

非平衡态/不可逆过程的热力学理论 (II)*

薛昌明 (G.C.Sih)

美国 Lehigh 大学断裂与固体力学研究所

7 解的唯一性

如果不考虑非平衡态和不可逆性, 则等能密度理论中的基本命题与经典弹性理论中的在形式上完全相同. 无论整个系统的动能是大还是小, 图6中在 Σ_s 上的面力 \bar{T}_i 和在 Σ_s 上的位移 u_i 将始终在空间坐标系 x_i 和时刻 t 下给出. 与一般力学中相同, 必须知道有关位移 u_i 及其时间导数的初始条件. 它们的影响则可通过 (38) 和 (39) 向等能面转化, 从而得到 $\alpha^{(i)} (i=1,2)$. 在已知由 Σ 所围的区域 A 中各处的 $\alpha^{(i)}$ 大小基础上, 对应于 \bar{T}_i 或 u_i 的每一增加量或减小量, 可通过平衡条件的满足来确定位移 $u_i(\xi_j)$ 或 $u_i(x_j)$. 由 (10) 所代表的体积能与表面能密度间转化条件已经在事实上代替了本构方程. 下面列出新理论中的三种基本命题.

命题 1 求满足 A 中平衡条件及 $t=0$ 时刻初始条件

$$u_i(x_j, 0); \quad \dot{u}_i(x_j, 0)$$

和区域 A 外边界 Σ 上方边界条件

$$\bar{T}_i = \bar{T}_i(x_j, t), \quad t > 0$$

的等能位移 $u_i(\xi_j, t)$ 或相应的一般位移 $u_i(x_j, t)$.

命题 2 求满足 A 中平衡条件及区域 A 外边界 Σ 上位移边界条件

$$u_i = u_i(x_j, t), \quad t > 0$$

的等能位移 $u_i(\xi_j, t)$ 或相应的一般位移 $u_i(x_j, t)$.

命题 3 求满足 A 中平衡条件及边界 Σ_s 的力边界条件

$$\bar{T}_i = \bar{T}_i(x_j, t), \quad t > 0$$

和 Σ_s 上的位移边界条件

$$u_i = u_i(x_j, t), \quad t > 0$$

且 $\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_c$ 的等能位移 $u_i(\xi_j, t)$ 或相应的一般位移 $u_i(x_j, t)$.

在 (69) 和 (71) 的基础上, 可以证明命题 1, 2 和 3 中的平衡态解是唯一解. 我们有如下定理:

* 据薛昌明教授1988年10月在香港大学机械工程系讲座内容及下列论文翻译整理并略有增补: Sih G. C. Thermomechanics of solids: nonequilibrium and irreversibility, *Theoret. Appl. Fracture Mech.*, **9**, 3 (1988): 175-198. —译者

定理 若等能密度函数 \mathscr{W} 正定, 平衡方程和连续性条件得到满足, 则等能态 (V_0, e_0) 或 (τ, e) 唯一.

设对于一组给定的体积力 F , 面力 \bar{T} 和位移 u , 可以得到两组解

$$(u_i^{(1)}, \tau_{ij}^{(1)}), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (73)$$

$$(u_i^{(2)}, \tau_{ij}^{(2)}), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (74)$$

以记号

$$u_i \equiv u_i^{(1)} - u_i^{(2)}, \quad \tau_{ij} \equiv \tau_{ij}^{(1)} - \tau_{ij}^{(2)} \quad (75)$$

代表 u_i 和 τ_{ij} 的“差”. 显然, $F_i = 0$; 否则将会出现两组可能解, 其中 $F_i = F_i^{(1)} - F_i^{(2)}$, $\bar{T}_i = \bar{T}_i^{(1)} - \bar{T}_i^{(2)}$.

引用 (75) 中的记号, (69) 成为

$$\int_{\Sigma} \bar{T}_i \dot{u}_i dA = \frac{d}{dt} \int_A \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \frac{d}{dt} \int_A \mathscr{W} dV \quad (76)$$

边界条件要求: 对命题 1, 在 Σ 上 $\bar{T}_i^{(1)} - \bar{T}_i^{(2)} = 0$; 对命题 2, 在 Σ 上 $\dot{u}_i^{(1)} - \dot{u}_i^{(2)} = 0$; 对命题 3, 在 Σ_o 上 $\bar{T}_i^{(1)} = \bar{T}_i^{(2)}$ 及在 Σ_e 上 $\dot{u}_i^{(1)} = \dot{u}_i^{(2)}$.

在所有情形下, (76) 左边都为零. 因此可将 (76) 写成

$$\frac{d}{dt} \left[\int_A \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \mathscr{W} \right) dV \right] = 0 \quad (77)$$

由此可得

$$\int_A \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \mathscr{W} \right) dV = 0 \quad (78)$$

其中的积分常数为零, 若初始位移和速度为零的话. 对任意 A , (78) 的被积函数为零:

$$\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \mathscr{W} = 0 \quad (79)$$

因为 \mathscr{W} 和动能密度都是正定的, 故有

$$\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i = \mathscr{W} = 0, \quad t > 0 \quad (80)$$

记住 (80) 是由两组解的差来表达的. (71) 中 \mathscr{W} 的形式表明, 对时刻 $t > 0$, 当且仅当

$$\dot{u}_i = 0 \quad \text{和} \quad \tau_{ij} = 0 \quad (81)$$

成立时, (80) 才成立. 因此

$$\dot{u}_i^{(1)} = \dot{u}_i^{(2)} \quad \text{且} \quad \tau_{ij}^{(1)} = \tau_{ij}^{(2)} \quad (82)$$

即预先假设的两组解是相同的.

虽然上面给出的唯一性证明类似于 Kirchhoff 对线弹性力学给出的证明, 但除了平衡态外, 没有附加任何有关非线性和不可逆的条件. 正是等能面的存在使得这一推广成为可能. 只要连续性条件得到保证, 平衡态解就是唯一的.

8 非平衡/不可逆状态的界限

大多数非平衡态理论利用状态参数对其平衡态值的偏移量及概率/统计的手段来分析问

题。它们因为不能追溯物理过程的轨迹而不得不采用此下策。由此而产生的后果是，不可逆性乃是作为一种预先假设被引入到理论中来判断演变的方向^[10-12]。或者说，非平衡态和不可逆性是互不相干的。这些模型会导致谬误当然不令人惊奇。Onsager 的理论^[10,11]声称由微观可逆过程的结果会得到宏观的不可逆性。这一结果要求单个粒子运动的力学方程式相对于时间对称；换句话说，在正时刻向负时刻的转换过程中，运动的经典量子力学方程保持不变。此即意味着可逆。另一方面，概率论和统计力学则倾向于用平均的手段来描述不可逆过程与路径有关的特性。经典力学和热力学的宏观理论也不能令人满意；因为力学平衡方程，无论静力学还是动力学的，都通过系统动量和动量矩的平衡来定义，而热力学平衡方程则需要用到能量守恒或热力学第一定律。这种二元性来源于在理论的建立过程中使热和机械能的影响分别独立开来的有争议的人为假设。在新理论中，表面/体积能的概念将力学和热力学有机地结合成一体。热平衡方程不再需要与力学平衡方程区别开，如果其中一个方程满足了，另一个方程就可以通过(9)得到。与传统理论的另一根本区别在于，力学中的**本构方程**和热力学中的**状态方程**在新理论中不是预先人为设定，而是根据外部的扰动条件对系统的每一单元单独推导得来。我们并无别的其他选择余地，因为每一局部单元都有其独特的不可逆性，不能从单向或简单实验得到。试图根据一大尺寸试件来确定微小单元的状态变量的想法是不实际的，它只适用于理想的可逆和非耗散系统。须记住的是，**平衡条件要求整个系统，试件或是微元，能够用唯一一组状态参量来表达**。在表面/体积能密度理论中绝不会出现对物理过程作前后矛盾的解释或演绎的情形。等能元的平衡条件始终得到满足，因为它们的状态参数可以唯一确定。

8.1 路径相关性 以下将引入用邻近的平衡态/不可逆解对非平衡态/不可逆解进行受限的概念。因为它具有唯一特性，我们将在等能应力和等能应变构成的空间中讨论问题。

(36) 和 (37) 表明九对 (τ_{ij}, e_{ij}) 中的任何一对都可用来确定 (14) 中的等能密度函数 \mathcal{Y}^0 。特别地，下面的讨论中将以 (σ, e) 来代表等能应变态：

$$(\tau_{11}, e_{11}) = (\tau_{12}, e_{12}) = \dots = (\tau_{31}, e_{31}) \rightarrow (\sigma, e) \quad (83)$$

当系统受到外界的扰动时，等能应力和等能应变都会在正或反方向改变其大小。为着确定性

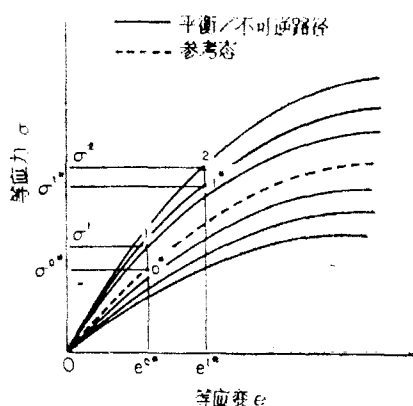


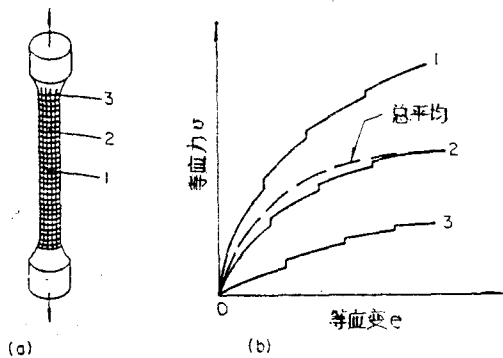
图 7 等能应力和等能应变空间中的平衡态/不可逆路径

起见，设这种变化是正确的，如图 7 所示。间断线代表参考态。如果 $\Delta\sigma^{0*}$ 或 Δe^{0*} 足够小，系统仅是稍稍偏离实际加载路径，则所有曲线的斜率也不会太偏离原值。由 (12) 和 (21) 知，只需要知道 σ^{0*} 和 $d\sigma^{0*}/de^{0*}$ 就可完全确定 \mathcal{Y}^{0*} ，这一点将在下面作详细阐释。前面已经强调过，由于 (44) 中 $(\mathcal{Y}^z, \mathcal{Y}^y, \mathcal{Y}^x)$ 和 (21) 中 $(\mathcal{Y}^1, \mathcal{Y}^2, \mathcal{Y}^3)$ 间的差别，点 0^* 的 \mathcal{Y}^{0*} 值将不同于点 1 的 \mathcal{Y}^1 值。因为 (36) 和 (37) 表明，等能应力和等能应变状态 (σ, e) 也可由 (\mathcal{Y}, c) 唯一地表示，按照 4.2 节中描述的步骤确定的 $(\mathcal{Y}^{0*}, e^{0*})$ 也可用来确定 (\mathcal{Y}^1, e^1) 或点 1。因而，对一给定 e^{0*} ，当 σ^{0*} 增加到 σ^1 时，

从点 0^* 到点 1 将会发生非平衡的变化，其大小则决定于外加力或位移的增加量。由此可确

定点 1 和 σ^1 。从 $0^* \rightarrow 1$ 的路径不是平衡过程的路径，因为它不与附近的实线或平衡态路径中任何一条重合。对一典型等能元来说，其响应可顺序用 $0^* \rightarrow 1 \rightarrow 1^* \rightarrow 2 \rightarrow 2^* \rightarrow \dots$ 来表达。点 $0^*, 1, 1^*, 2, \dots$ 对应于由非平衡态 $0^* \rightarrow 1, 1 \rightarrow 1^*, 1^* \rightarrow 2, \dots$ 连结起来的平衡态。若等能应力或应变的增加量减小，则点 $0^*, 1, 1^*, 1, \dots$ 间的距离也相应减小。

不要将图 7 中的实线与一般的单向曲线混淆起来，它们代表平衡态并由理论方法得到。在单向试件中的每一单元并非处于平衡态，这点可由图 8 中的三个典型位置 1, 2 和 3 来说明。除角点外，之字形路径代表非平衡态。将试件内所有非平衡态加以平均可得图 7 中的虚线，此即实验获得的单向曲线。由图 6 知，应变和/或应力的增加会立即引起不可逆现象的出现。原则上讲，不可能在非平衡/不可逆的单向曲线和属于另一系统的材料单元之间建立起一一对应关系。非平衡/不可逆是任何物理过程的本质；严格地讲，只有当 (σ, e) 趋近于零时，可逆性才能存在，这就是为什么线弹性理论只适用于原点附近的原因。线性并不意味着可逆；单向试件和环境之间可以有大的热量交换，即使其应力-应变曲线是线性的。



(a) 单向试件 (b) 局部及平均响应
图 8 单向拉伸试件中局部单元的非平衡态

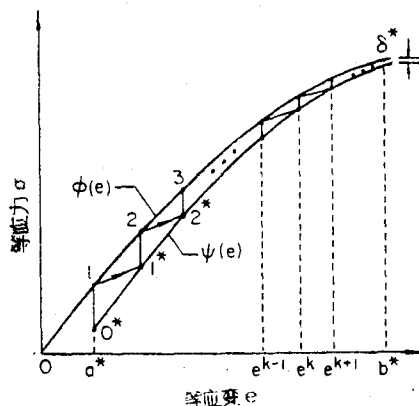


图 9 非平衡态的界限

8.2 界限的存在性 非平衡意味着不唯一，因而需要建立解的界限。也即是说，需要证明非平衡态由平衡态加以界限，后者则已根据等能密度函数的正定性质被证明是唯一的。下面给出将要建立的界限定理：**非平衡/不可逆等能态的涨落由平衡/不可逆等能态设界并趋近于与初始加载大小和加载历史有关的确切极限。**

设等能应力 $\sigma(e)$ 为等能应变 e 的函数并代表 (a^*, b^*) 中被设界作上下波动变化的非平衡态。在此区间， $\sigma(e)$ 若能表示成 $\phi(e) - \psi(e)$ 的形式，其中 ϕ 和 ψ 代表平衡态的有界函数并以单调增或单调减的方式互相趋近，则 $\sigma(e)$ 必有一极限值。区间 (a^*, b^*) 由图 9 所示的离散点所组成：

$$a^* = e^0 < e^1 < \dots < e^n = b^* \quad (84)$$

点 $0^*, 1, 1^*, 2$ 等等代表由函数 $\phi(e)$ 和 $\psi(e)$ 表示的曲线上的平衡态，路径 $0^* \rightarrow 1, 1 \rightarrow 1^*, 1^* \rightarrow 2$ 等等则代表非平衡跳跃或状态。首先要证明的是，无论 (84) 中的分割形式如何，

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\sigma(e^{k+1}) - \sigma(e^k)| \quad (85)$$

都将小于一常数。因为

$$|\sigma(e^{k+1}) - \sigma(e^k)| < \phi(e^{k+1}) - \phi(e^k) + \phi(e^{k+1}) - \phi(e^k) \quad (86)$$

我们有

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\sigma(e^{k+1}) - \sigma(e^k)| < \phi(b^*) - \phi(a^*) + \phi(b^*) - \phi(a^*) \quad (87)$$

终点 b^* 可加以延伸, 增加分割点的个数, 以减小 $\phi(b^*) - \phi(b^*)$ 的数值。在这些曲线的两终点间将始终存在一小的差量

$$\delta^* = [\phi(b^*) - \phi(a^*)] - [\phi(b^*) - \phi(a^*)] \quad (88)$$

δ^* 的最小值并不能任意选择, 因为对应于材料的间断点或相变将会有一临界值 δ_c^* 。 $\phi(a^*)$ 和 $\phi(b^*)$ 值则决定于 Σ_0 上外力 T_i 或 Σ_0 上位移 u_i 的初始加载大小。若初始加载量小, 则点 0^* 离 1 更近, 达到 $\phi(b^*)$ 和 $\phi(b^*)$ 间设定差值所需的分割点数也会减少。(84) 中的分割点数在很大程度上决定于边界条件的设置。由于初始加载步决定着随后的非平衡态的数目, 在设定其大小时应加以特别留意。大的跳跃会消耗更多能量, 同时也使得整个过程的效率降低。不可逆过程的真实行为正是如此。函数 $\sigma(e)$, $\phi(e)$ 和 $\psi(e)$ 的有界性可由如下不等式更好地表达:

$$\left. \begin{aligned} [\phi(e^{k+1}) - \phi(e^k)] &< [\phi(e^k) - \phi(e^{k-1})] \\ [\psi(e^{k+1}) - \psi(e^k)] &< [\psi(e^k) - \psi(e^{k-1})] \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

此式表明 (85) 中的函数总会趋近于一极限, 即

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\sigma(e^{k+1}) - \sigma(e^k)| \rightarrow \varepsilon^* \quad (90)$$

其中 ε^* 为一非零正常数。因此, 非平衡等能应力和等能应变状态始终被有唯一解的平衡态所界限。这一结论也适用于当 Σ 上的表面力 T_i 或位移 u_i 去除时所对应的单调减函数。

9 间断点

Σ_0 上 T 或 Σ_0 上 u 的不断增加将会导致 A 内新表面的出现。材料单元的这种间断点不仅会影响平衡条件也会使解的唯一性定理不再成立。由 (90) 所表示的非平衡/不可逆解有界定理也不成立。特殊情形显然得特殊考虑; 在讨论不可逆过程时不能轻易忽略它们。毕竟, 系统内在发生永久性的或不可逆的变化; 连续性条件在不断受到改变; 除非外载 T 或 u 受到一定限制, 这些变化不会停止下来。

不可逆意味着永久性变化。材料学家会试图用物体结构内从原子微观到宏观范围内的一系列损伤模式来描述这些变化。有必要对由图 9 中参数 δ^* 所控制的解的分解过程或界限程度

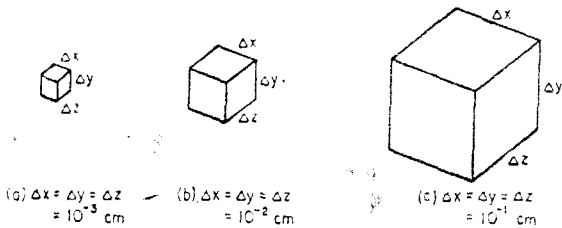


图 10 等能单元的尺度

再作一些讨论。 δ^* 所受到的限制条件与材料本身并无关系。它们决定于下列因素的共同影响: Σ 的几何形状, Σ_0 上 T 和 Σ_0 上 u 的特定条件和 A 区域内的组分情况。不仅 δ^* 与时间有关, 其极限值 δ_c^* 也随着时间变化, 即 $\delta^* = \delta^*(t)$, $\delta_c^* = \delta_c^*(t)$ 。它们的大小可以求得

并可用来建立有给定尺寸的等能元的门坎值。可以用图 10(a)—10(c) 中的三种选择来加

以说明, 其中 $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ 分别选为 10^{-3}cm , 10^{-2}cm 和 10^{-1}cm . 这一选择是任意的, 比如, 也可选用 10^{-8}cm , 10^{-7}cm 和 10^{-6}cm 的大小单位. 等能密度理论对尺寸范围未作任何限制, 它可以分析任意范围内的非平衡/不可逆过程, 只有区域 A 内各点的 $\delta^* = \delta^*(t)$ 和 $\delta_c^* = \delta_c^*(t)$ 会作相应变化. 当然, 由 Σ 围起来的给定区域 A 内所划分的等能元数目会影响解的精度. 按照图 10 中的单元尺寸大小, 我们说单元划分或物体的分解是宏观的, 如果单元内微观尺寸范围内的细节不能得到描述或蒙受精度上的损失. 微观间断点会因此得不到准确描述. 如欲在 10^{-3}cm , 10^{-2}cm 或 10^{-1}cm 范围内保持线性尺度的连续性, 决定单元大小时就应作出相应的抉择.

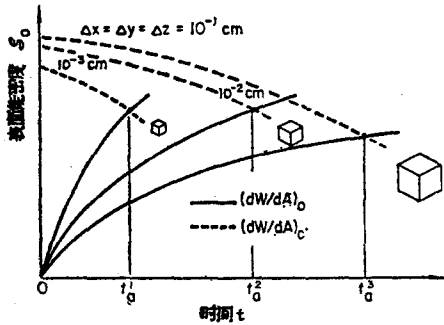


图 11 单元大小对表面能密度的影响

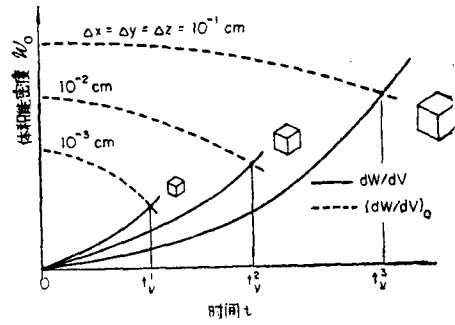


图 12 单元大小对体积能密度的影响

考查能量传递过程与时间相关的特性将有助于了解如何确定 $\delta^*(t)$ 和 $\delta_c^*(t)$. 当 Σ_0 或 Σ_c 作用有外界扰动时, 必须经过表面才能将能量传送给物体内部. 初始阶段时, 表面能密度 S_0 的值可能高些, 体积能密度 W_0 的值则较低. 在能量不断输入的条件下, 随着时间的增加, 越来越多的能量将经由 Σ 传递给区域 A , 而 W_0 的值也会逐渐追上等能密度面上 S_0 的值. 图 11 和图 12 示出了这种能量交换过程. 值得注意的是, 在最初的短时间内, S_0 的值增加得很快, 但其增加幅度随后就慢了下来, 这正好与 W_0 相反, 它最初是缓慢增加, 然后在长时间内加速增长. S_0 和 W_0 的比例由 (10) 决定. 为简单起见, 考查如下的可能情形:

$$S_0 > S_c, W_0 \approx W_c \text{ 或 } W_0 < W_c \quad (91)$$

$$W_0 > W_c, S_0 \approx S_c \text{ 或 } S_0 < S_c \quad (92)$$

(91) 代表在一给定位置, S_0 达到其临界值 S_c , 破坏紧接着发生的情形. 单元大小与时间之间的相互作用关系则由图 11 表示. 在时刻 t_0^1 将产生线性尺寸在 10^{-3}cm 量级的新表面积. 若这一变化对连续性的影响可忽略不计, 则整个系统的构形维持原状不变, 能量可继续进行其传输过程. 在时刻 $t_0^2 > t_0^1$ 产生了线性长度为 10^{-2}cm 的较大表面积. 上述过程能否维持到时刻 t_0^3 将决定于体积能密度 W_0 能否满足 (92) 中的条件. 图 12 中的 t_v^3 可能比 t_0^3 小, 但 t_v^1 和 t_v^2 则分别比 t_0^1 和 t_0^2 大. 线性尺度为 10^{-1}cm 的单元若发生破坏则可能足以导致连续性的破坏, 尤其当一细小区域 A_1^* 内许多单元都已遭破坏的时候. 在随后的分析中应当剔除掉这一间断区域, 以使区域 $A - A_1^*$ 内的连续性仍然得到保留, 其中 A 是图 6 中的初始区域. 若外界能量继续输入, 则会出现另外的间断区 A_2^* , A_3^* , 等等. 间断区一经出

现就不再加考虑以使得区域

$$A^* = A - A_1^* - A_2^* - \dots - A_j^* - \dots - A_n^* \quad (93)$$

的连续性条件仍然成立。\$A^*\$ 成为多连通区域，其总表面积则由 \$\Sigma\$ 增加到 \$\Sigma^*\$，也即

$$\Sigma^* = \Sigma + \Sigma_1^* + \Sigma_2^* + \dots + \Sigma_j^* + \dots + \Sigma_n^* \quad (94)$$

最终，系统将达到总体的不平衡状态，对其再加分析已得不到有用信息。

10 本构方程和可逆性

按照定义，本构方程只能描述所谓的“材料特性”；这一假设不仅在物理上不可能实现，也会对连续介质力学理论的发展带来很大限制。它们只适用于与路径无关的不可逆过程。对与不可逆性相对应的可逆性作出澄清因此而显得很有必要，尤其是表面/体积能密度理论还扔掉了“热”的概念。

可逆性概念对于提供一种比较标准很有用。应该考虑的是，材料单元由于机械的、热的、电的、磁的和化学的影响而产生的运动是否伴随着热骚动 (thermal agitation)。假想意义下的可逆性对应于将不可逆性从等能量方法中去除。这只有在理想连续介质的情形下才能做到；该介质没有大小，它之所以理想在于其完全光滑、连续和均匀且无任何形式的空穴或缺陷存在。受外界扰动时，它只能在所有方向上作均匀变形。在三维空间 \$\xi_i\$ (\$i = 1, 2, 3\$)，其位移为

$$u_1(\xi_1) = u_2(\xi_2) = u_3(\xi_3) \quad (95)$$

而位移梯度则为

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} = c \quad (96)$$

一理想连续介质应始终保持其对称性而不发生扭曲变形。因此，位移梯度的混合导数为零，即

$$\partial e_{ij} / \partial \xi_i = 0, \quad i \neq j \quad (97)$$

在一理想介质中绝不会出现局部变化。因此，\$a^{(i)} = 1\$ 而 (19) 简化为

$$r^{(1)} = r^{(2)} = r^{(3)} = (1 + e) \quad (98)$$

等能面则成为普通的外表面。此时，可求得用 \$e\$ 表示的体积相对于表面积变化率的表达式。将 (98) 代入 (21) 可得

$$\mathcal{V} = (3 + 3e + e^2) / (2 + e) \quad (99)$$

其中 \$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}\$。利用方程 (7) 中的第二式及 (99) 并令 \$\lambda = \sigma^*\$，则有

$$\sigma = \sigma^* \left[\frac{1}{2} (2 + e) e + \log(2 + e) \right] + c^* \quad (100)$$

其中 \$\sigma^*\$ 具有应力的单位。\$c^* = \sigma^* \log 2\$ 将保证 \$e = 0\$ 时 \$\sigma = 0\$，故 (100) 成为

$$\sigma = \sigma^* \left[\frac{1}{2} (2 + e) e + \log \frac{1}{2} (2 + e) \right] \quad (101)$$

对应的应变能密度函数由方程 (7) 的第一式给出，其表达式为

$$\mathcal{W} = \sigma^* \left[(2 + e) \log(2 + e) - e(1 + \log 2) + \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} - 2 \log 2 \right] \quad (102)$$

考虑到推导过程的广泛性，这些结果值得加以留意。除了对称性外，对位移梯度的大小未作任何近似。方程 (100) 和 (102) 是精确的。由此我们已求得了线性和非线性材料的一般本

构关系。

10.1 线弹性材料 对于在 $0 \leq e < 10^{-3}$ 范围内变形的弹性材料而言, 表 1 中的数据或图 13 表明作了归一化处理后的 σ/σ^* 是应变 e 的线性函数。图 13 中曲线的斜率为

$$\frac{d(\sigma/\sigma^*)}{de} = \frac{3}{2} + \frac{e}{2} \left[1 + \frac{e}{2} - \left(\frac{e}{2} \right)^2 + \dots \right] \quad (103)$$

小变形时, $d\sigma/de \approx 1.5\sigma^*$, 其中的 σ^* 可视为弹性模量, 对金属而言, 其大小为 $(20-30) \times 10^5 \text{MPa}$ 。系数 1.5 对应于一具有完全连续性和均匀性的理想介质。偏离此值则意味着理想性或可逆性不再成立。

表 1 通常的线弹性应力和应变

$e \cdot 10^{-3}$	σ/σ^*	$e \cdot 10^{-3}$	σ/σ^*
0.1	1.5004	1.0	15.0375
0.2	3.0005	1.2	18.0540
0.4	6.0000	1.4	21.0736
0.6	9.0135	1.6	24.0961
0.8	12.0240	1.8	27.1217
0.9	15.0375	2.0	30.1503

表 2 非线性弹性应力和应变

e	σ/σ^*
1	1.90547
2	7.09861
3	15.00408
4	25.79176
5	39.51490

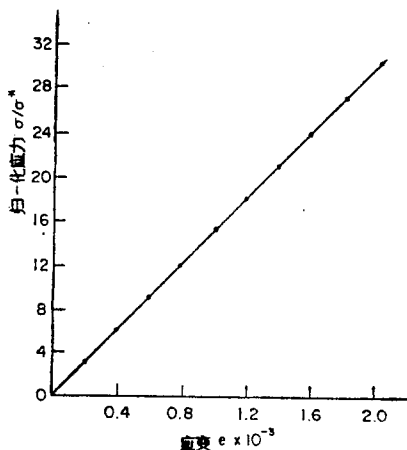


图 13 应力应变的线弹性关系

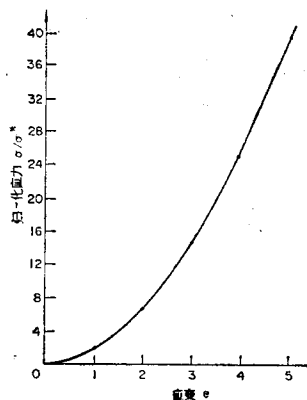


图 14 应力应变的非线性弹性关系

10.2 非线性弹性材料 对于可承受大范围变形的弹性材料而言, σ/σ^* 和 e 间的关系可能是非线性的。表 2 列出了相对于较大应变值而算得的 σ/σ^* 值。图 14 则示出了 σ/σ^* 和 e 间的非线性特征, 它与聚合物和橡胶的变形特征相类似^[17]。

10.3 等温状态 在记号上作适当调整, 则由 (9) 可得 Θ 的下列形式:

$$\Theta = - \left(\frac{\Delta \mathcal{D}}{\Delta e} \right) \left(\frac{\Delta \Theta}{\Delta e} \right) (\sigma^* \gamma)^{-1} \quad (104)$$

对线弹性系统而言, 能量相对于应变的耗散率为零, 即 $\Delta \mathcal{D} / \Delta e = 0$ 。由此可知 $\Theta = 0$ 。可逆对应着没有温度改变的完全静止或稳定状态, 因为 (8) 中的分子 $d\mathcal{D}$ 和分母 Θ 此时皆

为零, \mathcal{E} 函数的变化成为不确定. 对一可逆系统没有“有序”或“无序”可言; 否则, 该系统就不是理想系统. 等能密度理论为可逆提供了如下定义: **可逆对应着没有热涨落、均匀连续和完全对称的向外膨胀或向内收缩.** 无论是多么小的非均匀或不连续都将导致不可逆. 线性或非线性与尺度选择有关, 不可逆或可逆则与过程的路径相关或无关性质有关. 线性系统可以是不可逆的, 而非线性系统可以是可逆的. 此外, 机械变形的可逆可能伴随着大范围的热不可逆. 聚合物和橡胶一类材料的热力学状态是高度不可逆的, 即使它们的机械变形看上去是可逆的. 讨论可逆或不可逆的时候, 必须同时考虑热的和机械能的影响, 就象等能密度理论所做的那样.

11 非线性/不可逆变形

一般地说, 等能位移 u_i 决定于所有的三个空间坐标 ξ_i ($i = 1, 2, 3$), 除非对物体的几何形状或外载条件作出某种近似. 如果与其他的两个尺寸相比, 物体的第三个尺寸很大或很小且外力或位移的加载方式使得它们只在某一平面内产生扰动, 则物体的位移和体积相对于表面积的变化率的表达式可得到简化. 但是, 该简化过程与一般力学对二维问题所作的简化有本质上的区别.

11.1 平面拉伸 设图 2(b) 中的 $\alpha^{(2)} = 0$ (或 $a^{(1)} = a^{(2)}$; $a^{(3)} = 1$), ξ_3 轴与 z 轴重合. 等能面的位置在这种情形下可只由一个转动角 $\alpha^{(1)}$ 确定, 位移 u_1 和 u_2 则只与 ξ_1 和 ξ_2 有关, 而 u_3 只决定于 ξ_3 :

$$u_1 = u_1(\xi_1, \xi_2), \quad u_2 = u_2(\xi_1, \xi_2), \quad u_3 = u_3(\xi_3) \quad (105)$$

材料单元只在 $\xi_1\xi_2$ 平面内发生扭曲变形, $\partial u_2/\partial \xi_1$ 和 $\partial u_1/\partial \xi_2$ 是对应的转动角, 而剩下的 $\partial u_i/\partial \xi_j$, $i \neq j$, 则都为零. 因此, 体积相对于表面积的变化率仅与九个位移分量中的五个有关. 与 (105) 保持一致, 体积相对于表面积在 z 或 ξ_3 方向上的变化可取为常数 k :

$$\mathcal{V}'_3 = k \quad (106)$$

由 (19) 知, 向量 $\mathbf{r}^{(i)}$ 的分量为

$$\left. \begin{aligned} r^{(1)} &= \sqrt{\left(a^{(1)} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right)^2} \\ r^{(2)} &= \sqrt{\left(a^{(1)} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)^2} \\ r^{(3)} &= 1 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

若 $l_j^{(i)}$ ($i, j = 1, 2, 3$) 为向量 $\mathbf{r}^{(i)}$ 的方向余弦, 则

$$\left. \begin{aligned} l_1^{(1)} &= \cos\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right), \quad l_2^{(1)} = \sin\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right), \quad l_3^{(1)} = 0 \\ l_1^{(2)} &= \sin\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right), \quad l_2^{(2)} = \cos\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right), \quad l_3^{(2)} = 0 \\ l_1^{(3)} &= l_2^{(3)} = l_3^{(3)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

此时, (21) 成为

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_1 &= \frac{\left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\right) \sqrt{\left[\left(a^{(1)} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right)^2\right] \left[\left(a^{(1)} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)^2\right]}{\left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\right) \sqrt{\left(a^{(1)} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)^2} \cdot \cos\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right) - [a^{(1)}]^2} \\
\mathcal{W}_2 &= \frac{\left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\right) \sqrt{\left[\left(a^{(1)} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right)^2\right] \left[\left(a^{(1)} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)^2\right]}{\left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\right) \sqrt{\left(a^{(1)} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right)^2} \cdot \cos\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right) - a^{(1)}} \\
\mathcal{W}_3 &= \frac{\left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\right) \sqrt{\left[\left(a^{(1)} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right)^2\right] \left[\left(a^{(1)} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)^2\right]}{\sqrt{\left[\left(a^{(1)} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right)^2\right] \left[\left(a^{(1)} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)^2\right]} \cdot \cos\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right) - a^{(1)}
\end{aligned} \tag{109}$$

位移梯度 $\partial u_3/\partial \xi_3$ 可通过 (106) 及 (109) 由其余四个位移梯度分量表达。

由于对本构关系的形式未作任何预先假定,除了 Σ_e 上 $\bar{\mathbf{T}}$ 或 Σ_e 上 \mathbf{u} 的第一步加载外,应力的求解方式与一般力学中常用的有很大区别。设定了参考材料的初始模量或应力-应变曲线的初始斜率,则位移场 $u_i(x_i)$ ($i=1,2$) 可按照一般力学中的方式求得。将 (42) 应用于平面拉伸位移场,则 $(\bar{\tau}_{11}, \bar{e}_{11})$, $(\bar{\tau}_{22}, \bar{e}_{22})$, $(\bar{\tau}_{12}, \bar{e}_{12})$ 和 $(\bar{\tau}_{21}, \bar{e}_{21})$ 中的任何一对都可用来唯一地确定应变能密度函数 \mathcal{W} 。设 (σ^{0*}, e^{0*}) 代表用于确定图 7 中点 0^* 的四个应力、应变对中的任何一对。假定所有单元都有相同的初始体积能密度 $(1/2)\sigma^{0*} \cdot e^{0*}$,也即面积 00^*e^{0*} 。对应于这一初始态, (43) 和 (44) 中的 $\bar{\mathbf{r}}^{(i)}$ 可写成

$$\bar{\mathbf{r}}^{(1)} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1}\right)^2}, \quad \bar{\mathbf{r}}^{(2)} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}\right)^2}, \quad \bar{\mathbf{r}}^{(3)} = 1 + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \tag{110}$$

因为 $d\sigma^{0*}/de^{0*}$ 对应于参考材料,需由

$$\mathcal{W}_x^{0*} \text{ 或 } \mathcal{W}^{0*} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{d\sigma^{0*}}{de^{0*}} \right) \tag{111}$$

首先得到 \mathcal{W}_x^{0*} 或 \mathcal{W}^{0*} , 其中的 λ 用作为归一化系数。 $\partial \bar{u}_i/\partial x_j$ ($i, j=1,2$) 可由 \bar{u}_i ($i=1,2$) 求得,但 $\bar{\mathbf{r}}^{(3)}$ 中的 $\partial \bar{u}_3/\partial x_3$ 仍然未知,它可由下列条件得到:

$$\mathcal{W}_x^{0*} = \mathcal{W}_y^{0*} = \mathcal{W}_z^{0*} = k \rightarrow d\sigma^{0*}/de^{0*} \tag{112}$$

由 (111) 知, k 对应于初始斜率 $d\sigma^{0*}/de^{0*}$, 从而在 (106) 中为已知量。为了确定图 7 中的等能面位置或点 1, $\partial u_i/\partial \xi_j$ ($i=1,2$) 可由 $\partial \bar{u}_i/\partial x_j$ ($i=1,2$) 通过坐标变换得到,其

中的方向余弦皆由 $\alpha^{(1)}$ 表示。 $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$ 与 \mathcal{V}_0 相等的条件可随后用于确定 $\alpha^{(1)}$ ，也即等能面的位置。图 7 中的点 0^* ($\mathcal{V}_x^{0*}, e_x^{0*}$) 或 (\mathcal{V}^{0*}, e^{0*}) 可视作新的原点，用来确定以后的等能态 (\mathcal{V}^1, e^1), (\mathcal{V}^{1*}, e^{1*}), 等等。

ξ_i ($i=1,2$) 的方向由 $\alpha^{(1)}$ 决定。 u_i 和 $\partial u_i / \partial \xi_i$ ($i=1,2$) 可随之而定。方程 (37) 则可用来确定等能应力

$$\tau_{i,j} = \partial \mathcal{W}_0 / \partial e_{i,j} \quad (113)$$

一般应力 $\sigma_{i,j}$ 则可通过 (49) 由 $\tau_{i,j}$ 求得。一旦求得了 $\partial u_i / \partial \xi_i$ ，则完全的非线性和有限性可自动地保留于 (22) 定义的应变 $\varepsilon_{i,j}$ 中。若想使所得结果在通常意义下得到解释，则可再次利用坐标变换将应力和应变用 x_i 来表示。

对 SAFC-40R 钢^[5] 和 6061-T6 铝^[6] 的单向拉伸已求得了平面解。仅仅由初始弹性模量和加载历史就推得了全范围内的单向数据。机械变形和热变化的计算结果与实验结果非常吻合。拉伸时，所有材料单元都历经了冷却阶段；直到进入非线性变形阶段，其温度仍低于室温。冷却/升温现象与塑性力学中所谓的材料“屈服点”完全无关。它对于加载速度和历史的影响则很敏感。这种影响在几何间断点如裂纹前方尤为显著，因为这里有体积能和表面能的交换现象发生。对正常加载速度下的 1020 紧凑拉伸试件^[7] 而言，裂纹附近温度低于环境温度的时间达数分钟之久。这种现象与塑性力学的预测完全相异，后者认为一俟加载开始就伴随有升温。由表面/体积能密度理论所得到的裂纹扩展特性^[18] 与由塑性力学所求得的结果相比较，在定性和定量上都有很大差别。半平面内动力冲击问题的结果可在 [19] 中找到。局部应变率和应变率历史变化的计算结果表明，材料在冲击载荷下成为高度非均匀材料，从而使得有关膨胀波和变形波速度的传统概念在这里毫无意义。在等能密度理论中，每一等能单元的本构关系是通过计算而非预先假设得到的。在靠近加载点的区域，材料单元经历了强化及软化阶段，这种特性不是塑性力学所能描述的，除非作为预先假定而引进求解过程。

11.2 反平面剪切 另一类较为容易处理的问题是物体在纵轴方向，比如 z 或 ξ_3 方向上受剪切外载作用。除了对于空间坐标的依赖性外，对物体位移的表达式不作任何假设，即

$$u_1 = u_1(\xi_3), \quad u_2 = u_2(\xi_3), \quad u_3 = u_3(\xi_1, \xi_2) \quad (114)$$

此时

$$\partial u_i / \partial \xi_i = 0, \quad (i=1,2,3) \quad (115)$$

从而有

$$\mathcal{V}_3 = k \quad (116)$$

它与参考材料的初始剪切模量有关。由于 $\alpha^{(2)} = 0$ ， $a^{(1)} = a^{(2)}$ 且 $a^{(3)} = 1$ ， $r^{(i)}$ 的分量可简化成

$$\begin{aligned} r^{(1)} &= \sqrt[3]{(a^{(1)})^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right)^2}, & r^{(2)} &= \sqrt[3]{(a^{(1)})^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right)^2} \\ r^{(3)} &= \sqrt[3]{1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right)^2} \end{aligned} \quad (117)$$

其对应的方向余弦为

$$\left. \begin{aligned}
 l_1^{(1)} &= \cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right), \quad l_2^{(1)} = 0, \quad l_3^{(1)} = \sin\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right) \\
 l_1^{(2)} &= 0, \quad l_2^{(2)} = \cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right), \quad l_3^{(2)} = \sin\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right) \\
 l_1^{(3)} &= \frac{\cos(\partial u_2/\partial \xi_3) \sin(\partial u_1/\partial \xi_3)}{\Delta}, \\
 l_2^{(3)} &= \frac{\cos(\partial u_1/\partial \xi_3) \sin(\partial u_2/\partial \xi_3)}{\Delta}, \\
 l_3^{(3)} &= \frac{\cos(\partial u_1/\partial \xi_3) \sin(\partial u_2/\partial \xi_3)}{\Delta}
 \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

$$\Delta = \left[\cos^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\right) + \cos^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right) - \cos\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right) \right]^{1/2} \quad (119)$$

由此可得体积相对于表面积变化率的下列表达式:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{V}_1 &= \frac{(\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}\gamma^{(3)})/\Delta \left[\cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right) \cos\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right) \cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right) - \sin\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right) \cos\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right) \cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right) \sin\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right) \right] - [a^{(1)}]^2}{(\gamma^{(2)}\gamma^{(3)})/\Delta \cos\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right) \left[\cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right) \cos\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right) - \sin\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right) \sin\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right) \right] - [a^{(1)}]^2} \\
 \mathcal{V}_2 &= \frac{(\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}\gamma^{(3)})/\Delta \left[\cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right) \cos\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right) \cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right) - \sin\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right) \cos\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right) \cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right) \sin\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right) \right] - [a^{(1)}]^2}{(\gamma^{(1)}\gamma^{(3)})/\Delta \sin\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right) \cos\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right) \sin\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right) - a^{(1)}} \\
 \mathcal{V}_3 &= \frac{(\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}\gamma^{(3)})/\Delta \left[\cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right) \cos\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right) \cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right) - \sin\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right) \cos\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right) \cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right) \sin\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right) \right] - [a^{(1)}]^2}{(\gamma^{(1)}\gamma^{(2)})/\Delta \cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right) \cos\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right) \sin\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right) - a^{(1)}}
 \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

求等能面位置、等能应力和应变的步骤与 11.1 节中对平面拉伸问题的求解步骤相同。

11.3 轴对称变形 设变形轴对称, 即 y 和 ξ_2 轴重合; 这种情形对应于 $\alpha^{(1)} = 0$ (或 $a^{(1)} = a^{(2)} = 1$)。将 ξ_1 和 ξ_3 轴分别置于径向和切向。位移场为

$$u_1 = u_1(\xi_1, \xi_3), \quad u_2 = u_2(\xi_2, \xi_3), \quad u_3 = u_3(\xi_1, \xi_3) \quad (121)$$

位移梯度中有四个为零, 它们是

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} = 0 \quad (122)$$

由轴对称条件可得

$$\gamma_2 = k \quad (123)$$

其中 k 是一常数, 决定于初始条件, $r^{(i)}$ 的大小为

$$r^{(1)} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right)^2}, \quad r^{(2)} = 1 + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}, \quad r^{(3)} = \sqrt{\left(a^{(3)} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right)^2} \quad (124)$$

其对应的方向余弦为

$$\left. \begin{aligned} l_1^{(1)} &= \cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right), & l_2^{(1)} &= 0, & l_3^{(1)} &= \sin\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right) \\ l_1^{(2)} &= 0, & l_2^{(2)} &= 1, & l_3^{(2)} &= 0 \\ l_1^{(3)} &= \sin\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right), & l_2^{(3)} &= 0, & l_3^{(3)} &= \cos\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

由此可求得 γ_i ($i=1, 2, 3$) 为

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{r^{(1)}r^{(2)}r^{(3)}\cos\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right) - a^{(3)}}{r^{(2)}r^{(3)}\cos\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right) - a^{(3)}} \\ \gamma_2 &= \frac{r^{(1)}r^{(2)}r^{(3)}\cos\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right) - a^{(3)}}{r^{(1)}r^{(3)}\cos\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right) - a^{(3)}} \\ \gamma_3 &= \frac{r^{(1)}r^{(2)}r^{(3)}\cos\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right) - a^{(3)}}{r^{(1)}r^{(2)}\cos\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right) - 1} \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

同样地, 可由初态确定等能面的位置。

受拉伸和压缩外载的圆柱形试件, 其轴对称等能位移已在[13]中求得, 考查重点在于大小/时间/温度间的相互作用和影响。其目的在于显示表面/体积能密度理论可以分析原子、微观和宏观范围内的物理现象。单元尺度的减小不能任意进行, 必须配合着时间和温度的变化。在一种尺度范围内出现的冷却和膨胀现象可能对应着另一尺度范围内的升温 和 扭曲 现象。[13]中给出了体积变化与表面积和温度变化间的相互依赖关系。

12 结 语

在单元大小无限减小的极限过程中可以将热和机械能的影响分解开来。表面/体积能密度理论不需要受到这种限制, 仅仅因为计入了每一材料单元其体积相对于表面积的变化率。引入了可描述完全非线性和不可逆的等能单元概念, 由它可以在不失一般性的前提下, 建立起单向和多维应力应变状态间的一一对应关系。

与传统理论的另一重大差别在于不通过热来定义温度。相反地, 温度变化可直接由位移梯度和体积相对于表面积的变化率求得。要着重指出的是方程(9)并非 Kelvin 定律^[1]

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\alpha_0 K_T}{c_v} \left(\frac{\Delta V}{V} \right) \quad (127)$$

其中仅含有体积的变化。参数 α_0 , K_T 和 c_v 分别是热膨胀系数, 等温压缩模量和体积不变时单位体积内的比热。(127) 忽略了表面积变化对温度的影响, 因而不能描述温度的涨落。一旦 Θ 由方程 (9) 求得, 有关传热和热系数的许多唯象定律都可得到验证。为此, 可定义一能量耗散能力系数 C_Θ :

$$C_\Theta = d\mathcal{D}/d\Theta \quad (128)$$

它对应于经典传热理论中的传热能力系数。由热传导的 Fourier 定律可得热传导系数 k_i :

$$k_i = C_\Theta \left(\frac{\Delta V}{\Delta A} \right)_i \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \right), \quad i = x, y, z \quad (129)$$

其中 Δx_i 为笛卡儿空间变量的增量, Δt 则是时间增量。由 (128) 中的 C_Θ 可知热传导系数具有方向性并与速率有关。这些特征不可能由传热理论得到。热辐射中的 Stefan-Boltzmann 参量 η_i 可由下式推得:

$$\frac{\Delta \mathcal{D}}{\Delta t} \left(\frac{\Delta V}{\Delta A} \right)_i = \eta_i (\Theta^4 - \Theta_0^4), \quad i = x, y, z \quad (130)$$

其中 Θ_0 为环境温度, η_i 则是唯一的未知量。热对流中的薄膜系数 h_i 也具有各向异性特征:

$$h_i = C_\Theta \left(\frac{\Delta V}{\Delta A} \right)_i \frac{1}{\Delta t}, \quad i = x, y, z \quad (131)$$

它将逐点变化并与速率有关。

附带要指出的是, 方程 (9) 中的 $\Delta \mathcal{D}/\Delta e$ 与经典热力学中用以确定固体、流体和气体相变的潜热有关, 但这只有当耗散能 \mathcal{D} 与传热量 Q 相等且 $\Theta \rightarrow T$ 时才成立, 即

$$\frac{\Delta \mathcal{D}}{\Delta e} \rightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta V} = T \frac{\Delta S}{\Delta V} \quad (132)$$

ΔQ 在这里代表热力学状态由温度 T 变化到 $T + \Delta T$ 时每单位物质所需的热量, ΔV 则是比体积的变化量。熵的相应变化量则为 ΔS 。相变过程与速率有关, 但经典热力学没有或不能考虑这一特性。

因为本构关系和/或状态方程是由推导而不是由预先假定求得, 所以表面/体积能密度理论一般可应用于固体、流体和气体。层流向湍流的转捩, 流体与浸没物体间的分离, 气体的凝聚等等例子可在 [9] 中找到。一旦计入了表面能和体积能间的相互转换, 经典流体力学中的边界层和粘性次层理论就不再需要了。固体/流体界面附近的局部滑动现象是 Navier-Stokes 公式不能解释的另一例子。表面/体积能密度的潜力只有在描述由化学反应、电磁场、原子力等引起的与速率有关的现象时才能得到充分发挥。这种应用上的广泛性并不难实现, 因为新理论只用到了两个基本变量: 对任何科学分支都适用的温度和位移。

参 考 文 献

- 1 Sir William Thompson, *Mathematical and Physical Papers*, Vol. 3, Cambridge University Press, London, 1890, pp. 63–82, and "On thermo-elastic and thermo-magnetic properties of matter", *Quarterly J. Math.* 1. 57–77 (1857).
- 2 G. C. Sih, "Thermal/mechanical interaction associated with the micromechanisms of material

- behavior", Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University Technical Report, February 1987.
- 3 W. S. Farren and G. I. Taylor. "The heat developed during plastic extension of metals", *Proc. Royal Soc. London, Ser. A*, **107**, 422—451 (1925), G. I. Taylor and H. Quinney. "The latent energy remaining in a metal after cold working", Vol. 143, pp. 307—326 (1934) and H. Quinney and G. I. Taylor. "The emission of the latent energy due to previous cold working when a metal is heated", Vol. 163, pp. 157—181 (1937).
 - 4 E. Rasch, "Warme von gänge, beim Lagen von Metallen", Verein. Deutscher Ingenieure Forschungshaft, No. 41, p. 53 (1907).
 - 5 G. C. Sih and D. Y. Tzou, "Irreversibility and damage of SAF-40R steel specimen in uniaxial tension", *Theoret. Appl. Fracture Mech.*, **7** (1), 23—30 (1987).
 - 6 G. C. Sih, F. L. Lieu and C. K. Chao, "Thermal/mechanical damage of 6061-T6 aluminum tensile specimen", *Theoret. Appl. Fracture Mech.*, **7** (2), 67—78 (1987).
 - 7 G. C. Sih, D. Y. Tzou and J. G. Michopoulos, "Secondary temperature fluctuation in cracked 1020 steel specimen", *Theoret. Appl. Fracture Mech.*, **7** (2), 74—87 (1987).
 - 8 G. C. Sih, "Mechanics and physics of energy density theory", *Theoret. Appl. Fracture Mech.*, **4** (3), 157—173 (1985).
 - 9 G. C. Sih, *Energetics of Irreversibility*, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), Amsterdam, in preparation.
 - 10 L. Onsager, "Reciprocal relations in irreversible processes. I", *Phys. Rev.*, **37**, 405—426, and "Reciprocal relations in irreversible processes. II", Vol. 38, pp. 2265—2279 (1931).
 - 11 L. Onsager, "Theories and problems of liquid diffusion", *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **46**, 241—265 (1945).
 - 12 L. Boltzmann, "Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen", *Wien. Akad. Sitz. Ber.*, **66**, 275—370 (1872).
 - 13 G. C. Sih and C. K. Chao, "Scaling of size/time/temperature related to damage in uniaxial tensile and compressive specimens", *Theoret. Appl. Fracture Mech.*, in press.
 - 14 E. Cosserat and F. Cosserat, *Theorie des Corps Deformables*, Hermann, Paris (1909).
 - 15 R. A. Toupin, "Theories of elasticity with couple-stresses", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **17**, 85—112 (1964).
 - 16 R. D. Mindlin, "Micro-structure in linear elasticity" *Arch. Rational Mech. Anal.*, **16**, 51—78 (1964).
 - 17 R. F. Landel and R. F. Fedors, "Rupture of amorphous, unfilled polymers", in: *Fracture Processes in Polymeric Solids: Phenomena and Theory*, Interscience, New York, pp. 361—485 (1964).
 - 18 D. Y. Tzou and G. C. Sih, "Thermal/mechanical interaction of subcritical crack growth in tensile specimen", *Theoret. Appl. Fracture Mech.*, **10** (1), in press.
 - 19 G. C. Sih and D. H. Song, "Time dependent damage in half-plane—Part 1: Displacement loading; Part 2: Traction loading", *Theoret. Appl. Fracture Mech.*, **9** (3), 199—228.

THERMOMECHANICS OF NONEQUILIBRIUM AND IRREVERSIBLE PROCESSES (II)

G. C. Sih

Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, PA 18015, USA

Abstract

Reconciliation of thermal and mechanical interdependence is made possible by casting away the concept of heat. Defined are the dissipation and available

energy density as two mutually exclusive quantities; thermal and mechanical changes become two aspects of the same process that coexist and are in continual operation. This is accomplished by interlacing the rotation, deformation and change in element size into one single operation; irreversibility is embedded inherently into the theory. No a priori assumption needs to be made on the constitutive relations which are, in fact, derived for each individual element and time increment. Only the initial slope of the reference material and load history need to be specified. Instead, the surface and volume energy density are assumed to be exchangeable without letting the change of volume with surface area to vanish in the limit, a simplification of classical physics and continuum mechanics that results in the decoupling of thermal and mechanical effects. Complete nonlinearity and finiteness of deformation are retained such that boundary problems can be solved directly by specifying the tractions and/or displacements. Nonequilibrium/irreversible solutions are shown to possess definite limits and to be bounded by the equilibrium/irreversible states whose solutions are proved to be unique. The existence of the isoenergy density function provides an elegant means of resolving the multidimensionality of the problem; the translation of unidimensional data to multidimensional states.

Keywords *nonequilibrium; irreversibility; thermomechanics; dissipation energy density; available energy density; isoenergy density; isoenergy surface*

香港大学机械工程系卢天健翻译整理

《中国力学文摘》改为公开发行业征订

《中国力学文摘》自1987年创刊以来,得到读者们的热诚支持与关切,编辑部深为感激。为了更加方便读者,使刊物更广泛地发挥作用,自1989年起,《中国力学文摘》由天津市邮政局报刊发行处向全国发行,邮发代号为6-31。全国各邮政局、所均办理订刊手续。本刊每期6.75元,全年四期共27.00元。中国国际图书贸易总公司代理国外订刊手续。

需补购1987年、1988年《中国力学文摘》者,请与本刊编辑部联系。编辑部设在北京中关村(邮政编码100080)中国科学院力学研究所内。1987年全年刊售价8.00元;1988年全年刊售价11.20元。请在汇款单附言栏上写明购买《中国力学文摘》的年份及份数。

《中国力学文摘》编辑部供稿