ 的情况．由于反称张量 $\mathbf{\Omega}^L$ 是 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{B}\equiv\sum_i\dot{\lambda}_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i-\dot{\mathbf{U}}$ 的各向同性张量函数，且关于 $\mathbf{B}$ 是线性的，根据张量函数表示定理，它总可表成

$$\mathbf{\Omega}^L=\gamma_1(\mathbf{U}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{U})+\gamma_2(\mathbf{U}^2\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{U}^2)+\gamma_3(\mathbf{U}^2\mathbf{B}\mathbf{U}-\mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{U}^2)\tag{4.13}$$

这里 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是 $\mathbf{U}$ 的主不变量 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的函数．在 $\mathbf{U}$ 的主标架下，（4.7）和（4.13）分别有分量形式

$$\omega_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)=b_{ij},\qquad i\neq j\tag{4.14}$$

$$\omega_{ij}=\gamma_1 b_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)+\gamma_2 b_{ij}(\lambda_i^2-\lambda_j^2)+\gamma_3 b_{ij}\lambda_i\lambda_j(\lambda_i-\lambda_j),\quad i\neq j \tag{4.15}$$

如果 $b_{23}b_{31}b_{12}\neq 0$，比较（4.14）和（4.15），得

$$\gamma_1+(\lambda_i+\lambda_j)\gamma_2+\lambda_i\lambda_j\gamma_3=1/(\lambda_i-\lambda_j)^2,\qquad i\neq j \tag{4.16}$$

系数矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_2+\lambda_3 & \lambda_2\lambda_3 \\ 1 & \lambda_3+\lambda_1 & \lambda_3\lambda_1 \\ 1 & \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 \end{vmatrix}=-(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)=-\Delta\neq 0 \tag{4.17}$$

使得（4.7）有唯一解

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1&=-\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2-\lambda_3}+\frac{\lambda_2^2}{\lambda_3-\lambda_1}+\frac{\lambda_3^2}{\lambda_1-\lambda_2}\right)=\frac{1}{\Delta^2}(6\,\mathrm{I}\,\mathrm{III}-5\,\mathrm{I}^2\mathrm{II}+\mathrm{I}^4+4\,\mathrm{II}^2)\\
\gamma_2&=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_3}+\frac{\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_1}+\frac{\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_2}\right)=\frac{1}{\Delta^2}(4\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}-\mathrm{I}^3-9\,\mathrm{III})\\
\gamma_3&=-\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)=\frac{1}{\Delta^2}(\mathrm{I}^2-3\,\mathrm{II})
\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

这里

$$\Delta^2=18\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}\,\mathrm{III}+\mathrm{I}^2\mathrm{II}^2-4\,\mathrm{I}^3\mathrm{III}-4\,\mathrm{II}^3-27\,\mathrm{III}^2 \tag{4.19}$$

类似于前一节，可以证明条件 $b_{23}b_{31}b_{12}\neq 0$ 是不必要的。

当 $\mathbf{U}$ 有且只有两个相等的特征值，例如 $\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3=\lambda_0$ 时，（4.7）左端在 $\mathbf{U}$ 的主标架下有分量形式

$$\mathbf{U}\mathbf{\Omega}^L-\mathbf{\Omega}^L\mathbf{U}\cong(\lambda_1-\lambda_0)\begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{21} & 0 & 0 \\ -\omega_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

为了和（4.7）相容，右端 $\mathbf{B}$ 必须有形式

$$\mathbf{B}\cong\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

此时 ω_{23} 无法由（4.7）确定（即 ω_{23} 可为任意值），因为这时 $\mathbf{U}$ 的特征向量是不确定的（在 $\mathbf{N}_2$ 和 $\mathbf{N}_3$ 张成的平面上的任意向量都是特征向量）。但是如果我们选定 $\omega_{23}=0$，即规定

$$\mathbf{\Omega}^L\cong\begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & 0 \\ \omega_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

考虑到（4.20）和（4.21）以及

$$\mathbf{U}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{U}\cong(\lambda_1-\lambda_0)\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{21} & 0 & 0 \\ -b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

我们得到

$$\Omega^L \simeq \frac{1}{\lambda_1-\lambda_0}\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{21} & 0 & 0 \\ -b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_0)^2}(\mathbf{UB}-\mathbf{BU}) = \frac{1}{\mathrm{I}^2-3\mathrm{II}}(\mathbf{UB}-\mathbf{BU}) \tag{4.24}$$

在 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 的情况下，(4.7) 左端恒为零，故必须 $\mathbf{B}=0$。此时我们自然以取 $\Omega^L=0$ 为合适。

总之，我们得到

$$\Omega^L = \begin{cases} \frac{1}{\Delta^2}[(6\,\mathrm{I}\,\mathrm{III}-5\,\mathrm{I}^2\mathrm{II}+\mathrm{I}^4+4\,\mathrm{II}^2)(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}-\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}})+(4\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}-\mathrm{I}^3-9\,\mathrm{III})(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^2-\mathbf{U}^2\dot{\mathbf{U}}) & \\ \quad +(\mathrm{I}^2-3\,\mathrm{II})(\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^2-\mathbf{U}^2\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U})], & \text{当 } \lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_1 \text{ 时} \\ \frac{1}{\mathrm{I}^2-3\,\mathrm{II}}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}-\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}), & \text{当 } \lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3\equiv\lambda_0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3 \text{ 时} \end{cases} \tag{4.25}$$

容易验证，$\mathbf{B}$ 的具体表达式满足上述各情况的条件。值得注意的是，$\sum_i \dot{\lambda}_i \mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i$ 项不出现在最后结果 (4.25) 中。进一步我们还可证明，如果当 $\lambda_3\to\lambda_2\neq\lambda_1$ 时 $b_{23}=o(\lambda_2-\lambda_3)$；当 $\lambda_1\to\lambda_0$ 时 $\mathbf{B}=o(\lambda_1-\lambda_0)$，则上面分段定义的公式 (4.25) 是连续的。

其它旋率 Ω^E, Ω^D, Ω^σ 和 Ω 都有类似于 (4.25) 的抽象表示，这里就不再一一列出了。

5 共轭应力

共轭应变-应力对的概念是由 Macvean[11] 和 Hill[12] 引进的。后者用它来研究固体力学中的本构不等式。用功共轭的概念可以很自然地引进一系列应力度量。

Hill 的定义是：对每一物质应变度量 $\mathbf{E}$，如果存在一个二阶对称张量 $\mathbf{T}$，使得每单位参考体积的功率

$$\dot{w} = \mathrm{III}\,\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \tag{5.1}$$

可以表成

$$\dot{w} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} \tag{5.2}$$

则 $\mathbf{T}$ 可以被看作一种应力度量，且称 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{E}$ 是共轭的。

在上一节中我们已说明 $\dot{\mathbf{E}}$ 总是 $\hat{\mathbf{D}}$ 和 $\mathbf{U}$ 的函数，而且给出了求 $\dot{\mathbf{E}}$ 的抽象表示的一般方法。代入 (5.1,2) 中解出 $\mathbf{T}$ 就是 $\mathbf{E}$ 的共轭应力了。但是在求解过程中更方便的做法是：既然 $\dot{\mathbf{E}}$ 是 $\hat{\mathbf{D}}$ 和 $\mathbf{U}$ 的函数，而且关于 $\hat{\mathbf{D}}$ 为线性，则我们也可以反过来把 $\hat{\mathbf{D}}$ 看成 $\dot{\mathbf{E}}$ 和 $\mathbf{U}$ 的函数，这函数也是各向同性的，且关于 $\dot{\mathbf{E}}$ 是线性的。于是，由表示定理有

$$\hat{\mathbf{D}} = \beta_1\mathbf{I}+\beta_2\mathbf{U}+\beta_3\mathbf{U}^2+\beta_4\dot{\mathbf{E}}+\beta_5(\dot{\mathbf{E}}\mathbf{U}+\mathbf{U}\dot{\mathbf{E}})+\beta_6(\dot{\mathbf{E}}\mathbf{U}^2+\mathbf{U}^2\dot{\mathbf{E}}) \tag{5.3}$$

为了突出关于 $\dot{\mathbf{E}}$ 的线性性质以便于求解 $\mathbf{T}$，我们可等价地将 (5.3) 写成

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}} = {} & \gamma_1\dot{\mathbf{E}}+\gamma_2(\mathbf{U}\dot{\mathbf{E}}+\dot{\mathbf{E}}\mathbf{U})+\gamma_3(\mathbf{U}^2\dot{\mathbf{E}}+\dot{\mathbf{E}}\mathbf{U}^2)+\gamma_4\mathbf{U}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{U} \\ & +\gamma_5(\mathbf{U}^2\dot{\mathbf{E}}\mathbf{U}+\mathbf{U}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{U}^2)+\gamma_6\mathbf{U}^2\dot{\mathbf{E}}\mathbf{U}^2 \end{aligned} \tag{5.4}$$

与 $\dot{\mathbf{E}}$ 的主轴表示比较以定出系数 γ_i，今仍以 $\dot{\mathbf{U}}$ 为例说明（用 $\mathbf{S}$ 表示 $\mathbf{U}$ 的共轭应力）。由(3.3)我们看到在 $\mathbf{U}$ 的主标架下可将 $\hat{d}_{ij}$ 表成

$$\hat{d}_{ij} = \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2\lambda_i\lambda_j}\dot{U}_{ij} \tag{5.5}$$

如果在（5.4）中以$\dot{\mathbf{U}}$代替$\dot{\mathbf{E}}$，并写出它在主标架下的分量式

$$\hat{d}_{ij} = [\gamma_1 + \gamma_2(\lambda_i + \lambda_j) + \gamma_3(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) + \gamma_4\lambda_i\lambda_j + \gamma_5\lambda_i\lambda_j(\lambda_i + \lambda_j) + \gamma_6\lambda_i^2\lambda_j^2]\dot{U}_{ij} \tag{5.6}$$

比较（5.5）和（5.6），得γ_i应满足的方程组

$$\begin{aligned}\gamma_1 + \gamma_2(\lambda_i + \lambda_j) + \gamma_3(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) + \gamma_4\lambda_i\lambda_j + \gamma_5\lambda_i\lambda_j(\lambda_i + \lambda_j) + \gamma_6\lambda_i^2\lambda_j^2 \\ = (\lambda_i + \lambda_j)/2\lambda_i\lambda_j\end{aligned} \tag{5.7}$$

该方程组可以整理为（例如第六个方程是原来第六方程乘以 −2 加上原来的第一和第二方程）

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\lambda_1 & 2\lambda_1^2 & \lambda_1^2 & 2\lambda_1^2 & \lambda_1^4 \\ 1 & 2\lambda_2 & 2\lambda_2^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2^2 & \lambda_2^4 \\ 1 & 2\lambda_3 & 2\lambda_3^2 & \lambda_3^2 & 2\lambda_3^2 & \lambda_3^4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2(\lambda_2+\lambda_3) & (\lambda_2+\lambda_3)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2(\lambda_3+\lambda_1) & (\lambda_3+\lambda_1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2(\lambda_1+\lambda_2) & (\lambda_1+\lambda_2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 \\ 1/\lambda_2 \\ 1/\lambda_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$，这方程组的系数矩阵的行列式为 $8(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_1-\lambda_2)^2 \neq 0$，它有唯一解

$$\gamma_1 = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{III}},\quad \gamma_2 = -\frac{\mathrm{I}}{2\mathrm{III}},\quad \gamma_3 = \frac{1}{2\mathrm{III}},\quad \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0 \tag{5.9}$$

于是

$$\hat{\mathbf{D}} = (1/2\mathrm{III})[2\mathrm{II}\,\dot{\mathbf{U}} - \mathrm{I}\,(\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}) + (\mathbf{U}^2\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^2)] \tag{5.10}$$

可以类似地证明，条件 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ 也是不必要的．将（5.10）代入（5.1）并和（5.2）比较，得

$$\begin{aligned}\mathbf{S} : \dot{\mathbf{U}} &\equiv \mathrm{III}\,\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \mathrm{III}\,\boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{R}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{R}^T) = \mathrm{III}\,(\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}) : \hat{\mathbf{D}} \\ &= (1/2)(\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}) : [2\mathrm{II}\,\dot{\mathbf{U}} - \mathrm{I}\,(\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}) + (\mathbf{U}^2\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^2)] \\ &= (1/2)[2\mathrm{II}\,\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R} - \mathrm{I}\,(\mathbf{U}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}\mathbf{U}) + \mathbf{U}^2\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}\mathbf{U}^2] : \dot{\mathbf{U}}\end{aligned}$$

利用 Cayley-Hamilton 定理

$$\mathrm{II}\,\mathbf{I} - \mathrm{I}\,\mathbf{U} + \mathbf{U}^2 = \mathrm{III}\,\mathbf{U}^{-1}$$

由$\dot{\mathbf{U}}$的任意性，我们得和$\mathbf{U}$共轭的应力，称为 Jaumann 应力

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{III}}{2}(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}\mathbf{U}^{-1}) \tag{5.11}$$

考虑到 Kirchhoff 应力

$$\mathbf{T}^{(1)} = \mathrm{III}\,\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-1} = \mathrm{III}\,\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}\mathbf{U}^{-1}$$

Jaumann 应力又可表为

$$\mathbf{S} = (1/2)(\mathbf{T}^{(1)}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{T}^{(1)}) \tag{5.12}$$

这结果和文献[13]的结果（3.16）一致．用这方法可以得到与任何 Lagrange 应变 $\mathbf{E}=f(\mathbf{U})$ 共轭的应力的抽象表示．

至于 Euler 型应变度量，情况略有不同．前面已经提到，Euler 型应变度量的物质导数都不是标架无差异的，它既依赖于 $\mathbf{D}$，也依赖于 $\mathbf{\Omega}$(或$\mathbf{W}$)，从而依赖于观察者．下面我们证明，如果在定义（5.2）中，在换以 Euler 应变度量后只局限于物质导数进行讨论，则一般不存在与 Euler 应变度量共轭的应力．今以左 Cauchy-Green 张量 $\mathbf{B}=\mathbf{V}^2$ 为例说明．$\mathbf{B}$的物质导数是

$$\dot{\mathbf{B}}=\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T+\mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^T=\mathbf{LB}+\mathbf{BL}^T=\mathbf{BD}+\mathbf{DB}+\mathbf{WB}-\mathbf{BW} \tag{5.13}$$

如果存在 $\mathbf{T}^B$，使

$$\mathbf{T}^B:\dot{\mathbf{B}}=\mathrm{III}\,\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D} \tag{5.14}$$

则将（5.13）代入，得

$$\mathbf{T}^B:(\mathbf{DB}+\mathbf{BD}+\mathbf{WB}-\mathbf{BW})=\mathrm{III}\,\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D} \tag{5.15}$$

该式对一切 $\mathbf{D}$ 和一切 $\mathbf{W}$ 成立．特别地，当 $\mathbf{D}=0$ 时，上式变为对任何 $\mathbf{W}$ 成立的关系

$$\mathbf{T}^B:(\mathbf{WB}-\mathbf{BW})=0 \tag{5.16}$$

注意到，$\mathbf{W}$ 为反称，$\mathbf{T}^B$ 和 $\mathbf{B}$ 为对称，上式可写为

$$(\mathbf{T}^B\mathbf{B}-\mathbf{BT}^B):\mathbf{W}=0$$

它等价于

$$\mathbf{T}^B\mathbf{B}=\mathbf{BT}^B \tag{5.17}$$

这是对本构关系的一种限制，仅对特定的物质才成立．因此，一般而言，与$\mathbf{B}$共轭的应力不存在．

但是，如果我们在定义(5.2)中采用 Euler 应变度量的某种标架无差异的本构导数（例如共转导数或 Jaumann 导数），那么相对于这种导数的 Euler 应变度量的共轭应力是可以存在的．例如，若 $\mathbf{e}=f(\mathbf{V})$，则由（3.24），其共转导数

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}=\mathbf{R}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{R}^T$$

因此，如果 $\mathbf{E}$ 的共轭应力为 $\mathbf{T}^E$，则 $\mathbf{e}$ 关于共转导数的共轭应力为

$$\mathbf{T}^e=\mathbf{R}^T\mathbf{T}^E\mathbf{R} \tag{5.18}$$

6 结束语

本文显示了，从主轴表示可以有系统的方法转换成抽象表示．本方法主要是引用张量函数表示定理，并在主标架下比较分量而得到一组以特征值为系数的线性代数方程组．这些方程组（例如（2.8），（3.7）和（3.8），(4.16）以及（5.7））的解都是特征值的对称函数，总可以表为基本不变量的函数．例如 $\Delta^2=(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_1-\lambda_2)^2$ 是 λ_i 的六阶对称齐次多项式，而主不变量 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ分别是 1，2，3 阶基本对称齐次多项式，由它们构成的 6 阶基本对称齐次多项式为：ⅠⅡⅢ，$\mathrm{I}^2\mathrm{II}^2$，$\mathrm{I}^3\mathrm{III}$，$\mathrm{I}^4\mathrm{II}$，$\mathrm{I}^6$，$\mathrm{II}^3$，$\mathrm{III}^2$，因此$\Delta^2$应为它们的线性组合，即

$$\Delta^2=\delta_1\mathrm{I}\,\mathrm{II}\,\mathrm{III}+\delta_2\mathrm{I}^2\mathrm{II}^2+\delta_3\mathrm{I}^3\mathrm{III}+\delta_4\mathrm{I}^4\mathrm{II}+\delta_5\mathrm{I}^6+\delta_6\mathrm{II}^3+\delta_7\mathrm{III}^2 \tag{6.1}$$

（6.1）是关于 λ_1，λ_2，λ_3 的恒等式．适当选取 7 组 λ_1，λ_2，λ_3 的值代入（6.1）就可以得到关于 7 个系数 $\delta_1,\cdots,\delta_7$（它们应都为整数）的线性方程组．求解就可得到（4.19），抽象

表示中的各系数都可用这方法得到．因此，从主轴表示到抽象表示是可以有一套系统而且统一的方法的．

从上面的结果可以看到，与抽象表示比较，主轴法仍有简捷、易解等许多优点．克服了主轴表示必须依赖于主标架的缺点之后，相信主轴法将能更发挥它的威力．

参 考 文 献

1 Hill R. *Adv. in Appl. Mech.*, **18** (1978) : 1
2 郭仲衡, Dubey R N. 力学进展, **13** (1983) : 1
3 Guo Zhong-heng (郭仲衡) . *J. Elasticity*, **14** (1984) : 263
4 Hopkins G, Sewell M. (eds.) Mechanics of Solids—The Rodney Hill 60th Ann. Vol., Pergamon (1982)
5 Nemat-Nasser S. *Int. J. Solids Structures*, **18** (1982) : 857
6 Mehrabadi M M, Nemat-Nasser S. *Mech. Materials*, **6** (1987) : 127
7 Seth B R. Generalized strain measure with applications to physical problems. Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics (ed. by Reiner M, Abir D.), MacMillan(1964): 162
8 Truesdell C, Noll W. The Nonlinear Field Theories of Mechanics. Handbuch der Physik Vol, Ⅲ/3, Springer (1965)
9 Sedov L I. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Addison-Wesley (1965) : 38
10 郭仲衡. 应用数学和力学, **9** (1988) : 1045
11 Macvean D B. *ZAMP*, **19** (1968) : 157
12 Hill R. *J. Mech. Phys. Solids*, **16** (1968) : 229
13 郭仲衡. 应用数学和力学, **1** (1980) : 5

FROM PRINCIPAL AXIS REPRESENTATION TO ABSTRACT REPRESENTATION

Guo Zhong-heng

Department of Mathematics, Beijing University (Peking University)

Liang Hao-yun

Department of Mechanics, Zhongshan University

Abstract The present paper offers a systematic method which can be used to transform results obtained by the principal axis method to frame-free abstract representations. Thus, this method helps further applications of the principal axis method.

Keywords *principal axis method; abstract representation*

更 正

读者谈庆明同志指出，《力学进展》1989年第19卷第2期第252页第10—11行第1句，应改为"在Austin的Texas大学的机电中心和Virginia州Alexandra的GT Devices公司正在建造制导电磁防御拦截弹的实验设备"．1990年第20卷第2期第256—258页所有CARY和cary，应改为CRAY和cray．特此更正，并向谈庆明同志深表感谢，向读者深致歉意．

编 者