第20卷 第2期 力学进展 Vol. 20 No. 2
1990年5月25日 ADVANCES IN MECHANICS May 25, 1990

结构分析的样条函数方法

江世永 薛顺应
后勤工程学院，重庆（邮政编码630041）

提要 本文介绍了近几年来结构分析中的各种样条函数方法及其在工程中的应用，以及样条函数方法研究的新动态和笔者的最近研究成果。

关键词 样条函数；样条有限点法；样条有限元法；样条有限条法；样条综合离散法；样条加权残值法；样条边界元法；子域法

最早采用样条(spline)这一名称的是美国数学家Schoenberg[1] (1946)，但直到1967年才出版第一本系统介绍样条函数的著作[2]．将样条函数用于结构分析则在80年代初．样条函数插值比多项式插值有很大的优越性，即精度高，未知量少．因此，以样条函数作为试函数的各种结构分析的计算方法应运而生[3-6]．

1 样条能量法

1.1 样条有限点法[5] 本方法以B样条函数、正交函数和最小势能原理为基础．位移函数是B样条函数与正交函数乘积的线性组合．具体有两种形式，即

$$w=\sum_{m=1}^{r}S(x)Z_m(y)=\sum_{m=1}^{r}Z_m(y)[\phi(x)]\{c\}_m \qquad (1)$$

$$w=[\phi(x)]\{a\}Y(y)+[\phi(y)]\{b\}X(x) \qquad (2)$$

式中 $[\phi(x)]$ 与 $[\phi(y)]$ 为B样条适当组合的基，因此参数 $\{c\}_m$，$\{a\}$ 和 $\{b\}$ 在边界上有明确意义，从而对规则板（如矩形板和扇形板）的各种边界条件很易处理．$X(x)$ 和 $Y(y)$ 为满足四周边界条件的板条函数[6]，也可取仅用一项的梁振型函数．

式（2）对有内部及边界点支承的问题较易处理[6]．且采用式（2）作为试函数不仅精度高，而且未知量数目也少，因为级数只取一项，不存在耦连问题．

样条有限点法对静力、动力和稳定分析都适用．对高层结构分析较适用[9-13]，如果作稳定分析时，则只需将其中试函数的有关梁振型函数部分都改为稳定函数即可．

1.2 样条有限元法 此法由石钟慈[4]首先提出．它以变分原理和B样条函数为基础．位移函数由B样条函数的乘积的线性组合构成，即两个方向都采用样条函数逼近：

$$w=\sum_{i=-1}^{M+1}\sum_{j=-1}^{N+1}c_{ij}\phi_i(x)\phi(y)=[\phi]\otimes[\phi]\{c\} \qquad (3)$$

此法的提出起初是作为普通有限元法的一种补充[4]．但经后来发展，已远非如此．文[4]指出的解决所谓特殊问题，即指一些特殊形状的区域和边界条件．这是因为样条有限元法可将整个板或区域作为一个单元来分析．文[8]将单元划分为内部规则单元、边单元和角单元，然后再对单元进行子元划分，这种方法能对各种形状的边界进行处理分析．

本方法的优点是未知量少精度高，对不规则区域的分析也适用．由于B样条函数的分段连续性，在相同划分的前提下，三次样条有限元与 Hermite 元计算量之比约为 1∶4．这是因为样条有限元每个节点只有1个参数，而Hermite元每个节点有4个参数，而两者的精度为同一数量级 $O(h^4)$，h 为划分的步长．显然，对矩形板，三次样条元远胜过Hermite元．样条有限元法对处理梁板结构也格外精确和方便[4]，对结构的动力和稳定分析也同样适合．

1.3 样条有限条法[14]　此法用B样条插值函数代替经典有限条法[15]的梁振型函数，可以方便地处理经典有限条法不易处理的复杂支承和集中载荷等问题．以板的弯曲为例，其位移函数取为如下形式：

$$w(x,y)=[[C_1][C_2]]\begin{bmatrix}[\phi] & & & \\ & [\phi] & & \\ & & [\phi] & \\ & & & [\phi]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{C_i\}\\ \{D_i\}\\ \{C_j\}\\ \{D_j\}\end{Bmatrix} \tag{4}$$

式中 $[C_1]$ 和 $[C_2]$ 为位移函数的形函数，$\{C_k\}$ 和 $\{D_k\}$ $(k=i,j)$ 为节线上样点相应的挠度和转角位移参数．

用本方法分析规则形状板壳的各种复杂支承问题很方便，如弹性地基板、连续板、角支承板、柱支承板和扇形板等问题．分析沿高度变截面的高层建筑结构更显出其优越性，因为样条函数可以沿高度方向分段积分．

王磊[17]提出另一类样条函数有限条法，其试函数不是B样条函数与多项式乘积的线性组合，其位移函数为

$$w=\sum_{m=0}^{r}[C]Y\{\delta\}_m y^m=[C]Y(\{\delta\}_0+\{\delta\}_1 y^1+\cdots+\{\delta\}_r y^r) \tag{5}$$

$[C]$为插值函数，$\{\delta\}_m$为位移参数 $[\delta_k\ \ \theta_k\ \ \delta_{k+1}\ \ \theta_{k+1}]^T$，$Y$为分段多项式表示的样条函数．

由于梁函数 Y_m 不仅满足边界条件，而且还与载荷直接相关，因而其变形曲线与实际变形曲线很相近，故一般只取一至二项即可达到满意的精度，克服了经典有限条法用梁振型函数使刚度矩阵发生耦连的问题．$Y_m(m=1,2,\cdots,r)$ 为多项式或分段多项式．

1.4 样条综合离散法　本方法由笔者提出[18]．它是将近代有限元法与经典Ritz法相结合，以样条函数作为节点位移模式的试函数的综合离散法．通过引入节点位移模式，可解决不规则边界、多连通区域和非均匀介质等问题．可分为一维综合、二维综合和多维综合．以薄板弯曲为例，设节点 (x_i,y_j) 的节点位移为

$$\{\delta_{ij}\}=[w_{ij},(\partial w/\partial x)_{ij},(\partial w/\partial y)_{ij}]^T \tag{6}$$

如果采用二维综合，则其节点位移沿两个方向都可适当加以控制，即有

$$w_{ij}=[\phi(x_i)]\{a\}_1 Y(y_j)+[\phi(y_j)]\{a\}_2 X(x_i) \tag{7a}$$

$$(\partial w/\partial x)_{ij}=[\phi(x_i)]\{b\}_1 Y(y_j)+[\phi(y_j)]\{b\}_2 X'(x_i) \tag{7b}$$

$$(\partial w/\partial y)_{ij}=[\phi(x_i)]\{c\}_1 Y'(y_j)+[\phi(y_j)]\{c\}_2 X(x_i) \tag{7c}$$

式中 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 为板条函数.

通过转换式（7），结构的自由度由 $3M_1 \times N_1$ 降到 $3(M+N)$（如果不考虑向外延伸的点），M_1 和 N_1 分别为节点沿 x 轴和 y 轴方向的个数，M和N分别为 x 和 y 轴方向样点数. 且经转换后，自由度与节点个数无关，因此，节点愈多，优点愈明显.

框架结构在水平载荷作用下，梁和柱的变形呈波浪形. 如果想用少数几项级数来逼近任何点的位移，那是不可能的，但其节点的变化却是有规律的. 因此，引用节点位移模式分析是合理的. 类似的结构还有肋梁楼盖、箱形基础、片筏基础和空间网架，它们用样条综合离散法进行分析尤为合适.

2 样条加权残值法

加权残值法是一种求解微分方程的方法. 在问题的泛函写不出或不易写出时，用加权残值法较为方便. 一般认为，求解非线性问题时加权残值法比有限元等方法有前途. 以样条函数为试函数的加权残值法叫做样条加权残值法. 根据试函数的不同，可分为单样条加权残值法，双样条加权残值法和双向单样条加权残值法. 根据权函数的不同，可分为配点法，伽辽金法，最小二乘法，矩量法和子域法[6]. 本文只介绍有关样条函数的几种新的加权残值法，以单样条函数为例.

2.1 样条伽辽金配点法　设薄板的挠度为

$$w = \sum_{m=1}^{r} [\phi]\{a\}_m Y_m \tag{8}$$

如果以样点为配点，则有

$$\{R\} = \sum_{m=1}^{r} D(Y_m[A_x] + 2Y''_m[B_x] + Y^{(4)}_m[C_x])\{a\}_m - \{q\} \tag{9}$$

式中

$$[A_x] = [\phi^{(4)}(x_k)],\ [B_x] = [\phi''_i(x_k)],\ [C_x] = [\phi_i(x_k)]$$

如果式（8）满足所有边界条件，则

$$\int_0^b \frac{\partial\{w\}^T}{\partial\{a\}_m}[\lambda_x]\{R\}dy = \{0\} \tag{10}$$

由上式可求出$\{w\}$，问题得解.

2.2 样条最小二乘配点法　以 x 轴方向两对边自由的板为例，有

$$\{R\} = [K]\{a\} - \{q\} \tag{11a}$$

$$\{R_B\}_i = -W_B[K_i]\{a\} \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{11b}$$

利用最小二乘配点法可得

$$h_x\frac{\partial\{R\}^T}{\partial\{a\}}([E]\otimes[\lambda_x])\{R\} + \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial\{R_B\}_i^T}{\partial\{a\}}\{R_B\}_i = \{0\} \tag{12}$$

由式（12）即可列出刚度方程，问题得解.

2.3 样条矩量配点法　设薄板的挠度函数为

$$w = w_0 + \sum_{m=1}^{t}[\phi]\{c\}_m Y_m \tag{13}$$

利用矩量配点法有

$$
\left.\begin{aligned}
&[G]_m\{c\}_m=\{f\}_m \qquad (m=1,2,\cdots,t)\\
&[G]_m=D[a][\lambda_x][K]_m\\
&[K]_m=\alpha_1[A_x]+2\alpha_2[B_x]+\alpha_3[C_x]\\
&\{f\}_m=[a][\lambda_x][f_m(X_0)f_m(X_1)\cdots f_m(X_N)]^T\\
&f_m(x_i)=\int_0^b\left[q(x_i,y)-D\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)\right]Y_m dy
\end{aligned}\right\} \tag{14}
$$

式中 $\alpha_1=\int_0^b Y^2dy$，$\alpha_2=\int_0^b YY''dy$，$\alpha_3=\int_0^b YY^{(4)}dy$.

2.4 样条能量配点法[21] 此法以能量原理及 B 样条函数为基础，但采用配点法的计算格式，其计算刚度矩阵比样条有限元法简单很多. 利用最小势能原理，可得到

$$\int_0^a\int_0^b R\,dx\,dy=\{0\}$$

$$R=B^T[D]B\{a\}-([Y]\otimes[\phi])^T q$$

$$B=-\begin{bmatrix}[Y] & \otimes & [\phi''] \\ [Y''] & \otimes & [\phi] \\ 2[Y'] & \otimes & [\phi']\end{bmatrix}$$

如果在 x 轴方向作均匀分划，以样点作为配点，则有

$$\sum_{k=0}^{N}\lambda_k\int_0^b R(x_k,y)dy=\{0\} \tag{15}$$

由上式即可建立刚度矩阵.

2.5 样条子域配点法 设薄板某子域的挠度函数为

$$w=\sum_{m=1}^{r}[\phi][Q_x]Y_m\{a\}_m \tag{16}$$

子域内的配点可以采用以上的各种配点法，公式完全相同，不过作子域分析后，尚需对整体分析，考虑子域公共边的协调连续条件.

由于样条加权残值法是以各种不同的途径在平均意义上使试函数满足控制微分方程和边界条件，因此是一种近似的方法. 为了保证求得的应力场和位移场均连续，一般采用五次 B 样条函数作为试函数，能保证四阶导数的连续性.

3 样条边界元法

边界元法作为有限元法的一种补充，有时能解决有限元法难以解决的问题，且适用范围广，数据输入输出简单，精度也较高. 但边界元法的总体矩阵是满阵，且不对称. 如果边界未知函数用 B 样条函数，核函数即格林函数也可用 B 样条函数，则这样的边界元法称为样条边界元法（SBEM）. 此法可以克服普通边界元法（BEM）的缺点，且适用范围与 BEM 一样广泛.

对积分方程

$$u(P)+\oint G(P,s)u(s)ds=f(P) \tag{17}$$

在边界 s 上作均匀划分，即有

$$s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_N$$

则式（17）变为（设 $P = s_j$）

$$R(s_j) = u(s_j) + \sum_{i=0}^{N} \lambda_i G(s_j, s_i) u(s_i) h - f(s_j) \quad (j = 1, 2, \cdots, N) \tag{18}$$

式中 $h = s_{i+1} - s_i$，λ_i 与数值积分的求积公式有关.

取试函数如下：

$$u(s) = \sum_{i=0}^{N} a_i \phi_i(s) \tag{19}$$

将式（19）代入式（18）即得

$$\{R\} = [K]\{a\} - \{f\} \tag{20}$$

最小二乘配点法结合式（20）即得刚度矩阵. 可以证明刚度阵是非奇异的，问题有唯一解.

至于非等距样条边界元法，完全可以类似推导[22].

4 样条子域法[23]

本方法是根据剖分原理，将结构划分为许多子域，先进行子域分析，建立子域刚度矩阵，然后进行整体分析，即刚度矩阵和载荷列阵的组装过程. 子域刚度阵的建立可由样条能量法或样条加权残值法得到. 根据试函数的形式不同，可分为单样条子域法、双样条子域法和双向单样条子域法[24]. 样条子域法既有样条有限元法和样条有限点法的优点，又有普通有限元法和有限条法的优点. 更重要的是，样条子域法具有灵活、适用范围广的特点，使此法具有广泛的应用范围.

本方法已经建立了矩形子域、扇形子域、三角形子域和任意四边形子域. 根据各类工程结构的特点，划分为各种子域进行分析，复杂的问题就可以迎刃而解了. 特别是将子域法同样条综合离散法结合，通过建立节点位移模式的概念，各种子域不仅可以是连续子域，而且还可以是离散子域，大大地扩大了子域法的适用范围.

样条子域法用于分析高层建筑结构已取得较大进展[9-11,18]. 这是一种很有前途的方法.

5 结束语

样条函数的特点使它的研究十分活跃. 样条函数方法已成为计算数学、计算力学和计算物理中的重要方法. 尚有许多问题值得进一步研究. 例如：①结构力学样条函数方法的收敛性和误差估计；②非等距样条函数的研究及在结构分析中的开发运用等；③样条子域法的三角形子域及任意形子域的开发研究；④样条函数方法解几何非线性问题；⑤样条函数方法解弹塑性问题；⑥样条函数方法解粘弹性及粘塑性力学问题；⑦样条函数方法在各种工程结构上的应用研究，如高层建筑结构和大跨度房屋结构；⑧样条函数方法的微机软件研制及推广应用.

参 考 文 献

1 Schoenberg I J. *Quart. Appl. Math.*, **4** (1946) : 45—99; 112—141
2 Ahlberg J H, Nilson E N, Walsh J L. The Theory of Spline and Their Applications. Academic Press, New York (1967)
3 Cheung Y K, et al. Proc. Int. Conf. on FEM, Shanghai (1982) : 704—709
4 石钟慈. 计算数学, **1**, 1 (1979) : 50—72
5 秦荣. 数值计算与计算机应用, **2**, 2 (1981) : 68—81
6 秦荣. 结构力学的样条函数方法. 广西人民出版社, 南宁 (1985)
7 苏华晶. 复杂支承薄板的样条子域法. 广西大学硕士论文 (1984)
8 邱吉宝, 刘效尧. 合肥工业大学学报, 4 (1983) : 231—240
9 Qin Rong. Proc. 3rd Int. Conf. Tall Buildings, Hong Kong & Guangzhou (1984)
10 Luo Songfa, et al. *ibid*
11 秦荣. 筒体结构的样条子域法. 第3届全国结构计算方法会议论文 (1983)
12 秦荣. 样条子域法及其应用. 同上
13 曹国兴. 平面任意形状高层筒体结构分析的样条函数方法. 第9届全国高层建筑结构学术交流会论文集, 成都 (1986)
14 吴兹潜, 张佑启, 范寿昌. 结构分析的样条有限条法. 广东科技出版社 (1986)
15 Cheung Y K. Finite Strip Method in Structural Analysis. Pergamon Press, London (1967)
16 卫园. 样条有限条法及其在高层建筑中的应用. 华南工学院硕士论文 (1982)
17 王磊. 湖南大学学报, **8**, 4 (1981) : 8—19
18 江世永, 薛顺应. 工程力学, **4**, 4 (1987) : 65—72
19 蔡承武等. 固体力学学报, 3 (1982) : 351—365
20 李政华. 上海力学, **5**, 1 (1984) : 48—60
21 秦荣. 工程力学, **1**, 1 (1984) : 30—50
22 李岳生, 齐东旭. 样条函数方法. 科学出版社 (1979)
23 秦荣. 上海力学**5**, 3 (1984) : 30—47
24 秦荣. 广西大学学报 (自然科学版), 2 (1985) : 1—14
25 秦荣. 样条子域法及其应用. 第2届全国计算力学会议, 上海 (1986)
26 Li W Y, et al. *J. Eng. Mech., ASCE*, **112**, 1 (1986) : 43—54
27 Cheung Y K, et al. Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2 (1983) : 311—323
28 Fan S C, Cheung Y K. *J. Sound and Vibration*, **93**, 1 (1984) : 81—94
29 江世永, 薛顺应. 柔性地基上高层筒体结构分析. 第10届高层建筑结构会议论文集, 青岛 (1988)

SPLINE FUNCTION METHOD IN STRUCTURAL ANALYSIS

Jiang Shi-yong Xue Shun-ying
The Logistics Institute of Technology & Engineering, Chongqing

Abstract In this paper, the development of Spline Function Method (SFM) in structural analysis and its application in engineering are described. The recent work on this field by the authors is also given, together with a review of its trend of development.

Keywords *spline function; spline finite point method; spline finite element method; spline finite strip method; spline synthetic-discrete method; spline weighted residuals method; spline boundary element method; subdomain method*