

非线性科学——从范例到实用 (II)

D. K. Campbell

3 确定性浑沌和分形

确定性浑沌 (deterministic chaos) 是应用于过去20年内数学和自然界大量非线性系统中观察到的非周期, 不规则, 不能预计和随机等行为的用语。尽管过程是严格确定性的, 并且所有的力是已知的, 但长期行为却不能预计, 而且是象掷钱币那样地随机。

由确定性规律决定的系统可以有效地表现出随机行为, 这完全与我们通常的直觉相违背。也许这是由于直觉在先天上是“线性”的; 确实, 确定性浑沌不可能出现在线性系统中。更为可能的是, 这是由于我们根深蒂固的钟表宇宙的观点, 这种观点在西方是伟大的法国数学家和自然哲学家 Laplace 强烈地主张的。如果我们能够知道宇宙中所有质点的位置和速度以及它们之中所有的力的性质, 则我们就可以绘出宇宙在所有时间中的行程。简单地说, 从初始状态 (和各种力) 的精确知识可以导出最终状态的精确知识。在牛顿力学中, 这种信念是正确的, 并且避免了任何可能的混乱。我强调一下, 我们只考虑遵守经典牛顿力学的动力学系统。以后的评述将不涉及由量子力学引起的“不确定性”。

但是, 在真实世界内, 初始状态的精确知识是得不到的。一个特殊质点的速度不管测量得多么精确, 我们总能要求测量得更精确些。尽管一般说来, 我们可能认识到, 我们没有能力知道这种精确知识, 但通常我们假定, 如果两个分别进行的实验的初始条件几乎相同, 则最后条件亦将几乎相同。对于大多数具有光滑特性的“常规”系统, 这种假定是正确的。但对于某些非线性系统, 它是错误的, 并且结果是确定性的浑沌。

在本世纪初, 另一位伟大的法国数学家和自然哲学家 Henri Poincaré, 非常精确地了解了这种可能性, 并且写道 (见《科学和方法》(Science and Method)):

没有被我们注意到的某一个非常小的原因, 会确定出一个我们不可能视而不见的相当重要的结果, 而我们却说这种结果是偶然引起的。如果我们精确地知道自然界的规律和宇宙在初始时刻的情况, 那么我们就能够精确地预言同一个宇宙在以后时刻的情况。但是, 即使情况是自然界规律对我们来说已经不再有任何秘密, 我们依然只能近似地知道初始情况。如果能让我们以同样的近似预言以后的情况, 那么这就是我们所要求的全部东西, 并且我们可以说现象已被预言了, 它是由规律决定的。但是情况并不总是这样; 初始条件中的微小差别会在最后现象中产生非常大差别的情况也可能发生。前者的微小误差将在后者中产生巨大的误差。预言变为不可能, 而我们就有了偶然现象。

尽管 Poincaré 有惊人的洞察力, 但直到 60 年代初期, 确定性浑沌实际上仍然没有被考察过并且还是未知的。正如以后的讨论所揭示的, 这种长期停滞的原因是浑沌不能直接分析地处理。由 Poincaré 播下的种子, 只有在交互式计算的进展使实验数学变为现实时才发了芽。

3.1 Logistic 映射 这是非线性方程中出现的一个能成功地进行实验数学研究的不寻常的实例。它简单得可以向小学生讲明白或用袖珍计算机进行分析，但又巧妙得足以抓住很大一类真实世界现象的本质。可以论证，它是一个能表现出确定性混沌系统的最简单的模型，并且已被大量的杰出研究者，包括 Ulam, von Neumann, Kac, Metropolis, Stein, May 和 Feigenbaum 研究过（见《映射的迭代，奇怪吸引子和数论——Ulam 文集》）。正如我们将看到的，人才的这样集中，完全证实了这一简单的模型可以对大量的非线性现象提供极深入的了解。因此，它自然是我们开始定量研究确定性混沌的地方。

这个模型称为 logistic 映射，它是一个时间离散的耗散非线性动力学系统。变量 x_n 在时刻 n 的值映射到时刻 $n+1$ 的新值 x_{n+1} ，根据的是非线性函数

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad (14)$$

式中控制参数 r 满足 $0 < r \leq 4$ ，而粗略地说，相空间内 x_n 所允许的值是 $0 \leq x_n \leq 1$ 。映射可以随意迭代许多次，但我们特别感兴趣的是当时间（即迭代次数 n ）趋于无穷大时的行为。特别是，如果初始条件是在区间 $(0,1)$ 内随机地选取，并且迭代了许多次，则在所有暂态现象消失后，它的运动是什么？

这个非线性映射的行为极大地依赖于控制参数，并且在某些区域内对 r 的微小变化的响应表现出突然的急剧变化。这些突然的急剧变化，其学术上的术语称为分叉(bifurcations)，它们给我们以前的观察，即一个非线性系统参数的微小变化可能在运动中产生巨大的定性差别，提供了一个具体的例子。

对于 $0 < r < 1$ ， x_n 的值无论其初值是什么，当 n 趋于无穷大时都减小到零。换句话说，在暂态现象消失后，区间 $(0,1)$ 内所有的点都被吸引到 $x=0$ 处的固定点 x^* 上。这个固定点类似于图 2 中在 $(\theta=0, d\theta/dt=0)$ 处的固定点，但具有非常重要的差别：在 logistic 映射中固定点是一个吸引子 (attractor)，即映射的耗散性质使相空间“体积”退化到一个点。这种吸引子在 Hamilton 系统中是不可能的，因为它们的运动保持相空间体积守恒（见《Hamilton 混沌和统计力学》）。这种行为的数学提法则是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* = 0 \quad (15)$$

我们可以很容易通过考察在映射下离这个固定点的微小偏离如何变化来计算该点的（线性化）稳定性。在方程 (14) 中我们令 $x_n = x^* + \epsilon_n$ 和 $x_{n+1} = x^* + \epsilon_{n+1}$ ，并只考虑 ϵ_n 和 ϵ_{n+1} 中的线性项。最终的方程为

$$\epsilon_{n+1} = r(1 - 2x^*)\epsilon_n + O(\epsilon_n^2) \quad (16)$$

故对于 $x^* = 0$ ，只要 $r < 1$ ，则 ϵ_n 对所有的迭代都始终保持是小量。

最后这个说法表明当 r 通过 1 时，会发生某些有趣的现象，并且确实在 $1 < r < 3$ 时，我们发现有一个依赖于 r 的值是吸引的固定点。这个值很容易计算，因为在固定点处 $x_n = x_{n+1} = x^*$ 。把这个关系代入方程 (14)，我们得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*(r) = 1 - \frac{1}{r} \quad (17)$$

因此当 r 值从 1 移到 3 时，固定点 x^* 的值从 0 移到 $2/3$ 。注意上面给出的线性稳定性分析表明，这个与 r 有关的固定点对 $1 < r < 3$ 是稳定的，还要注意，尽管 $x^* = 0$ 在此区域内仍然是

一个固定点，但线性稳定性分析表明它是不稳定的。因此，点 $x=0$ 现在类似于图 2 中在 $\theta=\pi$, $d\theta/dt=0$ 处的不稳定固定点；稍微有一点扰动就会迫使解离开 $x=0$ 而移动到 $x^*(r)$ 处的稳定固定点。

在 $r=3$ 处会发生更有趣的分叉。突然，不是趋向单独一个固定点，而是长时间的解在两个值之间振荡：因此，模型有一个周期为 2 的吸引极限环 (attracting limit cycle)！这个极限环是单摆相平面内表现出封闭周期振动 (图 2) 的离散比拟，当然，它又具有如下的特性：logistic 映射极限环是一个吸引子。

尽管人们在这个阶段仍然可以继续分析下去，但比较容易的是参考实验数学仿真的结果 (图 5)。这种仿真描绘了 logistic 映射中作为 r 的函数的吸引集。这里我们清楚地看到在 $r=3$ 处分叉成周期为 2 的极限环。但更严格地说，当 r 移到 3.5 并超过它时，出现了周期 4 和周期 8 的极限环，接着是吸引集变得非常非常复杂的一个区域。logistic 映射的仔细分析表明，紧随周期 8 极限环的是周期 16, 32, 64 等极限环。过程一直延续到通过 2^n 的所有值，最终周期趋于无穷大。要注意的是，所有这些活动都出现在 r 小于值 $r_c \approx 3.57$ 的有限区域内。

超过 r_c ，许多 r 值 (不是所有值) 的吸引集无论如何也不表现出因果周期性。事实上，该吸引集是由永不重复它自身的一系列点 x_n 组成。对于这些 r 值，简单的 logistic 映射表现出确定性混沌，并且吸引集被称为奇怪吸引子 (strange attractor)。超过临界值 r_c ，logistic 映射就表现出向混沌的过渡。

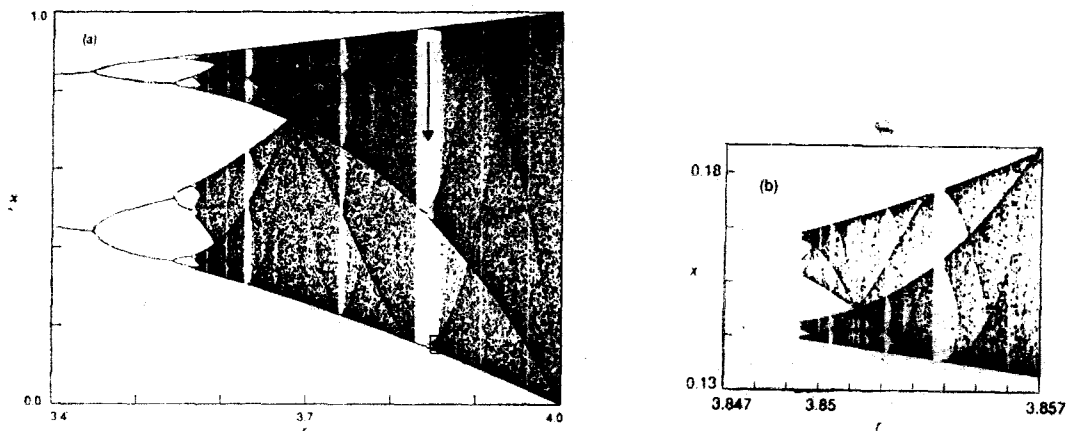


图 5 Logistic 映射 (a) logistic 映射 (正文中的方程 (14)) 的吸引集。它是对控制参数 r 的 1150 个值的每一个，用 300 个迭代函数值 (暂态现象消失后) 画成的。当控制参数 r 在 3.4 处 (左方边缘处) 时，映射有周期 2 的极限环。随着 r 的增加，这个极限环很快“分叉”成周期 4, 8, 16 等极限环，产生一个周期倍化的级联过程。在超过 $r_c \approx 3.57$ 后，映射表现出确定性混沌，其中散布着恢复周期运动的缝隙。例如，在向右边的三个较大的缝隙中可以看出周期 6, 5 和 3 的极限环。(b) 一个放大的区域 (a) 中的小矩形所示处，它描绘了较小尺度上出现的自相似结构。(Los Alamos 国家实验室 Roger Eckhardt 惠允图形)

尽管这种复杂的非周期行为显然促使人们称之为“混沌”，但是它是否也有敏感地依赖于初始条件的关键特性？我们认为这个特性对掷钱币那样随机的长期行为是必要的。为了研究此问题，我们必须观察初始相邻的两个点是如何随着映射的迭代而分开的。技术上，这可以通过计算 Lyapunov 指数 λ 来做到。 λ 大于 0 的值表明相邻的初始点是指数式地分开 (其

速率由 λ 确定)。如果我们把 Lyapunov 指数画成控制参数的函数 (图 6), 则我们将看到混沌区域的确有 $\lambda > 0$, 并且在图 5 中超过 r_c 所存在的周期窗口相应于 $\lambda < 0$ 的区域。用一个简单的二次非线性映射能产生如此复杂的周期运动和混沌运动交织在一起的区域, 这确实是非常惊人的。

由于超过 r_c 后吸引集的复杂性, 所以一点也不奇怪的是, 象混沌动力学中典型问题那样, 这个模型不能直接采用分析方法。但是, 有一个巧妙的分析结果——它使 Ulam 和 von Neumann 发现的东西在此更加密切相关——进一步作为例子说明了敏感依赖性表示出确定性混沌的特征。

对于特殊值 $r = 4$, 如果我们令 $x_n = \sin^2 \theta_n$, 则 logistic 映射可改写为

$$\sin^2 \theta_{n+1} = 4 \sin^2 \theta_n \cos^2 \theta_n = (2 \sin \theta_n \cos \theta_n)^2 = (\sin 2\theta_n)^2 \quad (18)$$

因此, 映射简单地是倍角正弦函数公式的平方, 并且我们看出, 解是 $\theta_{n+1} = 2\theta_n$ 。用初值 θ_0 表示, 这给出

$$\theta_n = 2^n \theta_0 \quad (19)$$

这个解表明, 首先对初始条件有非常敏感的依赖性; 其次, 与相邻的初始条件按指数方式非常迅速地分离。例如, 把 θ_n 写成有限个数字的二进制数——正如在任何数字计算机中所作的那样——我们发现, 映射相当于一个简单的移位运算。当这个过程在一个真实的计算机上进行时, 在每次运算以后舍入误差以无用信息 (garbage) 代替最右边的字位, 每次作映射迭代后就损失掉一个字位 (bit) 的信息量。如果初始条件已知有 48 个字位的精度, 则在映射迭代 48 次以后, 将不再留下初始条件的任何信息量。换句话说, 尽管 logistic 映射有完全确定的性质, 但与相邻初始条件的指数方式的分离意味着有关运动的所有长期信息量都在初始状态中得到编码, 而在动力学中则没有得到编码 (除去非常短的时间外)。

从这个简单的例子中我们还知道更多的东西。在非线性系统中有明显兴趣的一个问题是使这类系统从规则转向混沌运动的机理。在 logistic 映射中, 我们已经见到, 这种情况是通过分叉的**周期倍化级联** (period-doubling cascade), 即通过周期以 2^n 的形式增加的逐级极限环而发生的。在对非线性科学的一个经典贡献中, Mitchell Feigenbaum 分析了这种级联的发生方式。在他的首批结果中, 他观察到发生分叉的参数值 r 是几何上收敛的: 即利用

$$\delta_n \equiv (r_n - r_{n-1}) / (r_{n+1} - r_n) \quad (20)$$

定义的 δ_n , 发现

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \equiv \delta = 4.669 \dots \quad (21)$$

更重要的是, Feigenbaum 能证明 δ 与 logistic 映射的细节无关——函数只需有一个“通有的 (generic)”极大值, 即有一个非零二阶导数的极大值——并因而 δ 应对所有通有的映射是**普适的** (universal)。而且, 他能令人信服地论证, 一旦在一个耗散动力学系统中发现有

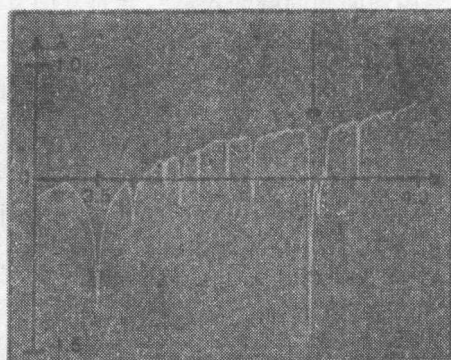


图 6 Lyapunov 指数。该指数的正值 ($\lambda > 0$) 表明相邻初始点指数式地分开, 而负值 ($\lambda < 0$) 表明周期或准周期运动, 这里对 logistic 映射 (图 5) 的 Lyapunov 指数画成是控制参数 r 的函数, 并且可以看出图 5 的周期窗口相应于 $\lambda < 0$ 的区域。(联邦德国 Stuttgart 大学 Gottfried Mayer-Kress 和 Hermann Haken 惠允图形)

分叉的周期倍化级联，那就应该发现，普适数 δ ，以及其他几个普适量，都与系统的相空间维数无关。

这个预言在由 Albert Libchaber 和 J. Maurer 对低温液氮中对流进行的实验中得到了令人瞩目的证实。他们观察到的周期倍化级联以及依次提取的 δ 与其他普适参数，对非线性系统中的普适行为提供了给人深刻印象的证明。最近，在非线性和半导体器件中以及在阻尼、驱动单摆的数值仿真中已得到了类似的证明。而且，现在已严格地知道，对于耗散系统，在 logistic 映射中的周期倍化过渡到混沌的普适行为，即使在相空间维数变为无穷大时仍能出现。

重要的是要强调，周期倍化级联决不是耗散非线性系统中从规则运动转向混沌的唯一方式（例如，见 103—104 页¹⁾ 的锯齿状梯形映射的讨论）。已经证实有很多其他的途径例如准周期的和间歇的途径，并对其中某些途径建立了普适理论。但是，所有这些进展，其概念上的先导仍然是简单的 logistic 映射。

最后，图 5b 描绘了方程 (14) 的吸引集的一个附加的明显特性：即在放大尺度下它含有非平凡结构，而事实上是自相似结构。实际上，在数学模型中，这种自相似结构出现在所有较小的尺度上；结果，图 5b 是一类称为分形 (fractals) 的无限多分枝的复杂几何物体的一个例子。我们在本文后面将再回到这点上来。

3.2 阻尼、驱动单摆 我们以从 logistic 映射得到的定量见识为武器，就可以对付更常见的动力学系统中的确定性混沌。我们实际上是从一个非常熟悉的例子开始：受驱动和阻尼的平面单摆。现在我们可以把我们前面的断言更精确化，即这个简单的系统可以表现出似乎随机、不可预测和混沌形式的行为（见“简单的但却是非线性的摆”）。

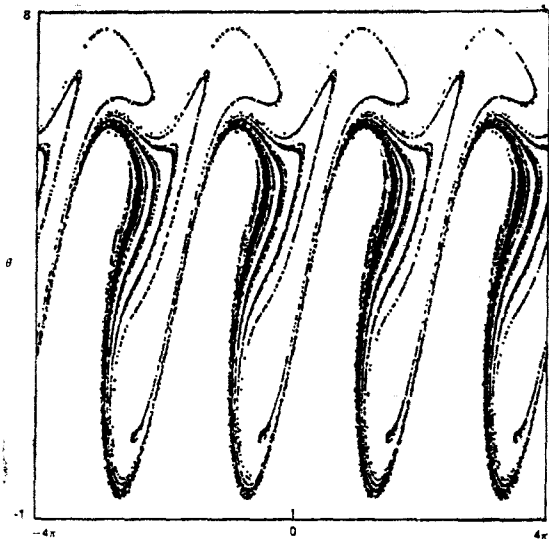


图7 阻尼、驱动单摆：一个奇怪吸引子。一个阻尼且周期驱动单摆的运动（正文中方程 (4)）对某些参数值是混沌的，它的吸引集是一个“奇怪吸引子”。把单摆的位置 θ 和速度 $\dot{\theta}$ 按驱动力的每个循环取一次来画图（如此处示出的 $\alpha=0.3$ ， $\Gamma=4.5$ 和 $\Omega=0.6$ ，以 $g/l=4$ 为单位），可得到这种运动的一个印象。图象在 θ 的较高和较低值之间重复的事实，是单摆在它的悬挂点顶部摆动的结果。（California 大学 Berkeley 分校 James Crutchfield 惠允图片）

阻尼、驱动单摆的运动是用上述方程 (4) 描述的。除了适用于单摆外，方程 (4) 也描述了所谓 Josephson 隧道结的电子器件，其中两种超导材料被一个薄的非导体氧化层隔开。这种结现在的实际应用有高精度的磁强计和电压标准仪。这种 Josephson 结能迅速开关（几十微微秒），并能以极低的耗散（低于几微瓦）从一个载流状况变到另一个状况。这种能力可以用在微电路技术上，例如用于超级计算机，后者比以普通半导体为基础的计算机效能更高。因此，一个 Josephson 结对外部动力（方程 (4) 中 $\Gamma \cos \Omega t$ 项）的动力学响应的性质，是技术研究和基础研究都有兴趣的问题。

* 指 *Los Alamos Science*, No. 15 (Special Issue) (1987) 的 103—104 页。——译者

因为在混沌区域内分析技术的使用很有限，所以我们用数值仿真的图形结果来证明方程（4）中混沌的存在。图7描绘了在包括驱动力和阻尼力时，单摆的相平面（图2）如何被改变，特别是示出了包含固定点和极限环的简单结构是如何很显著地改变了。

首先我们注意到，因为方程（4）中有外部的时间依赖性，所以系统实际上包含三个一阶微分方程。在一个通常的动力学系统中每个自由度产生两个一阶方程，因此我们说这个系统相应于1.5个自由度。为了看清这一点，我们引进一个变量 $z = \Omega t$ ，记住角动量 $p_\theta = ml^2 \frac{d\theta}{dt}$ ，把方程（4）改写成

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{ml^2} p_\theta, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = -\alpha p_\theta - mgl \sin\theta + ml^2 \Gamma \cos z, \quad \frac{dz}{dt} = \Omega \quad (22)$$

它表明系统如何依赖于三个广义坐标 θ ， p_θ 和 z ，进一步注意到，阻尼的存在暗示系统不再是 Hamilton 系统而是耗散系统，因此可以具有吸引子。

阻尼、驱动单摆的分析清楚地说明了混沌的两个分离但有关的方面：第一是存在一个奇怪吸引子，第二是出现几个不同吸引集以及由此产生渐近运动对精确初始条件的极端敏感性。

图7表明方程（22）对参数 $\alpha = 0.3$ ， $\Gamma = 4.5$ 和 $\Omega = 0.6$ （以 $g/l = 4$ 为单位）的一个吸引子。正如 logistic 映射的情况那样，只表示出了吸引集，不包括暂态。为了得到只表示相平面变量 θ 和 $\dot{\theta}$ 的图7，我们在驱动力的每一循环中取一次运动的“频闪快照”。图中示出的复杂吸引集实际上是一个奇怪吸引子，它描述了一个永不重复的非周期的运动，其中单摆振动并飞越它的悬挂点（因此在角度的 2π 倍数上重复取象），是以一种不规则和混沌的方式进行的。对初始条件的敏感依赖性意味着在吸引子上的相邻点随时间指数地分离，并渐近地按完全不同的途径进行。图7的小范围的放大表明内在结构在所有尺度上的连续性。象 logistic 映射的吸引集一样，这个奇怪吸引子是一个分形。

为了显示这个吸引子上的运动，回想一下最近非常流行的客厅有趣磁性玩具的行为可能是有益的。这个器件的数学模型与阻尼、驱动单摆方程密切相关。它首先以一种方式旋转，

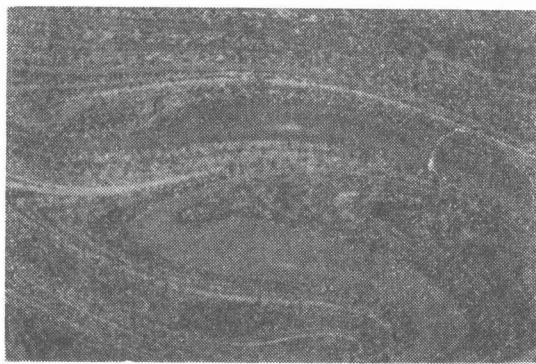


图8 阻尼、驱动单摆：周期极限环吸引子。在阻尼、驱动单摆的相图的这个变种中，如果从 $t=0$ 的平面中某点出发的解被吸引到顺时针转动，则把该点画成蓝色点，而红色点代表吸引到反时针转动，以及绿-白色点代表吸引到没有转动的任何振动极限环。只示出了相平面的一部分，用来表示这些极限环吸引子的条件是 $\alpha=0.1$ ， $\Gamma=7/4$ ， $\Omega=1$ （以 $g/l=1$ 为单位）。尽管极限环是非混沌运动，但根据充分混合的红、蓝色区域的存在对初始条件的敏感依赖性仍然非常明显。而且，黑色区域表示极限轨道是奇怪吸引子的初始条件。

(Maryland 大学 Celso Grebogi, Edward Ott, James Yorke 和 Frank Varosi 惠允图片)

然后又以另一种方式旋转。开始人们似乎能猜测它的行为。但正当人们预期它向右旋转 3 次然后向左旋转时，它却是向右旋转 4 次，5 次甚至 6 次。向右和向左旋转的次数是不可预测的，因为系统经历的是一个奇怪吸引子的非周期运动特征。

图 8 描绘的要点是图 7 的奇怪吸引子不是方程 (22) 存在的唯一吸引子。特别是，对于 $\alpha = 0.1$, $\Gamma = 7/4$, 和 $\Omega = 1$ (现在的单位是 $g/l = 1$)，系统被吸引到顺时针和反时针运动的周期极限环。图 8 是用我们熟悉的相平面图的另一变种来示出的，其中彩色记号用来表明平面上所有点的长期行为。更精确地说，这张图是每个初态 $(\theta, \dot{\theta})$ 到相应于一个吸引子的“终态”的映射。如果从 $t = 0$ 的那点出发的解渐近地被吸引到单摆的顺时针转动的极限环，则该点在平面上画蓝色点。类似地，解渐近地趋向于反时针转动的初始点则画成红色点。

在图 8 中我们观察到所有红色点的大区域，因此它们的初始条件导致反时针转动。类似地，也有导致顺时针转动的大的蓝色区域。但是，在它们之间有初始条件细微变化导致最终达到的极限环交错的区域。事实上，如果你把这些区域放大，你将甚至在可能的最精细程度上进一步看到红色和蓝色的交错。换句话说，在这些区域内，单摆的最终状态（顺时针或反时针运动）是严格初始点的非常敏感的函数。

这里有一个重要的情况需要说明。对于红色和蓝色的区域，单摆的渐近状态并不对应于浑沌运动，并且两个吸引集不是奇怪吸引子，而是顺时针和反时针的转动，它们也是自由单摆所允许的运动（图 2）。由红色和蓝色区域交织所反映的浑沌，是终态对初态的微小变化有非常大的敏感性。因此，在红点和蓝点交织的斑点区域中，因为对初始条件不完全知道，所以预测终态是绝对不可能的。

除了红点和蓝点占优的区域外，图 8 还示出了带绿白色和黑色的较小区域。这些区域对应于其他的吸引极限点集，绿白区域表示振动极限环（没有转动），而黑色区域表示最终趋向于奇怪吸引子的点。

从图 8 的例子我们学到重要的一课：一个非线性耗散系统可以包含许多不同的吸引子，每一个都有它自己的吸引盆 (basin of attraction)，或渐近地吸引到它的初始条件区域。确定性浑沌的另一个更奇妙的结论是，这些吸引盆之间的边界本身可以是极其复杂且实际上是分形的。分形盆边界意味着从几乎完全相同的初始构形可以导致定性上不同的长期行为。

3.3 Lorenz 吸引子 在 logistic 映射和阻尼、驱动单摆这两种情况中，我们已经指出，奇怪吸引子是与耗散的确定性浑沌的存在密切有关的。这些奇特的吸引点集反映了系统的运动，尽管它们出现在相空间的一个有界区域内，但却是非周期的（因而永不重复），并且在吸引子上相邻初始点出发的运动随时间而指数式地分离。而且，从几何物体的观点来看，这些吸引子具有无穷多层薄片的形式并表现出所有尺度上的交错结构。

为了更清楚地了解这种公认的奇怪物体和它们描述的动力学运动，我们转向另一个简单的非线性动力学模型。已知为 Lorenz 方程的这个模型，是 60 年代初由气象学家 Edward Lorenz 提出的。他坚信气象预报的不可预测性不是由于任何外部噪声或随机性引起，而是事实上与完全确定性的描述不矛盾的。在这种意义下，Lorenz 试图使 Poincaré 的定性认识精确化。Poincaré 在另一篇有先见之明的评论中观察到（所有较引人注意的评论是在我们前面从《科学和方法》中引证的那些话的紧接下一段里）：

为什么气象学家用任何确定方式预报气候如此之困难？……我们看到，在不稳定平衡的

大气范围中一般要产生很大的扰动。气象学家看得很清楚，平衡是不稳定的，一个气旋会在某地形成，但精确地讲出它们在哪里还说不清楚；例如在任何给定点的1/10度左右，气旋将在这里而不在那里突然产生，以及灾害延伸多大的范围以免受到其伤害。……这里，我们又发现对观察者是微不足道的非常微小的原因和有时是可怕灾难的相当重要的结果之间有同样重大的差别。

为了证实这种敏感的依赖性，Lorenz开始用一个简化的模型来近似大气中的流体对流。把这个模型用（空间）Fourier 模展开并把展式截断到三个最低的模，然后明确地忽略与高阶模的耦合，Lorenz 得到了三个一阶非线性常微分方程的封闭方程组

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \quad \dot{y} = -xz + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz \quad (23)$$

在大气对流的应用中， x 是对流翻转率（rate of convective overturning）的度量， y 和 z 分别是水平和铅直温度变化的度量， σ 是 Prandtl 数， r 是 Rayleigh 数， $b(\neq 1)$ 反映了水平和铅直温度结构一般不以同一速率阻尼的事实。

正如阻尼、驱动单摆的情况那样，此模型描述了 1.5 个自由度的系统，因为它包含三个一阶方程。一组参数 ($\sigma=10$, $r=28$ 和 $b=8/3$) 给出了著名的 Lorenz 吸引子，对于这种吸引子，在 (x, y, z) 空间内吸引点集的透视图 (图 9) 显示出两片“叶片” (图 9a) 和第三个方向上的一个厚度 (图 9b)，这表明点集不是平面的。

正如在一个周期轨道上的任何初始点最终将经过整个轨道那样，这里在这个奇怪吸引子上的任何初始点随时间推移所经过的路线，最终也将经过整个结构。但是，这里相邻的初始点将指数式地分散，这反映了对初始条件的敏感依赖性。Lorenz 吸引子的双叶结构表明了强调这个敏感性的一种特别有用的比拟。选择两个相邻的初始点并随时间跟踪它们的演变。把绕右叶片的每圈称为“头”并把绕左叶片的每圈称为“尾”。这时对应于两个点的头和尾的渐近序列将完全不同且互相完全无关。当然，初始点越邻近，它们的运动保持相似就越久。但对于任何初始分离，将有一个有限长的时间，超过这个时间之后，运动就显得完全不同了。

Lorenz 在他的原始研究中观察到这种出乎意外的敏感依赖性，但和实验数学中的研究完全一致。他自己的话 (取自他的《大范围分析》(Global Analysis) 文章的第 55 页) 对观察提供了一个生动的说明：

在我们的计算过程中，我们决定比较详细地考察一个解。我们选取由计算机打印出的某些中间条件，并把它们作为初始条件打印进去。在回到计算机后 1 小时，用它仿真两个月的“气候”，我们发现它与以前的解完全不符合。开始我们猜想机器出了毛病，这是很普通的事情。但我们很快认识到，两个解不是出自同样的条件。内部计算进行到大约 6 个十进位小

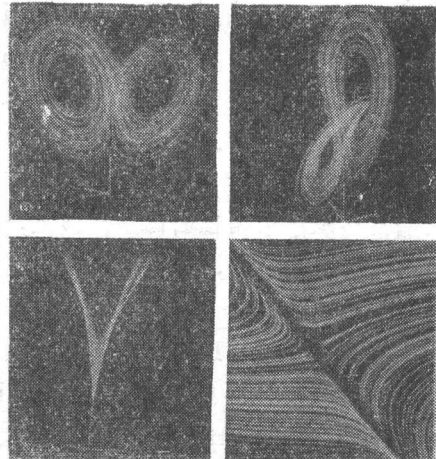


图 9 Lorenz 吸引子。把一条轨道的 10000 个时间步长连成一条光滑曲线的 Lorenz 吸引子的吸引集 (正文中的方程 (23), $\sigma=10$, $r=28$ 和 $b=8/3$)，把前 5000 个点画成蓝色，而把后 5000 个点画成绿色。(a)–(c) 这些透视图揭示了吸引子的双叶、非平面形状和厚度。红线表示坐标轴的方向。(d) Lorenz 轨道交织情况的特写，它永不和自己相交也不重复，即使对无穷时间的点的序列也这样。吸引子具有 2.04 的分维，它在一个面积和一个体积的维数之间。(Los Alamos 国家实验室 Gottfried Mayer Kress 惠允图片)

数,但打印的输出只包含3个,因此新的初始条件是老的条件加上小扰动组成的。这些扰动以准指数形式放大,在大约仿真4天中加了1倍,因此在两个月后解就成为不同的形式了。

注意到小的初始扰动的倍化周期直接对应于 logistic 映射在 $r=4$ 时的二进制移位。我们又看到了有关初始状态的信息量的指数型损失,它导致完全不同的长期行为。

现在让我们集中于表示 Lorenz 方程的奇怪吸引子的几何图形。事实上,图9是通过点出10000个时间步长(暂态消失后)上的坐标 $x(t), y(t), z(t)$ 并用光滑曲线依次把它们连上后画出的。前5000个点画成蓝色,后5000个点画成绿色。图上明显的白色部分实际上是蓝色和绿色线靠近得使照象器材无法把它们区分开。

注意蓝色和绿色线是如何在整个奇怪吸引子上交织在一起,并在图9d中这种交织是如何继续出现在更精细的尺度上的。事实上,如果画出由点 $(x(t), y(t), z(t))$ 的无穷多个时间序列产生的整个吸引子,则我们将会看到轨线永远在绕圈,它本身从不相交并因而永不重复。这种非常精细的结构在所有尺度上都存在,甚至在无穷长时间极限下,吸引子也不会 (x, y, z) 空间内形成一个实心的体积。在我们将很快使之精确化的意义下,吸引子是维数在一个面积(维数=2)和一个体积(维数=3)之间的一种分形物体。的确,Lorenz 吸引子具有约为2.04的分维(fractal dimension)。

Hamilton 浑沌和统计力学

在正文中讨论的浑沌系统的特殊例子——logistic 映射,阻尼、驱动单摆,Lorenz 方程——都是耗散的。重要的是要认识到,非耗散的 Hamilton 系统也能表现出浑沌;确实,Poincaré 在他研究的少体(few-body) Hamilton 问题的文章中,作了有先见之明的有关对初始条件敏感依赖性的陈述。这里,我们简要考察一下 Hamilton 浑沌的很多细节以及作为它的重要性的说明,讨论它如何与统计力学基础中长期存在的问题密切相关。

我们引进 Hamilton 浑沌是选择它的一个最简单的具体体现,即称为**标准映射**的一个二维离散模型。因为这个映射保持相空间体积不变(实际上是**面积**不变,因为它只有二维),它的确对应于一个离散形式的 Hamilton 系统。象耗散系统的离散 logistic 映射那样,这个映射代表了 Hamilton 浑沌的原型。

定义标准映射的方程是

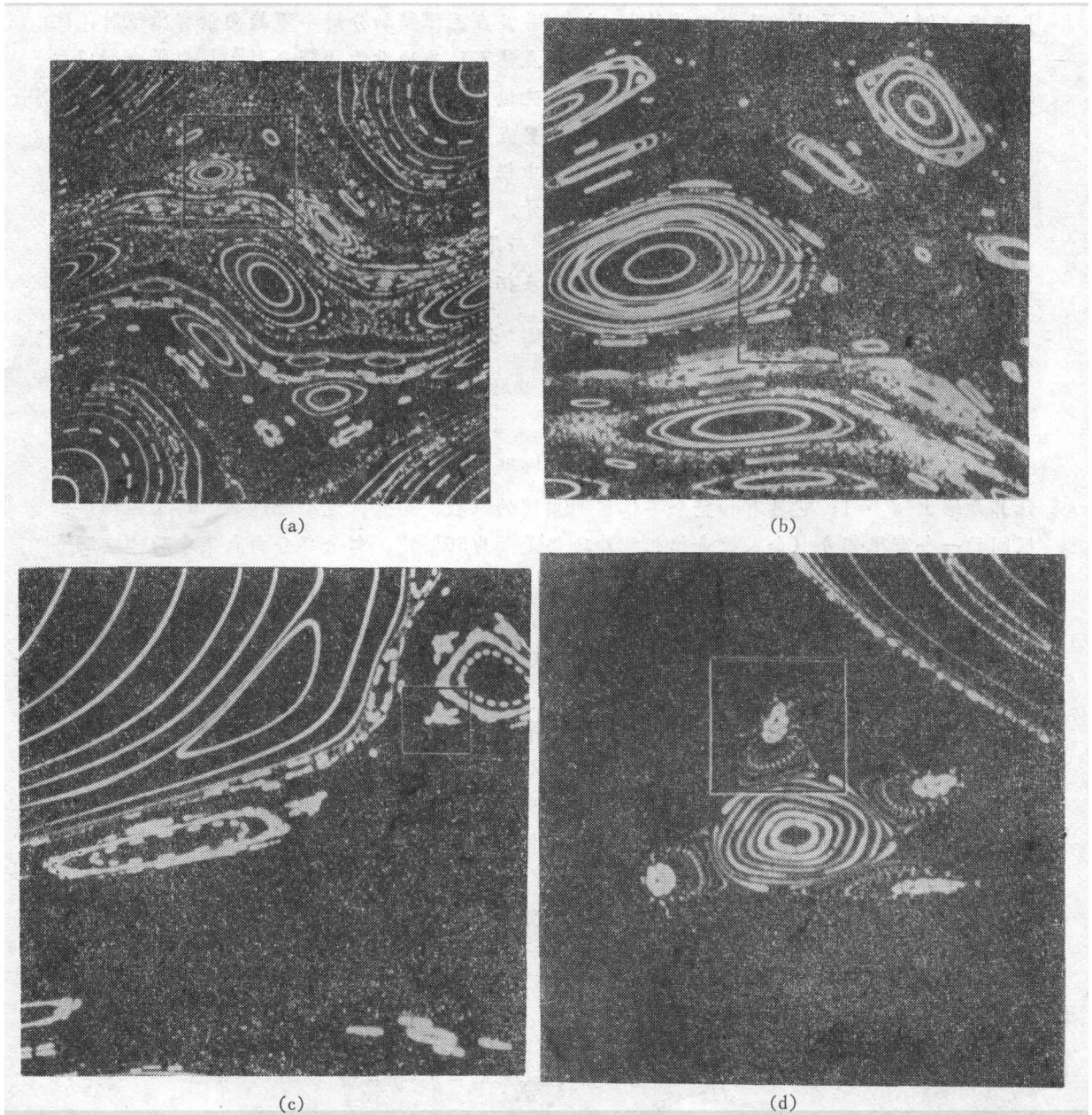
$$p_{n+1} = p_n - (k/2\pi) \sin(2\pi q_n), \quad q_{n+1} = p_{n+1} + q_n \quad \textcircled{1}$$

这里,正如记号所表示的, p_n 是动量的离散比拟, q_n 是坐标的比拟,离散指数 n 起着时间的作用。只保留 p_n 和 q_n 的小数部分;因此运动在一个环面上,对 p 和 q 都是周期的。对任何 k 值,映射在 (p, q) 平面内保持面积不变,因为 Jacobi 式 $\partial(p_{n+1}, q_{n+1})/\partial(p_n, q_n) = 1$ 。

Hamilton 系统相空间体积守恒有非常重要的结论:它不能有任何**吸引子**,即没有渐近地约束运动的任何较低相空间维数的子区域。任何一个初始点 (p_0, q_0) 将位于某个特殊轨道上,并且所有可能的初始点——即单位正方形本身——的**象**也是一个单位正方形。与此相反,**耗散**系统具有收缩的相空间体积。例如,logistic 映射(正文中图5)在 $\lambda = 3.1$ 时把区间 $(0, 1)$ 上所有的初始点都吸引到仅仅两个点上。

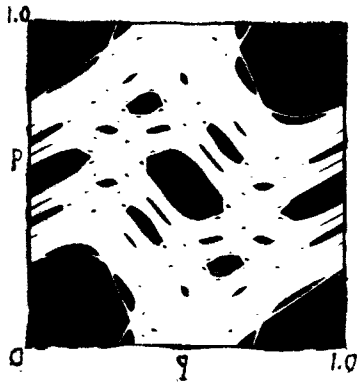
显然, $k=0$ 时标准映射是平凡可积的,它有 $p_n = p_0$ 是常数,且如自由运动应该有的那样, q_n 随时间 (n) 线性地增大。因此轨道是沿 q 方向绕环面缠卷的直线。 $k=1.1$ 时映射产生图 $\textcircled{1}$ a—d 中示出的轨道。这组图的最直接引人注目的性质是在所有尺度上存在着非平凡

的结构。因此，象耗散系统那样，Hamilton 混沌产生奇怪分形点集（虽然是如下面讨论的“胖”分形）。在所有尺度上都可观察到“岛屿”，它们类似于单摆相平面中周期轨道的这种离散情况（正文中图 2）。但是，除此以外，也是在所有尺度上，由各单个混沌轨道给出的一大群点代表了非周期运动，并最终充满相空间内的一个有限区域。在这些混沌区域内，运动“敏感地依赖于初始条件”。



图① 标准映射。这里表示的是用不同颜色区分不同轨道的标准映射（方程①中 $k=1.1$ 时）的离散轨道。(a) 图从整个相空间出发，表示了不断放大的相空间的区域。(a) 中的白盒子是放大成 (b) 的区域，余此类推。非平凡的结构，包括“岛屿”和表示混沌非周期运动的一大群点，在所有尺度上都是明显的。（Los Alamos 国家实验室 James Kadtke 和 David Umberger 惠允图片）

图②表示整个相空间内经过1亿次迭代的**单个**混沌轨道图(也是对于 $k=1.1$ 的)。这个物体与耗散系统中看到的奇怪点集不同,后者只占据整个相空间的一个**有限**部分:特别是,所示出的轨道占表示映射的整个相空间单位面积的56%。因此,轨道的“维数”和整个相空间的维数相同,并由标准方法算得的分维给出 $d_f=2$ 。但是,轨道与通常的面积的区别是它在所有尺度上包含有一些孔洞。作为一个结论,轨道所占据面积的测量值依赖于度量这个面积的分辨率(例如,盒子计数法中盒子的大小),并且在无限精细分辨率下趋向于有限值时,这种趋向过程具有确定的标度性质。因此,这个点集可适当地称为“胖分形”。为了我们以后的讨论,重要的是要注意空洞(代表周期非混沌运动)也占据相空间的一个有限部分。



为了更直观地了解“胖分形”,注意用一个稍微修改了正文中描述的Cantor集方法,可以构造一个非常简单的例子。在每一级尺度上,不是去掉每个区间的中间的1/3,而是在第 n 级上去掉中间的 $(1/3)^n$ 。尽管最终的点集在拓扑上和原来的Cantor集相同,它的维数

图②“胖”分形。在 $k=1.1$ 时标准映射的单个混沌轨道。通过把能量面分成 512×512 个网格并把初始条件迭代 10^8 次而得到图形。由此轨道到达过的方块用黑色表示,相空间中的缝隙代表混沌轨道不能利用的能量表面部分,这是因为如图①中见到的,各种准周期轨道是限于在环面上。(Los Alamos 国家实验室 J. Doayne Farmer 和 David Unberger 惠允图片)

计算却给出 $d_f=1$;它具有和整个单位区间相同的维数。而且,这个胖Cantor集占据单位区间的一个有限部分(令人惊奇但也意外地仍是约为56%),剩余部分由点集中的“空洞”占据。

在由微分方程描述的更普通的Hamilton系统中,混沌存在到什么程度呢?完整回答这个问题要求数学物理学家对80多年的研究作高度专门的总结。因此,我们将不得不满足于最好能抓住这些研究的特殊风味的肤浅概论。

开始,我们注意到完全可积系统可以**永远不会**显示出与自由度数 N 无关的混沌。在这类系统中,所有有界运动是准周期的,并出现在超环面上,它具有 N 个(可能都互不相同)由守恒律的值决定的频率。因此,不可能有任何非周期运动。而且,因为所有 $N=1$ 的Hamilton系统是**完全可积的**,所以1自由度的问题不可能出现混沌。

对于 $N=2$,**不可积**系统可以显示出混沌;但是,要确定哪些系统能出现混沌则是非平凡的;一般来说,这是指一个给定的系统是否可积并不明显。例如,考虑两个非常相似的非线性Hamilton系统,它们的运动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x - 2xy, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -y + y^2 - x^2 \quad (2)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x - 2xy, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -y - y^2 - x^2 \quad (3)$$

方程②描述了著名的Henon-Heiles系统,它是不可积的,并已成为一个显示混沌的,与(天体)物理有关的简单Hamilton系统的经典例子。另一方面,方程③可分成两个独立的 $N=1$ 的系统(通过把变量变换成 $\zeta = x - y$ 和 $\eta = x + y$)并因此是完全可积的。

尽管存在显式计算方法来检验可积性,但这些方法应用到大 N 情况仍是高度专门的且一般是困难的。幸好,有两个定理提供了一般的指导。首先, Siegel 的定理考虑了对其变量解析的 Hamilton 函数空间;不可积 Hamilton 函数在此空间内稠密,而可积 Hamilton 函数不稠密。其次, Nekhoroshev 的定理导致所有不可积系统具有包含混沌区域的相空间的事实。

我们对标准映射的观察立即提出一个实质性问题:混沌区域的范围是什么?在某些情况下,它们能覆盖整个相空间吗?回答这个问题的最好方法是寻找非混沌区域。例如,考虑一个完全可积的 N 自由度 Hamilton 系统受到一个通有的不可积扰动的干扰。著名的 KAM (Kolmogorov, Arnold 和 Moser) 定理表明,对于这种情况,在相空间内有一些有限测度的区域保留了与可积系统超环面上运动一致的光滑性。这些区域是标准映射中“空洞”的比拟。因此,对于一个典型的 N 自由度 Hamilton 系统,混沌区域并不充满整个相空间:一个有限部分被“不变 KAM 环面”所占据。

因此,从概念上 KAM 定理解释了非混沌行为和递归性,它们曾那样地困扰过 Fermi, Pasta 和 Ulam (见“Fermi, Pasta 和 Ulam 问题:从《非线性问题的研究》中摘抄”)。尽管 FPU 链具有很多(64)非线性耦合的自由度,但它与一个可积系统如此接近(对于所研究的参数范围),以致不变的 KAM 环面和最终的遍历性质决定了测量时间上的行为。

在 Hamilton 系统中,对混沌还有另一级的微妙性:即相空间的结构。对于不可积系统,在每个规则的 KAM 区域内有一些混沌区域。反过来,在这些混沌区域内又有一些规则区域,余此类推。对于所有 $N > 3$ 的不可积系统,一条轨道可以(尽管在很长的时间尺度上)通过一种称为“Arnold 扩散”的过程在各个混沌区域之间运动。因此,一般说来,相空间由一种 Arnold 网所充满,这种网在所有尺度上把混沌区域联结在一起。

直观上,这种与 Hamilton 混沌有关的观察有力地暗示了与统计力学有联系。正如图①所描绘的,在 Hamilton 系统中混沌轨道形成非常复杂的“Cantor 尘”,它们是在相空间体积内游荡的永不重复的非周期的运动,表面上只受到总能量守恒的约束。除此以外,在这些区域内敏感依赖性意味着有关初始条件的信息迅速损失掉,并因此意味着运动的有效不可逆性。显然,这种游荡运动和有效不可逆性对下面的统计力学基本问题提供了一个可能的方法:如何能从可逆的 Hamilton 微观动力学推导出统计力学中假定的遍历的不可逆热平衡恒所允动?

历史上,联系动力学和统计力学的基本假定是遍历性假设,它断言在实际动力学运动上的时间平均等于在许多不同但等价的系统上的系综平均。粗略地说,这个假设假定由能量守恒所允许的所有相空间区域,几乎被所有的动力学运动以同样的机会到达。

对现实的 Hamilton 系统,我们有什么证据能证明遍历性假设实际上成立?对于有限自由度的系统, KAM 定理证明除了相空间的混沌区域以外,还有有限测度的非混沌区域。这些不变环面意味着遍历性对大多数有限维 Hamilton 系统不成立。重要的是, KAM 定理不适用的少数 Hamilton 系统,以及我们能证明遍历性和趋向于热平衡的少数 Hamilton 系统,都包含有“硬球”,结果包含了物理学家认为是不现实的非解析相互作用。

多年来,大多数研究者相信在热力学极限下,即在自由度数(N)和能量(E)趋于无穷大而使 E/N 保持为一个非零常数的极限下,这些细微区别变得无所谓了。例如,不变环面的 KAM 区域可以在此极限下趋于零测度。但是,最近的证据表明,对这种信念的非平凡反

例可以存在。在我们对 Hamilton 混沌的分析了解的争论日益增加和数值上仿真大 N 系统的能力日益增大的情况下，能确立（或反驳！）这种信念的定量研究的时机看来已成熟。（对于此课题的补充讨论，见《遍历性假设：一个复杂的数学和物理问题》。）

在大量物理上现实的模型中应该提到的特殊课题有：

①由 KAM 环面占据的相空间的测度如何依赖于 N ？是否有这种测度趋于 0 的具有现实相互作用的一类模型？是否有 KAM 区域保持有限测度的不可积模型？如果有，产生这种行为特征的是什么？

②在很宽的一类模型中 Arnold 扩散率如何依赖于 N ？当 N 趋于无穷大时相空间中的重要性质（如 Arnold 网）的结构是什么？

③如果趋于平衡，这种趋势的时间尺度如何依赖于 N ？它比宇宙的年龄小吗？

④对于大多数我们认为与统计力学有关的特性，遍历性是必要的（或只是充分的）吗？能否表达出一个与解析 Hamilton 系统中观察到的行为一致的不太紧迫的要求？

显然，这些课题只是非线性科学家现在面临的最具挑战性的，最深奥的几个问题。

3.4 分形 分形这个术语是 Benoit Mandelbrot 于 1975 年为描述所有尺度上复杂结构的不规则、碎裂形状而创造的。分形进入科学研究的主流，是它已经清楚了以前看成“怪物陈列馆”的那些看来奇特的几何物体，常常在自然界的很多领域内出现，特别是作为混沌动力学系统的吸引集出现。事实上，Mandelbrot 追溯了 19 世纪末和 20 世纪初大量杰出的数学家，包括 Cantor, Hausdorff, Julia 有关分形的很多基本概念。但是，正如确定性混沌的情况那样，这些概念只有在实验数学精确地显示了那些怪物之后才有可能开花结果。

分形的基本性质是在所有尺度上都存在着相似的非平凡结构，因此各个小的细节都是整个物体的缩小。学术上，这种性质称为**标度**，它导出一种理论方法使物体的各个细小细节的结构可从粗大的一般特性得到。结构无需在所有尺度上精确地自相似。确实，很多现代研究工作集中于**自仿射**分形方面，其中不同尺度上的结构都通过线性变换联系起来。

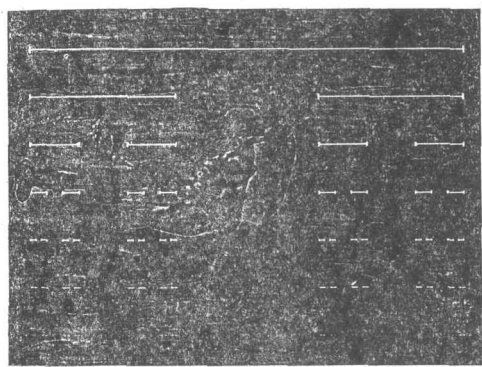


图10 Cantor 集。形成 Cantor 集的办法如下：开始用一单位长度的线段，去掉它中间的 $1/3$ ，并在以后每一级上去掉剩下线段的中间的 $1/3$ 。尽管剩余线段的长度随迭代次数（或级数）趋于无穷大而趋于零，点集却有大于零的分维，即 $\ln 2 / \ln 3 \approx 0.6309$ 。（Los Alamos 国家实验室 Roger Eckhardt 惠允图片）

这种尺度不变性的一个结论是分形物体一般具有非整数维的**分数维**（fractional dimension）：即分形不是线段、面积或体积，而是“介于这些线段、面积或体积之间的某种东西”。为了定量地了解这一点，我们回想起递推确定的 Cantor 集的例子（图 10）。在第零级，点集由一条从 0 到 1 的连续线段组成。在第一级，去掉中间的 $1/3$ 线段。在第二级，去掉剩下两条连续线段中每条的中间的 $1/3$ 。在第三级，去掉这四条线段中每条的中间的 $1/3$ ，余此类推，直至无穷。在每一级，Cantor 集变得越来越稀疏，因此最终的产物实际上是点和线之间的某种东西。在图 10 中容易看出，在第 n 级上 Cantor 集由 2^n 条线段组成，每条线段长 $(1/3)^n$ 。

因此, 当 n 趋于无穷大时, 点集的“长度” l 将是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad (24)$$

在 20 年代, 数学家 Hausdorff 提出了一个可以用来研究象 Cantor 集那样的分形的分数维理论. 在现在的简单情况中, 这个理论可以解释为询问: 用多少个小区间 $N(\epsilon)$ 才能“覆盖”长度尺度 ϵ 的点集. 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 分维 d_f 定义为

$$d_f \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \right) \quad (25)$$

把方程 (25) 反过来, 我们看出

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{d_f} \quad (26)$$

对于 Cantor 集, 如果我们注意第 n 级并用长度 $\epsilon = (1/3)^n$ 的小区间, 我们知道 $N(\epsilon) = 2^n$. 因为当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\epsilon \rightarrow 0$, 所以我们可以用

$$d_f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad (27)$$

实际上, 简单的 Cantor 集只有一个尺度, 因为在构造点集的每一级时, 总是用 $1/3$ 因子. 与此相反, 在混沌动力学系统中出现的分形具有一个尺度范围, 并典型地对点集的不同部分采用不同的标度; 作为一个结论, 这些更复杂的点集有时称为多重分形 (multifractals). Feigenbaum 在他有关 logistic 映射的原始工作中, 定义并讨论了一个表征这些差别的标度函数. 最近, 一个有关的分析方法 (称为 $f(\alpha)$ 法) 已用来提供详细地了解出现在各种混沌动力学系统中的许多不同的标度.

尽管这些构造和方法可以认为只是一些数学技巧, 但本质是具有在很多不同尺度上重复其自身并因而具有近似分形的结构. 熟悉的例子包括云, 闪电, 羊齿植物, 以及如图 11 所示的雪花. 不太熟悉但技术上很重要的例子包括树枝状晶体的增长, 充气光电元件中的电介



图11 雪花. 是自然界中分形结构的一个例子.
(照片由 Dover 出版社惠允从 W. A. Bentley 和 W. J. Humphreys 的《雪晶》中复制)

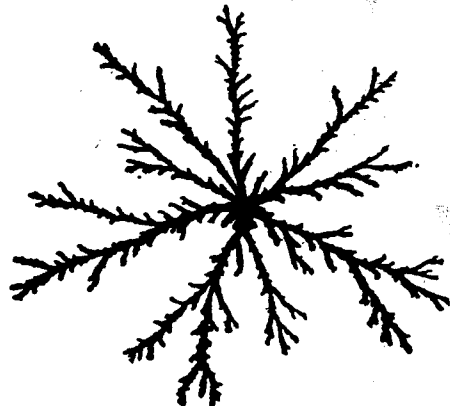


图12粘性指进. 把水加压注入高粘性流体中形成的分形结构. 此物体的分维经计算后是 $d_f = 1.70 \pm 0.05$. (法国 Etudes et Fabrication Dowell Schlumberger 的 Gerard Daccord 和 Johann Nittmann 以及 Boston 大学的 H. Eugene Stanley 惠允图片)

质击穿，以及某些双流体流动中的“粘性指进”。

描绘最后这种现象的实验室实验(图12)，是由充满高粘性流体的扁平二维柱形管组成。在管中心的入口允许加压注入第二种不太粘的流体(在本情况中是水)。水不是光滑和均匀地代替粘性流体，而是分散成象图12中表示的有许多枝叉的珊瑚状的分形物体。采用类似于测量 Cantor 集维数所用的盒子计数法，我们发现，粘指的分维是 1.70 ± 0.05 。因此，尽管它由很多细小且高度分枝的线段组成，但粘指具有的分维却比线段维数 ($d=1$) 更为接近面积维数 ($d=2$)。

为了了解产生这种结构的过程，我们可利用实验数学来研究特殊的物理模型。一种这样的研究(图13)描述了在一个三角形格子上一个分形图象的发展。构成图象的基本模型主要取决于驱动“流体”的压力梯度，但也同涨落(通过一个噪声参数)及各向异性的作用有关。研究清楚地表明所有的图象主要在尖点处增长；在“峡湾”区则几乎不增长。

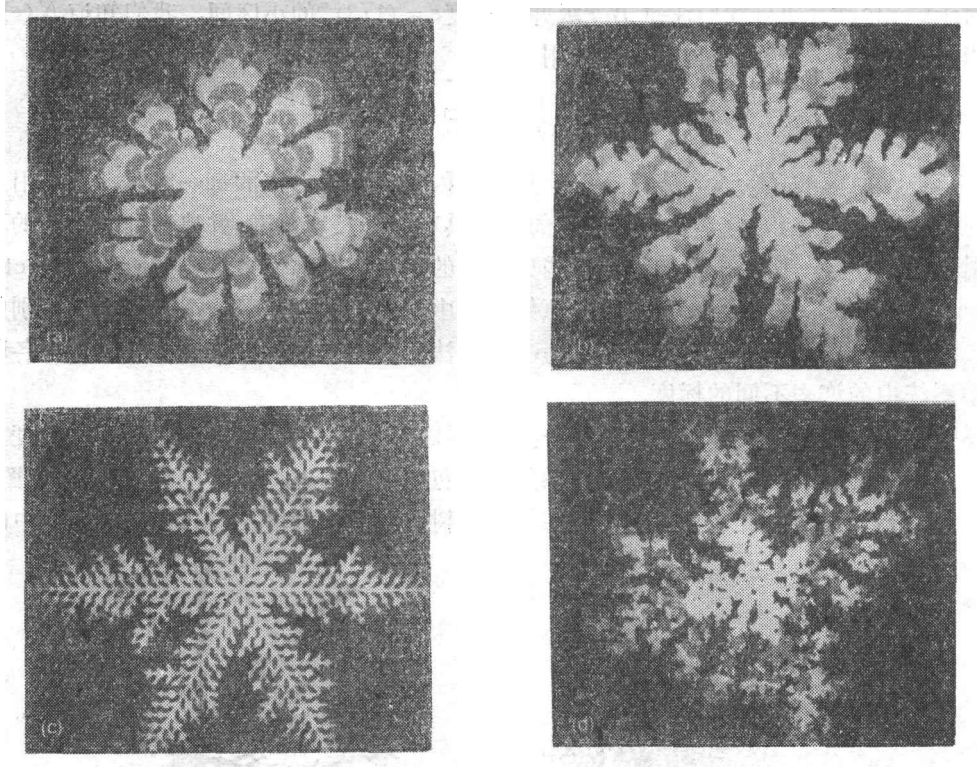


图13 分形仿真。在仿真形成这些分形图形中所用的模型，利用了局部压力梯度通过三角形格子“驱动流体”。物体的图形增长通过彩色编码标出；最初 $1/6$ 的点具有白色，其次 $1/6$ 是蓝色，然后是洋红色，黄色，绿色，最终是红色，模型也通过噪声参数 σ 加入涨落的作用和通过参数 k 加入各向异性的作用。在 (a) 和 (b) 中的图形具有同样的噪声 ($\sigma=0.02$) 但不同的各向异性 (在 (a) 中 $k=11$ 而在 (b) 中 $k=1.3$)。在 (c) 和 (d) 中的图形具有同样的各向同性 ($k=1$) 但噪声变化 (从 (c) 中的 $\sigma=0.5$ 到 (d) 中的 $\sigma=0.005$)。

(惠允图片者与图 12 同)

图 13a 和 13b 是在噪声参数维持为常数但各向异性 k 显著降低时所发现的分形结构的例子。注意在图 11 和 13a 之间明显的定性上相似。有趣的是，图 13a 和 13b 的分维都是 1.5 左右；它与 k 无关。在图 13c 和图 13d 中，各向异性维持不变，但噪声降低。这里分维都是 1.7 左右。

图 13 清楚地表明，单独一个 d_f 不足以表征一个分形，因为尽管图 13a 和 13b 都有 $d_f = 1.5$ ，但有明显的看得见的差别。Mandelbrot 定义了很多高阶几何性质——例如，**空隙度**，它在分形中度量了典型的空洞尺寸——这些性质可用来更精确地表征分形。实际上，空隙度和其他高阶特性都是我们以前评论的几何复述，前面提到由混沌动力学系统产生的多重分形具有一个标度范围，并且 $f(\alpha)$ 和有关的分析技术可用来研究这些标度。在这个领域内一个一般尚未解决的问题是**分形逆问题**：给定 $f(\alpha)$ 或有关的量，我们能把实际的分形点集重新构造到什么程度，可能包括动力学上产生的点集的有序部分。

3.5 实用性 确定性混沌和分形的影响只是在现在才被整个科学界感觉到。即使简单系统也可以表现出难以置信的复杂行为，简单规则可以导致非常复杂的几何物体，以及这种行为和这些物体可予以定量表示，这些概念现在已被广泛接受了，并正在很多领域内应用。

分形粘性指进现象(图12)在技术上有极大的兴趣，因为它对发展先进的有效采油技术是一个主要障碍。储存在石灰岩或其他多孔介质中的原油几乎一半没有被采出，因为仍然粘附在孔隙中。为了迫使这些原油流出，要在附近的第二口井中注入水。粘性指进限制了这种技术的效率，因为当水的细指之一在从注水器到采油井这段距离间破裂时，所采出的将是注入的水而不是油。显然，完全了解这种分形现象和控制它们的方法就具有重大的经济意义。

类似地，分形的一个直接应用出现在用作发动机部件的钝化陶瓷设计中。这种特殊的陶瓷设计成允许有缺陷，例如空洞和裂纹，但没有碎成碎片。这些缺陷主要来自空洞，它们是在烧结过程中形成的，断裂主要来自对陶瓷机加工时使用硬性材料而产生的。通过对陶瓷加上第二种成分，就可以迫使裂纹的扩展沿着曲折的螺旋状路径在陶瓷中运动，促使所消耗的能量要比在光滑规则路径上所消耗的更多。因此，对一个给定的脉冲，一条不规则的裂纹不会在陶瓷中扩展得很远，并且不容易完全损坏。螺旋状的路径应该使裂纹形成复杂的分形图象形式。确实，高性能陶瓷的微观研究揭示了这样的图象，并确认了裂纹的分维越高，陶瓷韧度就越大。

确定性混沌的结果也被应用到很广泛的学科领域中。实验上，在很多类型的流体流动中，半导体和其他固体电子器件的电流和电压响应中，以及心脏病患者的心律失常中，高精度混沌动力学的测量都已确立了耗散混沌在流体动力学、凝聚态物质物理学和医学中的重要性。确实，最近的医学实验表明，很多生理参数在**健康人**中是混沌地变化的，越是规则就越能表明具有病理条件；例如，红血细胞和白血细胞的密度的正常混沌振动，在某些贫血症或白血病中变为周期振动。Hamilton 混沌在加速器设计中找到了直接应用，这里由于所谓“Arnold 扩散”的奇妙长期现象（见“Hamilton 混沌和统计力学”），表面看来稳定的粒子束的势能损失是技术上的一个极重要课题。

在“应用混沌”中最中心的理论挑战是发展确定性混沌的模型来解释这些分散的现象。让我不去注意具体应用的细节，而描述两个现代研究的比较宽的问题范围。

首先，尽管我们强调了混沌系统的**长期行为**的随机性和不可预测性，但无论如何，仍然真实的是这些系统是确定性的，服从规律的，它不包含任何外部的随机性和不确定性。因此，如果运动方程已知，则预言**短期行为**是可能的。在 $r=4$ 时 logistic 映射的分析解就是一个清楚的说明；给定两个已知比如有 10 个宇位精度的初始条件，我们可以预言映射 10 次迭代的相对位置（尽管有指数式下降的精度），当前正在极力研究的实质性问题，是当人们

观察到一个系统是确定性浑沌的，但并不知道基本方程的形式；不管怎样，我们能否用基本的确定性来作出**某些**预言呢？由于这种预报方法的明显价值——考虑证券市场——在这个问题上正在集中着重大的努力。

其次，仍在较宽一些的范围上，是我们前面已提到过的有关浑沌中的普适性和模的简化的课题。普适性意味着对于某些浑沌现象(例如周期倍化级联)，系统的细节与描述它的方程**无关**：观察到的复杂行为在每一个领域内，如流体力学，凝聚态物质物理学或生物学，都以一种相似的方式发展。确实，普适性这个术语是借用了统计力学的相变，那里已证明微观相互作用的细节与相变的大部分重要性质无关。在浑沌领域中，普适性也对某些现象的分析给予巨大的威力；本质上，最简单的例子，例如周期倍化的logistic映射，包含了整个作用的一些关键特性。

模的简化的中心思想在流体流动中最容易显示出来。在任何给定的流体运动中，不是所有(无穷多个！)可能的模都是“活跃的”，因此**有效**相空间维数要比方程的整个维数小得多。流体作总体运动的层流情况是一个平凡的例子。一个更有趣和很不明显的例子是在 Couette-Taylor 流动的实验中观察到的，其中流体包含在两个同心转动的圆筒之间。当相对转速增大时，流动形成 Taylor 涡带。相对转动的进一步增大使涡带发生“摇摆”不稳定性，并最终被充分发展的湍流所代替。在这些实验中，较聪明的方法(有时称为“来自一个时间序列的几何学”和有关的严格数学嵌入定理)已被用来直接从一单个动力学变量测量到的时间序列抽取相空间信息。这种方法已揭示了5阶的有效相空间维数的奇怪吸引子。在这些实验中，从某种意义上讲，只有阶数为5的活跃模。模的简化把所要模拟的自由度数减到最少而又必须抓住运动的本质。

模的简化的一般问题中几个重要的方面应该予以澄清。首先，象“来自一个时间序列的几何学”的方法既没有给出有关简化模性质的直接信息，也没有给出有关决定它们相互作用的有效方程的信息。一般说来，要得到这种信息，仍然是一个重要的未解决的问题。

其次，模的简化与模的**截断**是不同的。特别是，我们注意到 Lorenz 方程是通过简单地截断整个方程的 Fourier 展开式得到的，因此忽略了某些可证明是非零的耦合。理想地看，模的简化过程应该是**演绎性的、受控的和构造性的**；即我们应该能导出决定简化模的方程，在简化中所做的误差是有界的，并能“构造”实际模本身。这也仍然是一个奋斗目标，尽管已取得了重大的最新进展。

第三，如果我们能得到真正的模的简化，则所得好处是巨大的。例如，简化模方程的参数可以很容易强加成与时间有关的形式，并且简化方程本身可以是阻尼和驱动的。在这种方式下可能预言整个原始系统的行为，在原始系统中这些强加的作用可能很难确定。最近在苏联，Rabinowitz 作了这种方法的一个特殊情况：用关于简化模方程的数值实验作为指导，他通过在一个喷管流动中用一个周期应力能预言湍流的发生。

第四，对一类用来描述不稳定化学反应锋面(例如火焰)的非线性反应-扩散方程已得到了有关模的简化的严格数学结果。一个重要的例子是称为 Kuramoto-Sivashinsky 方程的，它可写成形式

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \phi(x, t)}{\partial x^4} + \left(\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (28)$$

式中 $\phi(x, t)$ 作为位置和时间的函数，是描述现象的振幅。尽管用动力 (下转第 375 页)

A REVIEW ON THE RESEARCH OF DEBRIS FLOW

Zhang Shu-cheng

Institute of Mountain Disaster and Environment, Academia Sinica
Dongchuan Observation and Research Station, Academia Sinica

Abstract The debris flow is a common natural disaster in the mountainous regions. It is a special two-phase fluid. In general, there are two types of debris flows; low-viscous debris flow (where collision and energy dissipation are dominated) and viscous debris flow (where viscosity is dominated). In this paper, the formation, the classification and the dynamics of debris flow are discussed, some urgent problems are pinpointed, which include the theory of confluent flow and the law of fluid resistance. It is predicted from the recent developments in debris flow studies that the further theoretical research and the management of debris flow basins on the basis of mathematical models will be the main trend of the debris flow researches.

Keywords *debris flow; fluid properties; dynamics of debris flow*

(上接第392页)学系统语言来说,这个方程表示为一个无穷多自由度的系统,但不管怎样,严格正确的是在一个有限长度 L 的盒子中,只要有有限个正比于 L 的模就足够抓住本质上来自任何初始条件的长期动力学行为。尽管联系还没有完全构造好,但这些模的特性已可以确定,并且这些模与这个方程所观察到的拟序结构有关。在浑沌系统中模的简化同空间广延的动力学系统中的拟序结构之间的一般联系,将是我们在讨论复杂图形和图象选择中的中心课题。

最后,模的简化问题是要想了解浑沌同流体及等离子体中充分发展的湍流之间关系的核心理心。浑沌,正如我们已强调的,包含了有效低相空间维数的动力学系统中的时间无序性和不可预测性。充分发展的湍流除了时间无序外,还包含所有尺度上的无序随机空间结构(至少在表面上看是这样)。而且,湍流系统的不同空间区域是独立地活动的,空间关联函数是短程的。因此,在充分发展的湍流中出现的任何吸引子的相空间维数肯定是非常高的。

例如,最近对 Reynolds 数 2800 时的湍流 Poiseuille 流动的数值仿真表明,流动的 Navier-Stokes 方程的湍流解的确位于奇怪吸引子上,但它有大约 400 的分维!尽管令人信服地知道,在这种情况下观察到的湍流定性上可用确定性浑沌来描述,但要想实验地分析这种流动或理论上用 400 维相空间的动力学系统来模拟,显然是不合适的。对更高的 Reynolds 数,这种情况变得更坏。在下一节中,我们将说明模的简化耦合一组近似方程如何能使这种情况比较好处理。

总之,过去25年的巨大努力导致确定性浑沌和分形作为非线性科学的第二个中心范例出现。这个范例对我们的世界复杂性的基本观点的冲击,以及对影响我们日常生活的技术的冲击,在可预见的将来会继续加深。(未完待续)

黄永念译自: *Los Alamos Science*, No.15 (Special Issue) (1987);

218—262. (董务民校)