第19卷 第4期 力学进展 Vol. 19 No. 4
1989年11月25日 ADVANCES IN MECHANICS Nov. 25, 1989

# 结构的宽带随机振动

朱位秋
浙江大学力学系，杭州（邮政编码310027）

**提要** 结构的宽带随机振动理论是随机振动理论中一个引起兴趣的领域。这种随机振动模态数量很大，从而呈现简单的渐近趋向。本文综述该领域的一些概念和方法。讨论的重点是，具有小阻尼的均匀对称结构，在孤立点上受平稳宽带随机力激励时，其均方响应空间分布的渐近型式。

**关键词** 随机振动；结构响应；渐近性态

## 1 引言

结构的宽带随机振动是指结构在宽带随机激励下激起的响应模态数量很大，从而它的均方响应量呈现出某种渐近趋向的一类随机振动。这是随机振动理论中一个有趣的专题。近10几年来，许多作者在这一问题上作过系统的研究，发展了一些渐近的分析方法，也揭示了均方响应空间分布的一些渐近规律。然而还有一些现象未能解释，在方法上也存在一些矛盾，有待进一步探讨。

为了说清问题的由来，考虑一个结构在平稳随机激励 $f(\mathbf{x},t)$ 作用下的平稳响应。设激励随机场的空间-时间互谱密度函数为 $s_f(\mathbf{x},\mathbf{x}';\omega)$。以 $\omega_n$ 与 $\phi_n(\mathbf{x})$ $(n=1,2,\cdots)$ 表示结构的固有频率与相应的振型。应用模态叠加法，结构的均方速度响应可表示为[1]

$$E[v^2(x)]=\sum_m\sum_n\phi_m(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{x})I_{mn} \tag{1}$$

式中 $I_{mn}$ 是模态响应互谱密度函数的积分

$$I_{mn}=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2H_m^*(\omega)H_n(\omega)\Phi_{mn}(\omega)d\omega \tag{2}$$

而 $\Phi_{mn}(\omega)$ 是模态激励互谱密度函数

$$\Phi_{mn}(\omega)=\int_A dA_1\int_A dA_2\phi_m(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{x}')s_f(\mathbf{x},\mathbf{x}';\omega) \tag{3}$$

式中 $A$ 是作用有随机载荷的结构表面面积，而

$$H_m^*(\omega)H_n(\omega)=\begin{cases}m^{-2}[(\omega_m^2-\omega^2-i\beta\omega)(\omega_n^2-\omega^2+i\beta\omega)]^{-1}, & \text{对粘性阻尼}\\ m^{-2}[(\omega_m^2-\omega^2-i\eta\omega_m^2)(\omega_n-\omega^2+i\eta\omega_n)]^{-1}, & \text{对线性粘弹性材料}\end{cases} \tag{4}$$

$m$ 为单位体积（面积或长度）的质量。$\beta$ 为模态带宽。$\eta$ 为损失因子。

设随机激励 $f(\mathbf{x},t)$ 是一个限带白噪声场，其空间-时间互谱密度为

$$s_f(\mathbf{x},\mathbf{x}';\omega)=s(\omega)c^2(\mathbf{x},\mathbf{x}';\omega) \tag{5}$$

$$s(\omega)=\begin{cases}s_0, & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases} \tag{6}$$

$c^2(\mathbf{x},\mathbf{x}';\omega)$ 为相干函数，$\omega_c$为截止频率.

凡满足 $\omega_n\leqslant\omega_c$ 的固有频率 $\omega_n$ 及相应的振型 $\phi_n(\mathbf{x})$ 称为共振模态；而满足 $\omega_n>\omega_c$ 的相应模态称为非共振模态．已证明[2]，虽然非共振模态对均方速度响应（1）的贡献随着共振模态数目 $N\to\infty$ 而无限增大，但与共振模态的贡献比较起来总是可忽略不计的．这样，在按（1）求均方速度响应时，只须对$N$个共振模态累加．共振模态数$N$取决于激励的带宽与结构的模态密度（每单位频带上的模态数）．如果激励带宽很大，结构的模态密度很大，共振的模态数将很大．于是就构成一个结构的宽带随机振动问题．一个典型的例子是喷气噪声引起的飞行器表面结构的振动．已知[3]喷气噪声的带宽约为三个10倍频程，即几乎是整个声频范围．另一方面，典型的飞行器表面结构的固有频率间隔可为10 Hz或更小．这样，喷气噪声可激起飞行器表面结构的上百甚至上千个模态．显然，在这种情形下，按（1）求均方响应其计算量是太大了．于是，要设法寻求某种简化的渐近分析方法.

## 2 分析方法

分析宽带随机振动的两个较一般的方法是统计能量分析[4]与积分估计法[1,5]．统计能量分析是通过对功率流动与能量在结构各模态之间分配的分析而对结构的响应量的空间时间平均作出粗略的估计．在这种分析中，通常只需知道结构的模态密度，而不必知道振型．这种方法在声振耦合问题中特别有用．积分估计法的基本思想是：用在波数空间某一区域上的积分来近似代替对模态的叠加．激励频带越宽，结构的模态密度越大，这种方法的结果就越好．在许多情形下，积分估计法能给出封闭形式的结果，从而可系统地分析不同因素对结构随机响应的影响.

积分估计法通常要求知道结构的成百或上千个固有频率与振型，并把它们表示成波数的函数．大多数一维结构的固有频率与振型是知道的，并已列成表格．即使没有，也相对容易算出．对二维均匀结构，只有在一些特殊的形状（如矩形、圆、正三角形，等等）及特殊的边界条件（如简支边）才已知其固有频率与振型[6,7]．对更一般结构，已知的模态信息更少．因此，60年代初提出了一种估计广义矩形结构的固有频率与振型的渐近方法[5,8]．按照这种方法，振型的渐近解分成两种，一种是生成解，它适用于矩形域的内部；另一种是修正解，它适用于边界区域，也称为动态边界效应．生成解只满足特征值问题的方程，不必满足边界条件．矩形域的每一个边界上的修正解则需同时满足方程与该边的边界条件，修正解的个数等于边界数．通过近似的匹配把所有这些解统一起来，从而确定渐近的固有频率与振型．这种渐近法已应用于各种边界条件下的板与壳[5]．这种方法的优点是应用起来很简单，固有频率阶数越高，这种方法给出的结果也越精确．固有频率的渐近表达式还可用来构造固有频率的渐近密度．正是这种估计固有频率与振型的渐近方法与固有频率分布的理论，使得积分估计方法获得较为广泛的应用.

对某些特殊的结构与边界条件，如简支梁，简支矩形板及正三角形板，全部固有频率与振型都有解析表达式．有可能在模态叠加法的基础上作渐近分析[1,2,9].

有限的一维均匀结构对点激励的响应也可展成多重散射级数[10]．其中第一项称为直接场，是无限结构的响应，或等价地是没有反射边界的有限结构的响应．第二项是一次反射，是对半无限问题的解．它与直接场一起满足真实的边界条件．这些一次反射本身也会产生从对面边界来的反射，等等．这样构成的无穷级数收敛于精确解．模态叠加法与多重散射级数法精度相同，其差别只在于具体应用中各有方便之处．

对点载荷作用下的固支弦、简支梁及矩形膜或板等，还可应用象源叠加法[1]．该方法的基本思想是，将点激励下的一个简支边的有限结构代之以一个无限结构，其上作用有原来的点源及其无穷多个象源，从象源发出的波相当于从边界反射回来的波．结构上任意一点的响应是从点源及无穷多个象源发出的波的叠加．可以得到在时域或频域上的叠加表达式．这种方法应用起来很简单．

## 3 均方响应的渐近空间分布

众所周知，当结构只有一个模态被激起时，响应幅值的空间分布以古典的 Chladni 节线表征．在几个或多个模态被激起时，响应的空间分布一般是很复杂的，尤其在结构受随机载荷作用时．但是，在一个小阻尼的均匀结构（如均匀梁，电缆，薄膜，等厚板或壳）受宽带随机激励时，均方响应（位移，速度，加速度及应力）常呈现出相对简单的渐近型式．随着激起的共振模态数目的增加，结构大部分上的均方响应趋向于均匀分布，与结构的边界条件无关．当均匀结构具有某种对称性（如矩形、圆、等边三角形），并在孤立点上受平稳宽带随机力作用时，在基本上均匀分布的响应场中存在若干响应强化了的窄带与小区域．这种响应的局部强化构成均匀结构的均方响应的空间分布的最突出的特点．这些强化带与强化区的位置与相对强化程度取决于激励力的位置与结构的对称性．

在宽带随机激励下均匀结构的均方响应的渐近空间分布型式首先由 Crandall 与 Wittig[11] 在均匀弦与等厚矩形板上发现．在其后的10多年中受到了系统的研究[1,2,9,10,12-20]．结构边界区域均方响应的强化与弱化取决于边界条件，可用前面提到的动态边界效应予以解释，并可用积分估计法估计相对强化值[5]．结构内部的强化带或区可解释如下．考虑一块等厚薄板，在 $Q(\xi)$ 点受法向宽带随机力作用，该力是限带白噪声，其谱密度为 $s_0$，于是

$$s_f(\mathbf{x},\mathbf{x}';\omega)=\begin{cases}s_0\delta(\mathbf{x}-\xi)\delta(\mathbf{x}'-\xi), & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases} \tag{7}$$

按（1），板内 $P(\mathbf{x})$ 点的均方速度响应为

$$E[v^2(P)]=\sum_m\phi_m^2(P)\phi_m^2(Q)I_{mm}+\sum_m\sum_{\substack{n\\ m\neq n}}\phi_m(P)\phi_n(P)\phi_m(Q)\phi_n(Q)I_{mn} \tag{8}$$

$$I_{mn}=s_0\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2H_m^*(\omega)H_n(\omega)\,d\omega \tag{9}$$

（8）右边的单重与双重和式分别表示模态自相关和模态互相关对均方速度响应的贡献．对粘性阻尼，$I_{mm}-(\pi s_0/\omega^2\beta A)=v_1^2$．

虽然板的固有频率的详细分布是很不规则的，并取决于板的尺寸与形状，但是渐近的频率间隔对任何形状的板是一样的[21]：

$$\overline{\Delta\omega}=\frac{4\pi}{A}\left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/2} \tag{10}$$

式中$A$为面积，$D$为抗弯刚度，$\rho$为材料密度，$h$为板厚．渐近的平均共振模态数$N$是满足下列不等式的最大整数：

$$N \leqslant \frac{A}{4h}\left(\frac{\rho h}{D}\right)^{1/2}\omega_c \tag{11}$$

假定阻尼很小，使得平均模态重叠比$\beta/\overline{\Delta\omega} \ll 1$，则可以证明[1,2,9]当$N \to \infty$时，均方速度响应（8）对响应点$P$与激励点$Q$的空间平均为

$$\langle E[v^2(p)]\rangle_{P,Q} = N v_1^2 \tag{12}$$

这是板的均方响应的平均值．它来自（8）中的第一项，即模态自相关的贡献．由于模态的正交性，在任何情形下模态互相关对（12）的贡献为零．这个结论也适用于一维结构[1]．均方速度响应的空间方差的主项，对弦来说，正比于$N^{1/2}$[1]；对于板则正比于$N^{3/2}$[2,20]．因此，空间标准差对空间平均之比的主项，对弦是$N^{-1/2}$，对板则为$N^{-1/4}$．这表明，随着共振模态数的无限增大，板上大部分区域的均方速度响应趋向于均匀分布．

当板的形状具有某种对称性时，均方速度响应的方差并非在整个板上均匀分布．此时，在边界与内部区域的某些窄带上方差特别大．这些带的形状与分布取决于板的形状，而与边界条件无关．为简单起见，可假定边界为简支．四边简支的矩形板的固有频率与振型为

$$\omega_n = \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{j\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{l_2}\right)^2\right] \tag{13}$$

$$\phi_n(\mathbf{x}) = 2\sin(j\pi x_1/l_1)\sin(k\pi x_2/l_2), \qquad j,k = 1,2,\cdots \tag{14}$$

对长度与宽度不可通约的矩形板，不会出现重频，从而很少出现模态重叠．

当激励作用在非特殊位置点上时，强化带形成“井”字形．这些带上的均方速度响应的局部强化可用强化因子 I.F. 表示

$$\text{I.F.} = E[v^2(p)]/\langle E[v^2(p)]\rangle_{P,Q} \tag{15}$$

式中分子上的$p$限于窄带上．沿一条窄带的平均强化因子为 3/2（Crandall 1979）．最大强化因子出现在激励点及其三个象点（即井字的四个交点）上．激励点（及其象点）的强化因子的空间平均为

$$\langle(\text{I.F.})_{\max}\rangle_Q = (3/2)^2 \tag{16}$$

可以证明，对所有非激励点位置，激励点（及其象点）的强化因子随$N \to \infty$而趋于（16）之值．对特殊激励点位置，强化带的形状、带与激励点的强化因子将不同．当$Q$位于矩形的一条中线而不在另一条中线上时，强化带的形状为“卄”字形．横向强化带的强化因子提高到２，而激励点的强化因子为３．当$Q$位于矩形的中心时，强化带形成“十”字形，强化带的强化因子皆为２，而激励点的强化因子为４．

对具有特殊对称形状的板（如方板，圆板，及正三角形板），将系统地出现重固有频率．一个$n$重的固有频率对应于$n$个不同的振型，这$n$个模态在任何情形下都是相关的．由于这$n$个模态的正交性，它们不影响均方速度响应的空间平均．但是，它们将显著地影响强化带与激励点的强化因子，并可能形成附加的强化带．关于重固有频率及其影响已进行了成功的研究[2,8,20]．

对长度与宽度可通约的板，$l_1/l_2 = r/s$，其中$r$与$s$为整数，（13）可改写成

$$\omega_n = (D/\rho h)^{1/2}(\pi^2/rsA)\nu \tag{17}$$

$$\nu=(sj)^2+(rk)^2 \tag{18}$$

以 $M(\nu)$ 表示对一个 $\nu$ 值的不同正整数 $j$ 与 $k$ 的对数，它就是固有频率（13）的重数。固有频率的重数可用每个模态的平均重数 $\overline{M}(\nu_c)$ 与每个固有频率的平均重数 $\overline{M}'(\nu_c)$ 描述：

$$\overline{M}(\nu_c)=\left(\sum_{\nu=1}^{\nu_c}M^2(\nu)\right)\Big/\left(\sum_{\nu=1}^{\nu_c}M(\nu)\right) \tag{19}$$

$$\overline{M}'(\nu_c)=\left(\sum_{\nu=1}^{\nu_c}M(\nu)\right)\Big/\left(\sum_{\nu=1}^{\nu_c}M^0(\nu)\right) \tag{20}$$

式中 $\nu_c$ 为与 $\omega_c$ 对应的是正整数；$\sum\limits_{\nu=1}^{\nu_c}M(\nu)$ 为固有频率总数；$\sum\limits_{\nu=1}^{\nu_c}M^0(\nu)$ 为不同值的固有频率总数．应用数论方法与计算机研究表明[2,20]，上述两个平均重数随频带宽度 $\nu_c$ 的增大对数地增长，即

$$\overline{M}(\nu_c)=(a/\pi)(\ln\nu_c+b) \tag{21}$$

$$\overline{M}'(\nu_c)=(c/\pi)(\ln\nu_c+d) \tag{22}$$

[20]中的表 2 与 3 分别列出了几种长宽比的矩形板的固有频率平均重数与（21），（22）中的各系数值．表 1 中还给出了理论值与计算机计算值的对比．从理论上讲，固有频率的重数随频带 $\nu_c\to\infty$ 而无限增大．当 $\nu_c=32000$ 时，[20] 的表中几种长宽比的板的实际最高重数分别为16,8,6,8．这些重频的模态互相关对均方速度响应的渐近分布的最显著影响表现在特殊激励点的强化因子上．应用数论方法及计算机研究表明[2,20]，特殊激励点的强化因子也随激励带宽而对数地增长：

$$(\mathrm{I.F.})_Q=(e/\pi)(\ln\nu_c+f) \tag{23}$$

对 [20] 表 2 中各种长宽比的矩形板，当激励点在板中心时，系数 $e$ 值分别为 4.00，1.97，2.69，1.46；系数 $f$ 值分别为 1.86，2.92，0.814，2.50．中心点强化因子的理论值与计算机计算值列于 [2] 中的表 2 与[20]中的表 5．

可见，从理论上讲，中心点的强化因子可随激励带宽 $\nu_c\to\infty$ 而无限增长，这与无重频时强化因子为常数的情形形成鲜明的对照．例如，在方板中心激励下，当 $\nu_c=32000$ 时，强化因子达 15.6．

由重频引起的模态互相关还会形成附加的强化带．其中较显著的是由二重固有频率引起的．在长宽比可通约的矩形板中，二重频率的数量极大[20]．对于方板，附加的强化带为通过激励点且与边缘成 $\pm45°$ 的两个内接矩形[1]，强化因子为 5/4．当激励点位于特殊位置时，这两个内接矩形可能部分或全部重合．重合时强化因子提高．例如，在方板中心点激励时，附加强化带合并为两条对角线，而强化因子为 2，与原来“十”字形的强化带的强化因子相同．对更一般的长宽比可通约的矩形板，附加的强化带为通过激励点或其象点而与矩形边成 $\pm45°$ 的窄带[20]．其强化因子为 $1+(1/4rs)$，或 $1+(1/2rs)$，或 $1+(1/rs)$，取决于激励点的位置．例如，对 1:2 的矩形板，当激励点位于两个次方形之一的中点时，这些附加强化带的强化因子为 3/2．

对正三角形膜与板，两组等价的完备的固有模态系由 [22,23] 给出．Crandall 与朱位

秋[9]研究了正三角形板的固有频率重数与中心激励下激励点的强化因子．正三角形板的固有频率为

$$\omega_n = \frac{4\pi^2}{3H^2}\left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/2}\mu \tag{24}$$

式中$H$为三角形之高，而

$$\mu = j^2 + jk + k^2 \qquad (j,k=1,2,\cdots) \tag{25}$$

为无量纲频率．由数论方法与计算机计算得到的正三角形板的每个固有频率的平均重数与每个模态平均重数列于［9］中的表 2．

正三角形板对点随机激励的均方速度响应仍可按（8）计算．其中$\omega_n$由（24）确定，而$\phi_n(\mathbf{x})$见［9］．当点源位于非特殊位置时，板内任一点的局部均方速度响应随着共振模态数的无限增大而趋于（12）之值．当激励点位于某些特殊位置时，板内将出现强化带．当激励点在一条中线而不在另外两条中线上时，强化带便在那条中线上[17]．当激励点位于正三角形的中心时，所有三条中线都是强化带．在忽略由重频引起的模态互相关的贡献时，激励点的强化因子为 9[17]．计及模态互相关时的激励点强化因子由［9］用数论方法与计算机计算求得为

$$(\mathrm{I.F.})_{\mathrm{asymp}} = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi}\cdot\frac{\ln\mu_c + 2.194}{1 - 1.639/\sqrt{\mu_c}} \tag{26}$$

这与长宽比可通约的矩形板具有类似的变化规律．当$\mu_c = 32000$时，$(\mathrm{I.F.})_{\mathrm{asymp}} = 15.73$．$(\mathrm{I.F.})_{\mathrm{asymp}}$随$\mu_c$的变化见［9］中的表 4．

Itao 与 Crandall[16]曾研究过具有自由边界的圆板的均方响应的渐近空间分布．发现总的响应分布不象矩形板那么均匀，但也有强化带，它是通过激励点的一条直径与一个圆．虽然圆板也有特殊的对称性，也有系统的重固有频率，但与方板及正三角形板不一样．所有以直径为节线的模态所对应的固有频率重数都是 2，但点激励只激起两个模态中具有通过激励点的圆形反节线的那一个．因此，重固有频率并不引起附加的强化效应．

如前所述，任何形状板的固有频率是渐近均匀分布的，但对薄壳，固有频率分布常有渐近密集点[5]，在该密集点附近，模态互相关常不能忽略不计．Elishakoff 等[15]研究过两端简支的均匀圆柱壳受环形均布宽带随机激励时的均方速度响应．圆柱壳的轴对称渐近模态密度为

$$n(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_1 \\ \dfrac{L}{2\pi}\left(\dfrac{\rho h}{D}\right)^{1/2}\dfrac{\omega}{[\omega^2 - E/\rho R^2]^{3/4}}, & \omega \geqslant \omega_1 \end{cases} \tag{27}$$

在$\omega_1 = (1/R)(E/\rho)^{1/2}$点$n(\omega_1)\to\infty$．上式中$R$是半径，$L$是长度，在$\omega_1$附近模态的重叠比$\beta/\Delta\omega \gg 1$．

在这种情形下，均方速度响应为模态自相关与互相关的贡献之和．自相关分量是非负的，对长度的中点是对称的．由固有频率密集引起的模态互相关可正可负，也无简单的对称性．密集频率的显著效应是响应显著集中在激励点附近，而在其象点附近相对减小，从而形成沿长度的非对称分布．随着$R/L\to\infty$，互相关之和趋于零，均方速度响应的空间分布趋于对称．

Smith[10] 用多重级数展式考察了上述问题，指出均方速度响应的空间集中是由于从源发生而未到达边界的那部分波（即直接场）在传播中的衰减。频率 $\omega_1$ 也是圆柱壳作为波导的截止频率。波导中的能量速度（即群速度）随着频率趋近于截止频率而趋近于零。此时，即使少量的耗散（分布阻尼）也要引起接近于截止频率的频率分量在传播中迅速的衰减。这里有两个本质的特点：具有分布阻尼与很大的模态密度。许多结构可具有这样的特性。在分布点弹簧基础上的古典梁是另一个典型的例子。Wedig 和 Riemer[19] 得到了这种情形的类似结果。

应该指出，对于在孤立点上受宽带随机激励的小阻尼均匀结构，其均方速度响应的空间分布的渐近结果也适用于均方位移、加速度及应力的空间分布。类似地，均匀结构在简支边界条件下得到的均方响应空间分布的渐近结果也适用于其它边界条件。这是因为，按照动态边界效应，边界条件对高阶固有频率与结构内部的振型影响很小。在此，有重要影响的是边界的形状。

部分解析结果已用撒在结构上的盐粒分布型式或直接测量定性或定量地证实。实验技术与结果在［1］中作了总结。用模态叠加法预测的矩形、方、圆及正三角形板的几乎所有强化带都已用盐粒分布型式证实，并证明结构内部的强化带与边界条件无关。对矩形与圆板，均方响应空间分布的测量结果基本上与理论预测一致。

## 4 有待进一步研究的问题

在结构宽带随机振动中尚有一些观察到的现象未能解释。其中之一是 Young[24] 的实验。在涂黑了的矩形鼓膜上撒上盐粒，在其上某点作用 3150Hz 至 40000Hz 的高频宽带法向随机力，发现激点响应很大。盐粒形成围绕激励点的圆环形窄带，这与前面所说的强化带形状不同。他同时作了单频激励，发现当激励频率低于 3000Hz 时，盐粒形成古典 Chladni 节线；当激励频率高于 4000Hz 时，Chladni 节线不再出现，而代之以圆环形的节线。而且盐粒沿圆环缓慢地迁移。两环形节线的间距随激励频率的提高而减小。有人曾试图通过分析计算解释此现象，但未能成功。

另一个值得进一步研究的问题是象源叠加法。对一维结构与无重频或只有二重频的二维结构，Crandall 等[1,14] 曾用该方法简单地得到与模态叠加法相同的结果。但是基于这两种方法得到的方板中心激励点的强化因子却不相同。进一步考察表明，象源叠加法确实存在至今未能解决的矛盾[25]。

笔者曾为纪念 Crandall 教授 65 寿辰撰写了"随机振动现状与近代进展"的特邀论文[26]，可参阅。

## 参 考 文 献


1 Crandall S H. in Developments in Statistics (P. R. Krishnaiah, ed). Academic Press, N. Y. (1979): 1—82
2 Crandall S H, Zhu W-Q. in Random Vibrations and Reliability. Proc. IUTAM Symp., Frankfort/Oder, 1982, Akademie-Verlag, Berlin (1983): 231—243
3 Crandall S H (ed). Random Vibration. The MIT Press (1958)
4 Lyon R H. Statistical Energy Analysis of Dynamic Systems. The MIT Press (1975)
5 Bolotin V V. Random Vibrations of Elastic Systems. Martinus Nijhoff Publishers, Hague (1984)
6 Liessa A W. Vibration of plates, NASA SP-160 (1969)
7 Gorman D J. Free Vibration Anarysis of Rectangular Plates. Elsevier, N. Y. (1982)

8 El·shakoff I. *Shock and Vib. Dig.*, **8** (1976) : 95—104
9 Crandall S H, Zhu W-Q. *Probabilistic Eng. Mech.*, **1**, 1 (1986) .
10 Smith P W Jr. *J. Acoust. Soc. Am.*, **69** (1981) : 1337—1342
11 Crandall S H, Wittig L E. in Dynamic Response of Structures (G. Herrmann and N. Perroue, eds) . Pergamon, N. Y. (1972) : 55—77
12 Crandall S H. in Proc. U. S. Natl Congr. Appl. Mechs. 7th, ASME, N. Y. (1974) : 131—138
13 Crandall S H. in Stochastic Problems in Dynamics (B. L. Clarkson, ed). Pitman, London (1977): 366—389
14 Crandall S H. *Ingenieur Archiv*, **49** (1980) ; 347—359
15 Elishakoff I. Van Zanten A Th. Crandall S H. *J. Appl. Mechs.*, **46** (1979) : 417—422
16 Itao K. Crandall S H. *J. Mech. Design*, **100** (1978) : 690—695
17 Lee S S. Lanes of intensified response in structures excited by wide-band random excitation. Ph. D. Thesis. Dept. Mech. Eng., MIT (1976) .
18 Crandall S H. Kulvets A P. in Applications of Statistics (P. R. Krishnaiah, ed). Worth-Holland Publishing Company (1977) : 163—182
19 Wedig W, Riemer M. *VDI-Berrichte*. Nr. 419 (1981) : 201—207
20 Zhu W-Q. Lei Y. in Proc. Int. Conf. Vib. Prob. Eng., Xi'an (1986) : 890—895
21 Courant R. Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Wiley (Interscience) . N. Y. (1953)
22 Lee S S. Crandall S H. in Melanges (Th. Vogel, B. Rybek, P. Janssens, M. Jessel, eds). Presses Universitaires, Brussels (1978) : 255—268
23 Pinsky M A. *SIAM J. Math. Anal.*, **11** (1980) : 819—827
24 Young L E. TR-81678-2. Acoust. and Vib. Lab., MIT (1975)
25 Crandall S H. in Proc. 23rd Ann. Tech. Meeting, SES (S. L. Koh, ed) (1986)
26 Zhu W-Q. in Random Vibration—Status and Recent Developments (I. Elishakoff, R. H. Lyon, eds) . Elsevier. Amsterdam (1986) : 525—536

# WIDE BAND RANDOM VIBRATION OF STRUCTURES

Zhu Wei-qiu
Department of Mechanics, Zhejiang University

**Abstract** Wide band random vibration of structures is an interesting area in the theory of random vibration in which the number of responding modes is so large that some asymptotic behaviour may be observed. The present paper is a survey of the concepts and methods in this area. The emphasis is placed on the pattern of asymptotic spatial distrbutions of mean-square response of uniformly symmetric structures with light damping excited by stationary wide band random force applied at isolated points.

**Keywords** *random vibration; structural response; asymptotic behaviour*