应变相关三维蠕变损伤和破坏的热力学基础

K.Burke
美国 Seton Hall 大学数学系
F.A.Cozzarelli
美国 Buffalo 纽约州立大学机械与航空航天工程系

提要 应用热力学定律阐明了非等温多维蠕变损伤和破坏的概念. 从以应力、温度和损伤诸函数的时间积分表示的 Gibbs 自由能泛函出发，并借助热力学第二定律，导出了关于应变、熵和损伤的本构律，它们一般足以包括现有的各种理论. 然后，选取更具体的 Gibbs 自由能形式，得到了应变相关损伤理论的控制本构律. 此外还对耦合和准静态非耦合两种情况，讨论了应力、位移、温度和损伤的边值问题的表述.

1 引 言

高温下结构构件蠕变损伤和破坏的重要性不可过分强调，因为安全设计的最重要要求之一，显然是构件在其有效寿命期间内不发生破坏. 由于涉及连续介质力学和物理冶金学的复杂原理，所以确定蠕变损伤和破坏的概念是困难的. 一方面，有一些主要以宏观连续介质力学为前提建立起来的方法. 其中有 Hoff[1] 的延性破坏理论，Kachanov[2] 的分布损伤和脆性破坏理论，以及后来的各种改进，如 Rabotnov[3] 的理论，它将第三阶段蠕变归因于损伤. 另一方面，有一些主要以与损伤有关的微观物理冶金学的观测为基础建立起来的方法，如对声速和电阻率变化的观测，中子和 X 射线衍射的研究，以及借助于光学显微镜或电子显微镜对实际孔洞计数的工作. 最近，Piatti et al[4] 发展了几种非常灵敏的密度差测量技术，它们可以给出由于孔洞的成核及扩展而造成的损伤的指标. Belloni et al[5,6] 利用以这种密度测量技术从钢中得到的数据，将连续介质力学和物理冶金学方法结合起来，发展了一种应变相关损伤理论. 此理论实质上是 Kachanov 理论的一种修改. 这个初始的应变相关模型，已由 Belloni, Bernasconi, Cozzarelli, Lee & Piatti[7-9] 扩展到更为一般的载荷和材料.

在此，我们的主要目的是，借助于热力学定律来阐明非等温三维蠕变损伤和破坏的概念，并且获得损伤本构律的有效条件. 我们采用了能量泛函法（见[10, 11]），应用的方式与 Chang & Cozzarelli[12] 对非线性热粘弹性材料以及 Cozzarelli & Huang[13] 对承受热和辐射作用诱发蠕变的材料所采取的方式相类似. 我们将不使用 Chaboche[15] 以及 Lemaitre & Chaboche[16] 在研究损伤时所使用的内变量方法（见[14]），但我们清楚地认识到这两种方法是完全一致的. 我们还提出了关于应力、位移、温度和损伤的边界值的正

确表述问题，并利用[17]给出的结果对唯一性问题作了一些简要的观察．尽管我们的大部分注意力是针对[5—9]中提出的应变相关损伤理论，但我们的结果对其他损伤理论也是适用的（例如[2，3]）．

在第2节中，针对承受时间相关拉应力或压应力历史的非均匀材料，我们讨论了应变相关蠕变损伤理论，并特别注意了具有某些依赖于温度（而温度又是在空间和时间上变化的）的材料参数的多轴应力状态的表述．然后在第3节中，我们假定了一个含有应力、温度增量、损伤增量诸函数对时间积分的幂之积的Gibbs自由能泛函，并借助于热力学第一定律和第二定律，导出了关于应变、熵和损伤增量的三维本构律，其中应变和熵的本构律为显式的，损伤增量的本构律则为隐式的．通过选择更具体的Gibbs自由能形式，并引进破坏发生时临界损伤的概念，便可从这些本构律得出各种损伤理论，我们并以第2节中讨论的应变相关蠕变损伤理论为例来详细说明此问题．

在第4节的开始部分提出了一般耦合边值问题的表达式．它由关于应力、应变、位移、温度、熵和损伤的18个方程联立构成．象Kachanov[2]那样，我们首先考虑"潜在破坏"时期，它延伸至达到临界损伤并开始发生破坏的时刻．然后考虑"破坏扩展"时期，它延续到材料不再能够承受载荷作用的时刻．在第一时期中，我们的问题属于固定边界的边值问题；而在第二时期中，我们遇到的是运动着的边界，并且是其特点类似于Stefan热传导问题[18]的边值问题．第4节的最后是非耦合准静态应力边值问题的表达式，其中包括应力相容场的控制方程和关于解的唯一性的简要评述．

2 应变相关蠕变损伤理论

在对蠕变破坏的研究中，损伤概念的引入有各种不同的方法．应用最广泛的是Kachanov[2]提出的方法．他采用一些简单的想法，根据一维拉伸试验定义一个称为连续量的函数

$$\phi(t)=A_r(t)/A_0 \tag{1}$$

式中A_0是试件的初始横截面积，$A_r(t)$是任意瞬时能够抵抗载荷的有效无损面积．于是，可通过连续量引进"损伤"$\omega(t)$：

$$\omega(t)=1-\phi(t)=(A_0-A_r(t))/A_0 \tag{2}$$

$\omega(t)$定为从0到1，因为材料经历从初始无损状态（$A_r=A_0$）转变到临界损伤和破坏的终态($A_r=0$)．Kachanov还假定，损伤增长率遵循一维幂律公式

$$\dot{\omega}(t)=\beta\left[\frac{\sigma(t)}{1-\omega(t)}\right]^{\nu} \tag{3}$$

式中σ是拉应力；β，ν是材料的损伤常数．注意，方程（3）给出的损伤并不是直接应变相关的．

Belloni et al[5,6]试图通过测量密度变化[4]来估计方程（3）中的各个量，并定义无量纲损伤量为

$$D(t)=-\Delta\rho/\rho_0=(\rho_0-\rho(t))/\rho_0 \tag{4}$$

式中ρ_0是无损材料的初始密度，$\rho(t)$为时刻t时的密度．与Kachanov损伤ω类似，损伤量$D(t)$定为从0变到破坏时的临界值D_r，D_r为材料常数．这些试验表明，蠕变应变ϵ_c对损伤累积有极大的影响，并且同在一维恒定拉应力σ_0情形下用应变相关的幂律公式

$$D(t)=B\epsilon_c(t)^{\alpha}\sigma_0^{\gamma}t^{\delta} \tag{5}$$

所得的数据吻合良好．式中B，α，γ，δ为特定恒温下正的材料损伤常数．如果我们忽略瞬态蠕变，则蠕变应变可由下面的 Norton 幂律公式给出：

$$\epsilon_c(t)=K\sigma_0^n t \tag{6}$$

式中K，n是在恒定温度下的正的材料常数．

Cozzarelli & Bernasconi[7] 将方程（5）推广到一维可变拉应力的情形．Lee & Cozzarelli[9] 进一步将它推广到拉压组合的一维应力，还推广到非均匀材料的情形．于是，方程（5）和（6）推广为

$$\widetilde{D}(x,t)=B(x)\left\{K(x)\int_0^t\sigma(x,t)^n U[\sigma(x,t)]dt\right\}^{\alpha}\left\{\int_0^t\sigma(x,t)^{\gamma/\delta}U[\sigma(x,t)]dt\right\}^{\delta} \tag{7a}$$

$$\epsilon_c(x,t)=K(x)\int_0^t\sigma(x,t)^n dt \tag{7b}$$

式中$\sigma(x,t)$现在可随位置和时间而变化．方程（7a）中括号里第一项为蠕变应变；$U(\sigma)$为单位阶跃函数，引入此函数是为了模拟许多材料在压缩条件下只产生微小损伤的实验观测结果；$B(x)$和$K(x)$（不包括幂α，γ，δ，n）可能因材料的非均匀性而随位置发生变化，并且

$$\widetilde{D}(x,t)=D(x,t)-D_0(x) \tag{8}$$

式中$D_0(x)$是初始非均匀损伤状态．由于假定$t<0$时$\sigma(t)$为0，所以可令方程（7）中的下限值为0．如前面指出的，为了简单起见，方程（5）—（7）中没有包括瞬态蠕变，因此方程（7）中限定应力只随时间缓慢地变化．对于较快的加载条件，如应力周期变化的情况，则不仅必须应用更一般的蠕变律（例如见[12，19]），而且可能除蠕变损伤外还必须包括疲劳损伤（见[15]）．

有趣的是我们应该注意，如果方程(7a)限于只承受拉伸蠕变的均匀材料，则对于（7a）中$\gamma=n\delta$和（3）中$\nu=n$的特殊情况，这个应变相关损伤率可以表达成同 Kachanov 定律（3）的积分类似的形式．于是我们得到

$$1-[1-\omega(t)]^{n+1}=\beta(n+1)\int_0^t\sigma^n(t)dt \tag{9a}$$

$$D(t)^{1/(\alpha+\delta)}=(BK^{\alpha})^{1/(\alpha+\delta)}\int_0^t\sigma^n(t)dt \tag{9b}$$

这可建立上述这些特殊条件下两个公式表达之间的相似关系，只要我们再设$BK^{\alpha}=[\beta(n+1)]^{\alpha+\delta}$及$D=[1-(1-\omega)^{n+1}]^{\alpha+\delta}$．

本文中我们采用比一维方程（7）更进一步的方法，允许参数B和K也随依赖于空间和时间的温度增量

$$\widetilde{T}(x,t)=T(x,t)-T_0(x) \tag{10}$$

而变化，式中$T_0(x)$是参考温度．按照与[7,9]所述导出方程（7）相同的方法，我们现在得到

$$\widetilde{D}(x,t)=\left\{\int_0^t K[x,\widetilde{T}(x,t)]\sigma(x,t)^n U[\sigma(x,t)]dt\right\}^{\alpha} \times\left\{\int_0^t B[x,\widetilde{T}(x,t)]^{1/\delta}\sigma(x,t)^{\gamma/\delta}U[\sigma(x,t)]dt\right\}^{\delta} \tag{11a}$$

$$\epsilon_c(x,t)=\int_0^t K[x,\widetilde{T}(x,t)]\sigma(x,t)^n dt \tag{11b}$$

本研究并不限于一维情况，因此，必须将方程（11）推广到多轴情形。对于蠕变律，我们将采用各向同性不可压缩定常 Mises 型蠕变律（见[20]对于可压缩性及瞬态蠕变的讨论）

$$\epsilon_{cij}(x_i,t)=\int_0^t C[x_i,\widetilde{T}(x_i,t)]J_2^m s_{ij}dt \tag{12}$$

式中 $s_{ij}=\sigma_{ij}-(1/3)\sigma_{kk}\delta_{ij}$ 为应力偏量，$J_2=(1/2)s_{ij}s_{ij}$ 为应力偏量的第二不变量，且式中

$$m=(n-1)/2, \qquad C=3^{(n+1)/2}K/2 \tag{13}$$

在选择多轴损伤率时，我们采用最简单的方法，假定三维损伤是由最大主应力算得的标量（见[21]），而对于应变相关损伤则是由相应的蠕变应变算得。因此，方程（11a）推广为

$$\widetilde{D}(x_i,t)=\left\{\int_0^t \dot{\epsilon}_{c1}(x_i,t)\,U(\sigma_1)dt\right\}^a\left\{\int_0^t B[x_i,\widetilde{T}(x_i,t)]^{1/b}\sigma_1(x_i,t)^{\gamma/b}U(\sigma_1)\,dt\right\}^b \tag{14}$$

式中 σ_1 是主应力 σ_1，σ_2，σ_3 中的最大值，$\dot{\epsilon}_{c1}$ 是由方程（12）得出的相应的蠕变应变律，即

$$\dot{\epsilon}_{c1}=\frac{C[x_i,\widetilde{T}(x_i,t)]}{2^m 3^{m+1}}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]^m(2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3) \tag{15}$$

对于更一般的多轴损伤律的讨论，可参阅 [9,15] 及 Martin & Leckie[22]，Hayhurst & Leckie[23] 的工作。下节我们将证明方程（14）与热力学定律是一致的。

3 损伤的热力学基础

3.1 *热力学第一定律和第二定律* 考虑一连续介质，它承受经过其表面并传遍整个体积的输入功W和热输入Q。此输入的能量转化为内部动能和势能U的变化。这种变化不仅同速度场 v_i，应变场 ϵ_{ij} 及温度场 T 有关，而且还同因在孔洞处产生新的内表面积而形成的损伤场D有关。因此，热力学第一定律的常用总体形式表示为

$$\dot{W}+\dot{Q}=\dot{U} \tag{16}$$

式中字母上方黑圆点表示时间的变化率。

对于无穷小理论，将$\dot{W}$，$\dot{Q}$，$\dot{U}$ 按通常的方式（见[24]）写成区域 τ 上的体积分。于是

$$\dot{W}=\int_\tau F_i v_i dV+\int_\tau \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\sigma_{ij}\,dV+\int_\tau v_i\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}dV \tag{17}$$

$$\dot{Q}=-\int_\tau \frac{\partial q_i}{\partial x_i}\,dV+\int_\tau \rho_0 r dV \tag{18}$$

$$\dot{U}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\tau \frac{1}{2}\rho_0\,v_i v_i\,dV+\int_\tau \rho_0 u\,dV\right) \tag{19}$$

式中 F_i 是单位体积的彻体力，$\partial q_i/\partial x_i$ 为热流矢量速率 q_i 的散度，ρ_0 为无损材料的质量密度并假定为常数，r 为热源分布率的强度，u 为比内热能。

联立方程（16）—（19），并引入 Gibbs 自由能 $G=(\sigma_{ij}\epsilon_{ij}/\rho_0)-u+Ts$（式中 s 是

熵），利用运动方程，可得到热力学第一定律的局部形式为

$$-\epsilon_{ij}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t}-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\rho_0 r=\rho_0\left(-\frac{\partial G}{\partial t}+s\frac{\partial T}{\partial t}+T\frac{\partial s}{\partial t}\right) \tag{20}$$

热力学第二定律可表示成常用的不等式形式[24]

$$\rho_0 T\frac{\partial s}{\partial t}-\rho_0 r+\frac{\partial q_i}{\partial x_i}-\frac{q_i}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\geqslant 0 \tag{21}$$

最后，联立方程（20），（21），并引入相对于初始非均匀状态温度增量的定义（见方程（10）），对于无穷小理论我们可得

$$-\epsilon_{ij}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial G}{\partial t}-\rho_0 s\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial t}-\frac{q_i}{T_0}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial x_i}\geqslant 0 \tag{22}$$

在此不等式中，我们将σ_{ij}，$\widetilde{T}$和损伤增量$\widetilde{D}$（见方程（8））取为基本的热力学变量，并且为方便起见将$\widetilde{D}$取成无量纲形式。

3.2 损伤本构方程 我们假定Gibbs自由能泛函的表达式为

$$G=\sum_k[f_k(\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D})+g_k(\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D})\{\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D}\}_k] \tag{23}$$

式中f_k和g_k分别是σ_{mn}，$\widetilde{T}$，$\widetilde{D}$的标量和张量函数，符号$\{\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D}\}_k$用来表示$\sigma_{mn}$，$\widetilde{T}$和$\widetilde{D}$诸函数对时间积分的幂之积。假定了$G$的这种一般形式，通过热力学理论不仅可以得出应变相关损伤律（方程（14）），而且还可以得到其他的如Kachanov[2]和Rabotnov[3]的损伤率。

对方程（23）进行微分，我们得到

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\sum_k\Bigg[\left(\frac{\partial f_k}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f_k}{\partial\widetilde{T}}\dot{\widetilde{T}}+\frac{\partial f_k}{\partial\widetilde{D}}\dot{\widetilde{D}}\right)+\left(\frac{\partial g_k}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial g_k}{\partial\widetilde{T}}\dot{\widetilde{T}}+\frac{\partial g_k}{\partial\widetilde{D}}\dot{\widetilde{D}}\right)$$

$$\times\{\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D}\}_k+\overline{\{\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D}\}}^{\bullet}_k g_k\Bigg] \tag{24}$$

式中$(\dot{\ })$表示对时间求偏导数。将（24）代入不等式（22）并整理各项，我们得到

$$\left[-\epsilon_{ij}+\rho_0\sum_k\left(\frac{\partial f_k}{\partial\sigma_{ij}}+\{\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D}\}_k\frac{\partial g_k}{\partial\sigma_{ij}}\right)\right]\dot{\sigma}_{ij}+\Bigg[-\rho_0 s+\rho_0\sum_k\Bigg(\frac{\partial f_k}{\partial\widetilde{T}}$$

$$+\{\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D}\}_k\frac{\partial g_k}{\partial\widetilde{T}}\Bigg)\Bigg]\dot{\widetilde{T}}+\rho_0\sum_k\left(\frac{\partial f_k}{\partial\widetilde{D}}+\{\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D}\}_k\frac{\partial g_k}{\partial\widetilde{D}}\right)\dot{\widetilde{D}}$$

$$+\rho_0\sum_k\overline{\{\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D}\}}^{\bullet}_k g_k-\frac{q_i}{T_0}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial x_i}\geqslant 0 \tag{25}$$

在不等式（25）中，我们首先令基本热力学变量$\dot{\sigma}_{ij}$，$\dot{\widetilde{T}}$，$\dot{\widetilde{D}}$的系数等于零，于是可以得到本构关系式

$$\epsilon_{ij}=\rho_0\sum_k\left(\frac{\partial f_k}{\partial\sigma_{ij}}+\{\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D}\}_k\frac{\partial g_k}{\partial\sigma_{ij}}\right. \tag{26a}$$

$$s=\sum_k\left(\frac{\partial f_k}{\partial\widetilde{T}}+\{\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D}\}_k\frac{\partial g_k}{\partial\widetilde{T}}\right)\tag{26b}$$

$$0=\sum_k\left(\frac{\partial f_k}{\partial\widetilde{D}}+\{\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D}\}_k\frac{\partial g_k}{\partial\widetilde{D}}\right)\tag{26c}$$

注意，方程（26c）一般将得出损伤增量变量$\widetilde{D}$的一个隐式关系．然后可以得出，不等式（25）得以满足的必要条件是

$$\rho_0\sum_k\overline{\{\sigma_{mn},\dot{\widetilde{T}},\widetilde{D}\}}_k g_k-\frac{q_i}{T_0}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial x_i}\geqslant 0\tag{27}$$

如果我们引入 Fourier 热传导定律

$$q_i=-k_{ij}\partial\widetilde{T}/\partial x_j\tag{28}$$

式中k_{ij}为正定的热导率张量，并定义能量耗散率为

$$\Lambda=\rho_0\sum_k\overline{\{\sigma_{mn},\dot{\widetilde{T}},\widetilde{D}\}}_k g_k\tag{29}$$

则不等式（27）变为

$$\Lambda+\frac{k_{ij}}{T_0}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial x_j}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial x_i}\geqslant 0\tag{30}$$

既然不等式（30）对于（$\partial\widetilde{T}/\partial x_i$）的所有值（包括（$\partial\widetilde{T}/\partial x_i$）$=0$的特殊情况）都必须成立，那就必有

$$\Lambda\geqslant 0\tag{31}$$

3.3 *特例——应变相关损伤律* 为了简洁起见，我们在本节中将不明显写出自变量x_i．在 Gibbs 自由能泛函的表达式（23）中我们将选取

$$g_1(\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D})=\sigma_{mn},\quad \{\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D}\}_1=\frac{1}{\rho_0}\int_0^t C(\widetilde{T}(t))J_2(t)^m s_{mn}(t)\,dt\tag{32a}$$

式中所有的量均在方程（12），（13）中定义，且

$$f_1(\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D})=\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{1+\nu_e}{2E}\left(\sigma_{pq}\sigma_{pq}-\frac{\nu_e}{1-\nu_e}I_1^2\right)+\alpha_T\widetilde{T}I_1\right]\tag{32b}$$

式中ν_e，E分别是弹性 Poisson 比和杨氏模量，$I_1=\sigma_{pp}$为应力第一不变量，α_T为热膨胀系数．于是，由于在本文中我们没有涉及熵定律的形式，所以我们将简单地令

$$f_2(\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D})=g(\widetilde{T}),\qquad g_2(\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D})=0\tag{32c}$$

式中$g(\widetilde{T})$是温度增量的一个未定函数．最后，我们选

$$f_3(\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D})=-\frac{\mu}{2\rho_0}\widetilde{D}^2,\quad g_3(\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D})=\frac{\mu}{\rho_0}\widetilde{D}$$

$$\{\sigma_{mn},\widetilde{T},\widetilde{D}\}_3=\left[\int_0^t\dot{\epsilon}_{c1}(t)U(\sigma_1(t))\,dt\right]^a\times\left[\int_0^t B(\widetilde{T}(t))^{1/b}\sigma_1(t)^{\gamma/b}U(\sigma_1(t))\,dt\right]^b\tag{32d}$$

式中μ是材料常数，其物理意义将于稍后讨论．其他量均在方程（14）和（15）中定义．

然后，由方程（26c）和（32）可得损伤律为

$$\widetilde{D}(t)=\left[\int_0^t \dot{\epsilon}_{c1}(t)U(\sigma_1(t))dt\right]^{\alpha}\left[\int_0^t B(\widetilde{T}(t))^{1/\delta}\sigma_1(t)^{\gamma/\delta}U(\sigma_1(t))dt\right]^{\delta} \tag{33}$$

它与第2节的应变相关损伤律（方程（14））相同．此外由方程（26a）和（32），应变为

$$\epsilon_{ij}=\frac{1+\nu_e}{E}\left(\sigma_{ij}-\frac{\nu_e}{1+\nu_e}I_1\delta_{ij}\right)+\alpha_T\widetilde{T}\delta_{ij}+\int_0^t C(\widetilde{T}(t))J_2(t)^m s_{ij}(t)dt \tag{34}$$

它就是第2节给出的不可压缩定常蠕变情况的各向同性应力幂律（方程(12)）加上通常的各向同性线性热弹性项．用类似的简单方式，可得出其他各种损伤律和蠕变律．

最后，由方程（29）和（32）可得出能量耗散率为

$$\Lambda=2CJ_2^{m+1}+\mu\widetilde{D}\dot{\widetilde{D}} \tag{35}$$

式中第一项为蠕变应变结果，第二项为损伤结果．由此可看出，μ是与损伤所引起的能量耗散有关的材料常数，它具有单位体积能量的单位．由于假定所有材料常数均为正，且定义J_2为非负，还有$\widetilde{D}\geqslant 0$，$\dot{\widetilde{D}}\geqslant 0$（因为方程（33）中两个被积函数均为非负），所以可知方程(35)中每一项均为非负，从而有$\Lambda\geqslant 0$．因此本文表述形式同热力学第二定律是一致的．

4　边值问题的表述

4.1　*一般耦合问题的完备方程组*　利用方程（23），（26）和（28），可将耦合能量方程（20）改写成紧凑的形式

$$\rho_0 r+k_{ij}\frac{\partial^2\widetilde{T}}{\partial x_i\partial x_j}+\rho_0\sum_k\{\sigma_{mn},\dot{\widetilde{T}},\widetilde{D}\}_k g_k-\rho_0 T\dot{s}=0 \tag{36}$$

可看出式中第三项为能量耗散Λ（方程(29)）．为方便起见，把本构方程（26 a,b,c）的序号改写为方程（37a,b,c）．最后，加入通常无穷小理论的运动方程和应变位移关系

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+F_i=\rho_0\ddot{u}_i,\qquad \epsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{38a,b}$$

式中u_i是位移场，F_i是彻体力．方程（36）—(38）是关于变量σ_{ij}，ϵ_{ij}，u_i，$\widetilde{T}$，$\widetilde{D}$和s的18个方程的联立方程组．正如Kachanov[2]所描述的，它们受两个不同时间区间内两组边界条件和初始条件的约束．仿照[2]，我们将第一时间区间称为“潜在破坏”时期，它由$0\leqslant t\leqslant t_{ri}$确定，这里载荷是在$t=0$时施加的，$t_{ri}$为总损伤$D=\widetilde{D}+D_0$（见方程(8)）首次达到（在某点上）破坏临界值$D_r$的时刻．在此潜在破坏时期内可特别规定作用于边界上的各牵引力，即

$$\sigma_{ij}n_j=T_i^{(n)}(x_i,t)\quad 作用于S上 \tag{39}$$

式中x_i是固定边界S上的坐标，$T_i^{(n)}$是给定的牵引力矢量．

在时刻t_{ri}，破坏前缘开始在材料内部扩展．仍按[2]称$t\geqslant t_{ri}$的第二个时间区间为“破坏扩展”时期，在此时期内我们遇到的是运动边界的边值问题，它同Stefan热传导问题有些类似，如示意图1．图中$\Sigma(t)$是在其上$D=D_r$的运动边界，区域$\tau_1(t)$假定无承载

能力，即该区域已“挖除”了．现在必须对区域 $\tau_2(t)$ 联立求解方程（36）—（38），其中各牵引力规定作用在 $S_2(t)$ 上，且利用在 $\Sigma(t)$ 上损伤为指定常数这一事实，便可得到（见[2]）边界条件

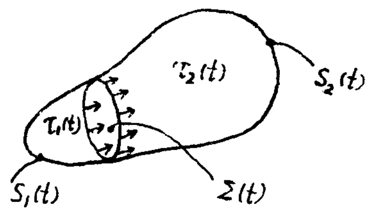

图1 破坏扩展时期

$$\frac{dN}{dt}=-\frac{\partial D}{\partial t}\Big/\frac{\partial D}{\partial N}\quad \text{作用于 } \Sigma(t) \text{ 上} \tag{40}$$

式中 N 为 $\Sigma(t)$ 的法向坐标．

4.2 应变相关损伤的非耦合准静态问题 为简单起见忽略热学力学的耦合、彻体力与惯性，再利用3.3节中给出的应变相关损伤律和蠕变律．于是，假定温度是预先给定的并因而不再需要方程（36）和（37b），而方程（38a），（38b），（37a）和（37c）则分别变为

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=0,\qquad \epsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{41a,b}$$

$$\epsilon_{ij}=\frac{1+\nu_e}{E}\left(\sigma_{ij}-\frac{\nu_e}{1+\nu_e}I_1\delta_{ij}\right)+\alpha_T\widetilde{T}\delta_{ij}+\int_0^t C(\widetilde{T}(t))J_2(t)^m s_{ij}(t)\,dt \tag{41c}$$

$$\widetilde{D}(t)=\left[\int_0^t \dot{\epsilon}_{c1}(t)U(\sigma_1(t))\,dt\right]^{\alpha}\left[\int_0^t B(\widetilde{T}(t))^{1/\delta}\sigma_1(t)^{\gamma/\delta}U(\sigma_1(t))\,dt\right]^{\delta} \tag{41d}$$

（41a—c）是关于 σ_{ij}，ϵ_{ij} 和 u_i 的15个方程．可根据给定的边界条件先解出此方程组，然后将结果代入方程（41d）计算损伤，以便跟踪上节讨论过的破坏扩展过程．因此在非耦合问题中不仅温度，而且损伤都与联立场方程非耦合．假定牵引力已给定，利用相容性方程

$$e_{ikm}e_{jln}\frac{\partial^2\epsilon_{kl}}{\partial x_m\partial x_n}=0 \tag{42}$$

我们当然可以由方程（41a—c）得出一个应力表达式．方程（42）中 e_{ijk} 为交错张量．按照一般的方法（例如见[25]），我们得到应力相容方程（ϵ_{cij} 为蠕变应变张量）

$$(1+\nu_e)\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_k\partial x_k}+\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_i\partial x_j}+E\alpha_T\left(\frac{1+\nu_e}{1-\nu_e}\frac{\partial^2\widetilde{T}}{\partial x_k\partial x_k}\delta_{ij}+\frac{\partial^2\widetilde{T}}{\partial x_i\partial x_j}\right)$$
$$+E\left(\frac{\partial^2\epsilon_{cij}}{\partial x_k\partial x_k}-\frac{\partial^2\epsilon_{cjk}}{\partial x_i\partial x_k}-\frac{\partial^2\epsilon_{cik}}{\partial x_j\partial x_k}-\frac{\nu_e}{1-\nu_e}\frac{\partial^2\epsilon_{ckl}}{\partial x_k\partial x_l}\delta_{ij}\right)=0 \tag{43}$$

$$\epsilon_{cij}=\int_0^t C(\widetilde{T}(t))J_2(t)^m s_{ij}(t)\,dt \tag{44}$$

其中我们利用了恒等式 $\epsilon_{ckk}=0$．求解过程要求解相容方程（43）．此时对于应力 σ_{ij} 需补充平衡方程（41a）并给出边界牵引力．然后可由方程（44）和（41d）求出蠕变应变和损伤．

正如上节中讨论过的，将有一个具有固定边界的潜在破坏时期，随后是一个具有运动边界的破坏扩展时期．对于潜在破坏时期，我们有一个与文献[17]已证明解的唯一性的同一类型问题．对于破坏扩展时期，唯一性问题要困难得多，我们不准备在此考虑这个问题．

参考文献（25篇，略）

吉林工学院**阎一工　郑伯芳**译自：*Int.J.Solids Struct.*，**20**，5(1984)：487—497．（**张德华　董务民校**）（略有删节）