静力再分析综述

A. M. Abu Kassim　B. H. V. Topping
英国 Edinburgh 大学土木工程系

提要　综述了结构静力再分析方法，提供了有关Arora 1976年所写综述内容的最新资料．随着计算费用的日益降低和实际设计问题优化方法的引进，今后几年结构静力再分析方法很可能变得更为重要．

1 引 言

在结构设计或优化中，过程通常是迭代的，而且当结构逐次修改时，需要反复进行分析．为了避免每次迭代后都重新分析，提出过许多再分析方法．1976年Arora[8]曾对这些再分析方法作过综述．本文显然会与Arora的综述有一些重复，但也讨论了Arora[8]忽略的文章和一些新方法．Arora[8]对这个问题给出一个简明的定义：它是要“利用原来的结构响应来找到修改后的结构响应，使得再分析的计算时间比整个分析时间要短”．同时，再分析方法使我们能有效地对优化方法所需的设计灵敏系数进行计算．再分析方法对于大型结构特别重要，尤其在有限元的完善化方面特别重要，这时可只对结构的一小部分逐次予以修改．这种再分析方法可以不费力地用计算机编程来实现．

再分析方法可以粗略地分为直接法（即精确法）或迭代和近似法两种．图1给出大多数

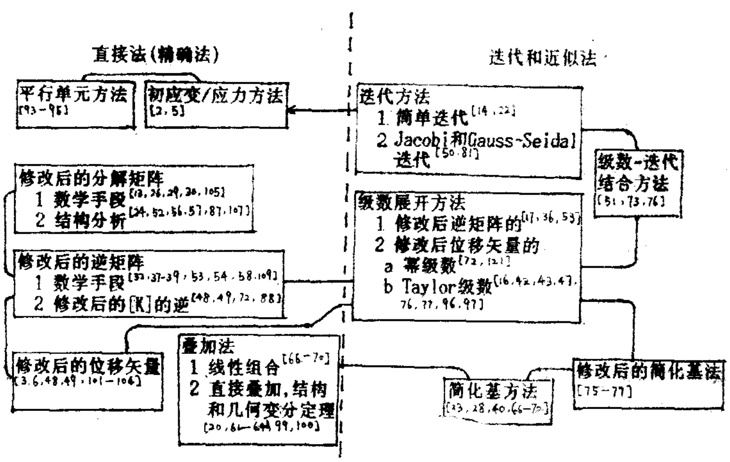

图1　再分析方法

这些方法之间的关系．这些方法或者是用力法（或柔度法），刚度法（或位移法）来表达，或者是几种分析方法的混合．要保证方法便于使用和有效，审慎地选择方法很重要．

2 直接法（即精确法）

这类方法给出封闭形式的精确解，它们和求解重新修改过的方程组有同样的效果。一般来说，如果修改的单元数少，直接法很有效。

2.1 *初应变方法* “初应变或初应力方法”是 1956 年 Argyris & Kelsey[2,6]首先用矩阵符号表示的。最初的文献[5]是用力法分析，因为认为它比刚度法好。然而，下一篇文章[2]却同时给出了力法和刚度法的表示。这种再分析方法用于分析具有切断单元（全部单元去掉）和修改单元的结构。

此方法起初是为了避免用力法分析具有切断的结构所带来的困难。而整个结构的结果是用来预测修改后结构的响应。对整个结构用力法形成所需矩阵要比对一个具有切断的结构容易形成得多。用力法分析，先对外载分析原结构，然后把初应变加在有待去掉的单元上，使得由于外载和初应变引起的应力都化为零。初应变的大小是未知的，但可以根据仅由外载引起的作用在原结构上的相应应力来求出。通过原来应力能求得修改后的应力。这种方法只需对原始结构做一次分析。对刚度法来说，除了外载以外，还要施加初始未知单元应力。这是力法的对偶方法。

这种方法于 1945 年由 Best[15,16]提出，并由 Cicala[21]和 Michelso & Dijk[71]开发使用。这些早期方法适合于用手工反复进行结构分析。Cicala[21]用特殊摄动应力系统来使切断结构中的应力化为零。然后把此摄动加在对整个结构所得到的应力上。考虑到横截面积和弹性模量的变化，Michelon & Dijk[71]还提出了一种方法。Goodey[31]提出了同样的方法。但他的表述使用了变分的分析（应变能最小化）。这种方法是一个纯数学概念。Argyris & Kelsey[2,5]的矩阵形式，被 Poppleton[83,84]应用于力法对超静定飞机结构的再设计。这里，提出了逆问题：给定应力，要对给定的载荷系统确定所需的结构变化。这类似于 Best[15,16]给出的例子所说明的方法，它产生于要求进行迭代来保证满足所给定应力的再设计问题。

Grzedzielski[33]对初应变概念表示怀疑。他引进一个假想的热载荷来代替初应变。除此之外，他还认为这种方法仅限于分析纯对角型柔度矩阵的结构。在 Grzedzielski，Argyris & Kelsey[4,34]的一系列文章中，讨论了初应变概念的有效性。

初应变或初应力方法需要分别对原柔度或刚度矩阵求逆。Kavlic & Powell[41,106]研究了刚度法的这种方法的效率。他们利用一个运算计数系统证明，这种再分析方法还不如重新分析有效。

2.2 *平行单元方法* 1968 年 Scobieszczanski[95]使用力法分析，引进了矩阵形式的平行单元概念。这个概念是一种摄动法。它是 Cicala[21]及Michelson & Dijk[71]的早期工作提出的。Grzedzielski，Argyris & Kelsey[41,33,34]在一系列文章中，在他们对初应变概念进行辩论的过程中，也间接提到过这个概念。

这种方法用的是把一个单元平行地叠加到要修改的单元上，它可以用来进行单元的增加（当没有单元存在时）、删除和修改，因此比初应变概念更为一般。这种方法和初应变概念的区别也得到了说明。在这里，每次修改后原结构都得到更新；前一次修改的结果形成了新结构响应的基础。根据初应变概念，后继的分析总是和原结构的分析有关。平行单元方法后来由 Sobieszczanski[93,94]用位移法作了表述。这些文章包含平行单元概念的效率和准确度

的检验，并与初应变概念作了比较．效率是根据运算次数和机时来衡量的．该作者认为，这种方法对于做大量修改很有效．方法的准确度也似乎不受修改工作量的影响．所得到的误差认为是随机的，而且不累加．同时使用这种位移法的一种新方法被认为比力法更有效[94]．其原因是刚度矩阵比柔度矩阵稀疏．

2.3 修改后的逆矩阵 以上两种方法都是基于直观的和物理的推理，而不是基于数学概念．许多研究人员致力于寻找刚度的变化、原刚度矩阵和修改后的刚度矩阵之间的关系．得出的方法是通过原逆矩阵和刚度变化来显式地表示修改后的逆矩阵．

要求的关系可能是基于 Sherman-Morrison 恒等式[91,92]．Householder[37-39] 用矩阵形式提出了这三个量之间的一个方程．Zielke[109] 也导出了类似方程，以供修改后对称矩阵的求逆．修改后的逆矩阵可能对任何阶一次建立一行或一列，也可能一个系数一个系数地建立．后来 Sack et al[88] 应用了这种作法，他们的修改后的逆矩阵是一次得到一列．运算次数显示出，这种方法当修改工作量比较小时，比 Gauss 消去法更为有效．Kavlie & Powell[41,106] 也提出了 Sack[88] 方法的运算计数，发现它没有刚度法的整个再分析那么有效．

Kirsch & Rubinstein[48,49] 也研究了 Sherman-Morrison 恒等式的各种形式．这些形式包括或者通过考虑各系数同时改变，或者一次仅改变一个系数（或一列）来形成修改后的逆矩阵．最有效的方法是改变各列．

另一个 Sherman-Morrison 恒等式变换形式是 Mohraz & Wright[72] 给出的，这时刚度矩阵的大小是允许变化的．增加节点，修改后的逆矩阵会增大，而删除节点则会减小．运算计数显示，他们建议的方法和整个地求逆相比节省20—80％的计算时间．

还有一些类似方法是 50 年代由 MacNeal[53] 和 Goodey[32] 提出的．这些方法使用原有的逆矩阵来得到修改后的逆矩阵．MacNeal[53] 的方法与网络理论里所用的补偿定理有类似之处，并由 Kosko[53] 稍微作了一些简化．后来 Kosko[54] 用分块方法导出了求逆矩阵（包括修改后矩阵的逆矩阵）的各种方法．没有考虑位移法中通常出现矩阵稀疏性的可能性．这大概是由于当时普遍使用力法所致．

2.4 修改后的位移矢量 直接计算修改后逆矩阵的方法往往很昂贵．另一种方法是利用 Sherman-Morrison 恒等式[91,92] 来计算修改后的位移矢量．这种方法避免了必须显式地形成逆矩阵．

正如 Argyris et al[3] 指出的，Sack et al[88] 的方法有几个缺点．主要的缺点是计算大型带状刚度矩阵太费钱，而且存储起来有时可能不经济．其次，Sherman-Morrison 恒等式考虑一次修改一列．由于这些缺点，Argyris et al[3] 又构造了另一个与位移法一起使用的算法．他们将 Sherman-Morrison 恒等式重新排列后来计算修改后的位移矢量，而不是去计算修改后的逆矩阵．这一方法在用 Cholesky 分解法简化过程中利用了刚度矩阵的稀疏性和带宽．当结构的高编号节点处发生变化时，这种方法尤其有效．利用运算计数可知，这种方法比 Sack et al[88] 的方法更有效．

Kirsch & Rubinstein[48,49] 也利用 Sherman-Morrison 恒等式而避免了出现修改后的逆矩阵．他们提出了两种方法来计算修改后的位移矢量．其中一种方法叫“简化方程法”，它比上节各种方法都更有效．

Kavlie & Powell[41,106] 也提出了计算修改后位移矢量的类似方法．他们的方法与整

个再分析法相比，除了修改很小的情况以外是无效的。然而，在优化算法做线性搜索的情形下，这种方法就很有竞争力。

作为早期工作[3]的结果。Argyris & Roy[6]提出了考虑到刚度矩阵的稀疏性和带宽性质的再分析的一般方法。这种方法也分析了刚度矩阵大小的变化，它与Mohraz & Wright[72]的方法差不多一样。但是，因为它不需要求逆，所以更为有效。这种方法推广到了每次修改后重新改变分解刚度矩阵。当子结构里的单元被修改时，它可以用于子结构的分析。这种方法也被Armen[7]应用于裂纹扩展与闭合问题。Raibstein et al[85]实现了它的通用计算机编程。考虑到在设计环境中出现复杂的大型结构，这里也研究了效率问题。他们指出，对于一个有效的再分析来说，用此方法可以修改的自由度数的最大百分比在8—60%之间。

最近出现在Wang et al[101-104]的文献中的进展，类似于Argyris & Roy[6]的进展。修改后的结构响应被表达成原响应与决定于准载荷的项的线性组合。这些准载荷与原系统的刚度变化相关，并且将与作用载荷一起分析。仅对修改后的那部分结构建立一个简化方程组。他们叫这种方法为“准载荷法”。Hirai et al[35]给出了准载荷法对于有限元分析中静力凝聚的一个应用。这种方法是应用粗网格的结果来作细网格的再分析。

2.5 修改后的分解矩阵 这种方法近些年来得到特别的关注。这是由于经常使用的有限元位移法导致出现很大的对称带状刚度矩阵。将矩阵加以分解，用回代法得到了位移。如果修改比较小，它将更有效地修改分解后的矩阵而不是形成并简化新的刚度矩阵。

Bennett[13]指出，当矩阵稀疏且是带状时，可以避免整个求逆。他提出另一种算法使得可以从原分解矩阵得到修改后的分解矩阵。这里矩阵修改后的三角因子可以从原三角因子计算得来。Argyris et al[3,6]也把这种方法看做上节讨论的一般修改方法的一部分。在数学文献[26,29,30]中也出现了Bennett[13]方法的各种变形。1948年Weiner[105]的早期论文考虑了类似的问题。在这篇论文中，求解过程被列成表以便于手算和检查。更重要的是，在后来的讨论中，指出这种方法适合于研究具有不同结构性质的类似构型的结构。然而，却没有认识到它用不着逆矩阵的优点。

Young[108]得出了Bennett[13]算法对于有限元分析的一个应用。用这种方法，必须用一种特殊形式表达局部非线性行为。Kleiber & Lutoborski[52]给出了初始对称矩阵做非对称变换方法的一个修正型式。Row et al[87]和Yang[107]也给出了另一些修正分解矩阵的类似方法。Row et al[87]提出了两种算法，其中利用Crout和Cholesky方法来分解矩阵。利用运算计数和CPU时间，表明Cholesky法在得到修改后分解矩阵方面更为有效。

Ertas & Fenves[24]也提出了三种不同的再分析方法，其中两种是基于刚度法，一种是基于力法分析。前两种方法是“修改刚度法”（类似于Kosko[53]和MacNeal[68]方法）及“修改Gauss法”（类似于Argyris & Kelsey[2,5]的初应变概念）。对三种方法的效率进行了比较，表明修改Gauss法最有效。但是，这仅局限于在事先确定好的所关心的区域中进行修改的情形。

本节的上述诸方法的主要缺点是，为了提高效率，修改应该在靠近矩阵的底部进行。这就要求预先知道矩阵里的刚度系数的变化和可能的重新排列。最近Law & Fenves[56,57]提出了一种方法来克服这些困难。他们是把矩阵修改问题，稀疏矩阵问题，子结构分析和图论

结合起来一起考虑。Bennett[13]，Row et al[87]和 Yang[107]给出了算法的各种改进。除此之外，提出了一种可以不需要象前面几种方法那样存储原矩阵各系数的新算法。既然分解矩阵已经知道，那就可以使用一种简化的逆过程求得原矩阵系数。他们的方案中用到子结构，说明修改可以是任意分布的，而不必事先知道是什么结构。可惜的是，他们的算法严重依赖于图论，而许多工程师对图论并不熟悉。Lam et al[55]也给出了用稀疏矩阵法进行再分析的类似想法。

2.6 *叠加方法* Melosh et al[25,66-70]引进了类似于初应变或初应力概念的叠加方法。其中一种方法是基于余能法，其中修改后的力表示成原来的力矢量与自平衡力矢量的线性组合。另一方法是用具有原位移的势能法与自应变矢量来得到修改后的位移。可以选自平衡力或应变来给出精确结果，但也可能是近似的过程。修改后结构的响应是由把初始结构响应和由于自平衡矢量产生的响应叠加起来而得到。Kavlic & Powell[41,106]用运算计数估计了这种方法的效率。对于一个载荷的情形，整个的再分析更为有效。而对于五个载荷的情形，并且当要修改的单元数大于两个时，这种方法对于他们的例题来说仍是效率低的。

Majid 和同事们在 70 年代引进了另一种新方法。这种方法是基于单位载荷分析与所加载荷分析的叠加。它叫做“结构变分定理”，用于铰接和刚性连接的结构的最优设计[62,63]。这些定理最初能够处理一次只修改一个单元的问题。Bakry[11]指出也可以处理同时修改两个或更多单元的问题。Topping[98,99]把它推广到有限元问题。Atrek[10]把它做了简化。Celik & Majid[19,20,60]指出它应用于框架结构的非线性分析。然而这种方法只计及结构性质的变化，如横截面积、厚度或转动惯量等的变化。只是最近才得以把这些定理推广到计及结构几何性质的变化[100]。因此，这些定理称为“几何变分定理”，它们也可以包括结构性质变化的影响。尽管需要进行单位载荷分析，但这些定理仍是很吸引人的，因为可以得到结构优化所需用的设计敏感系数。然而尚未进行效率的研究（基于CPU时间或运算计数）。

3 迭代法和近似法

近似法一般是由某种形式的级数展开导出的。1971 年 Schmit[89]给出了近似法的最早综述。迭代法应用于对初始解的逐次修正，并收敛于修改后结构的更准确的解。在这些方法中，解的准确度和收敛速度非常重要。计算工作和效率会使我们偏离准确度。这两个因素很少会同时满足，因为解越精致，计算效率越低，反之亦然。所以必须做某些折衷，使得“运行时间”不致过长，又能保证解足够准确。这两个对立因素之间，怎样得到最优平衡，决定于对某一特定设计问题如何判定准确度。通常这些方法用于很快估计各种设计方案中选择哪个。对于初始设计和最终设计，需进行精确的分析。

3.1 *迭代方法* 1963 年 Best[14]用简单迭代法提出了一种再分析方法。他称这方法为“等效载荷法”。等效载荷是用（$\{F\}-[\Delta K]\{\delta\}$）算出来的，其中$\{F\}$为作用载荷矢量；$[\Delta K]$为刚度矩阵变化；$\{\delta\}$为每次迭代时的位移现时值矢量。从第一次迭代可得刚度矩阵的简化形式，因此只需简化等效载荷。然后用回代方法求得改进后的解。这种简单迭代方法非常类似于非线性分析中使用的初始刚度法。当$[\Delta K]$很小时收敛速度很快，但若$[\Delta K]$很大，就可能收敛得很慢或者发散。在 Best[14]的方法中，每次迭代后要计算总位移。Das[22]给出了稍微不同的形式，即只计算位移增量。这里在每次迭代时等效载荷用$-[\Delta K\delta]$给出。Das[22]得到的数值结果表明，只要刚度变化保持在原值的 10%以内，大多数结构问题就只

需3次迭代。Das[22]指出这可以大大节省计算机时。他还指明若刚度变化得太大，误差就会增大。这说明简单迭代法只适用于刚度变化比较小的情况，这时收敛快且误差小。

Kavlie & Powell[41,106]计算了简单迭代法每次迭代所需的运算次数。对于小变化且载荷种类少的情况，这种方法比重新分析效率高。对于大变化的情况，它有时可能根本不收敛。除此之外，他们还指出，如果使用一个低松弛因子，那就可以改进大变化情况下的收敛性。

为了改进简单迭代法的收敛性，Kirsch & Rubinstein[50]引入了另一种方法。他们把刚度变化[ΔK]表示成两个矩阵的线性组合。得到的关系表明是和Jacobi迭代所得到的关系一样。一种进一步的改进方法，是对{δ}的每个分量都进行迭代，而不是对整个矢量迭代。让刚度变化100%或更大，从而比较每一种方法。简单迭代法虽然运算次数少，但对这么大的变化来说它是不合用的。所建议的两种方法，虽然要求运算次数稍多一点儿，但这比用改进收敛性来补偿要好一些。计算{δ}的每一分量的改进方法，证明是比较优越的。

Phansalkar[81]考虑了用几种不同方法把刚度矩阵分割开，得到了简单Jacobi迭代和Gauss-Seidal迭代。在Gauss-Seidal迭代中，每次迭代时都把{δ}的分量，逐次用来计算余下的分量。各种迭代格式的收敛性和效率的问题也考虑了。发现有一种格式即块Gauss-Seidal迭代很有效。这种方法包含与点Gauss-Seidal迭代（其中一次只有一个未知量调整）相反的一组未知量的调整。进一步提出了加速法可以容易地改进这种方法的效率。

3.2 级数展开方法 Brock[18]提出过一种级数展开方法的早期例子。用这种方法，修改后的逆矩阵由一个无穷级数展开式得到。只要变化很小，用级数求和便可以导出精确的关系。Kosko[53]也研究了一个无穷级数来得到修改后的逆矩阵。Hoerner[36]的一个类似方法只使用了此级数的第一项。若刚度变化小于35%，则1次迭代后这种方法便显示出是收敛的。对于大的变化(原刚度的3.6倍)，则4次迭代后收敛。这种方法不再是一个重要的竞争者，因为早先已经提到，它用于求逆时是效率很差的。

另一方面，近似的修改后位移矢量可以从各种级数展开式导出。例如，Kirsch & Rubinstein[50]用二项展开式导出他们的Jacobi迭代方法。Romstad et al[86]考虑用一般幂级数展开式来得到刚度变化的任意准确度。对于静力分析来说，他们的幂级数展开式和二项展开式是一样的。Arora & Rim[9]研究了这种方法，发现即使刚度变化很小，它也是不合适的。Zimmermann & Spence[110]也用幂级数展开式来研究一个单元变化的影响。一个单元的变化通过整个参数而影响一组单元。这种影响称为"跟踪灵敏度(tracking sensitivity)"，后来则用作交互作用有限元分析的一种算法。

Storaasli & Sobieszczanski[96,97]用一阶Taylor级数展开式分析大型复杂结构。这种方法需要计算灵敏系数，然后用这灵敏系数寻求修改后结构的一个更好的近似位移。这些灵敏系数，可以通过分解一准载荷项，然后用原分解刚度矩阵回代来得到。他们对于一个单元修改（变化在－100—500%之间时）以及对于两个以上单元修改（变化在－50—50%之间时）的情况，研究了这种方法的效率和准确度。结果表明，位移和应变的误差都小于16%。所用时间仅是整个分析所用的一小部分。

Noor & Lowder[76]研究了各种再分析方法，表明当刚度变化大于20%时，Taylor级数展开在1次迭代后是不准确的，而在2次迭代以后，误差可以减小。他们在后来的一篇论

文[77]中考虑了混合分析方法的一阶和二阶 Taylor 级数展开式. 二阶 Taylor 级数是更准确的方法，但计算机时和存储量花费大. 一阶 Taylor 展开法表明，如果采用设计变量（即横截面积、厚度等）的倒数，则它的准确度将提高. Schmit & Farshi[90]也喜欢使用倒数. 位移的一阶 Taylor 展开式以及混合再分析两种方法中，得到的位移相等，但混合法所得的力较准确.

Bhatia[17]提出了一种再分析方法，其中刚度矩阵先用静力凝聚法简化. 选择保留住哪些自由度，决定于问题的类型. 为了提高效率，建议用结构动力学的简正模方法把凝聚矩阵变换成低阶广义矩阵. 然后把这个广义矩阵用关于原来结构的 Taylor 级数予以展开. 然而这个表达方式并未用任何数值例题加以检验.

最近，Kirsch[42,43,47]对于位移法的设计变量和力法中这些变量的倒数，给出了一种 Taylor 级数展开式. 这种展开式表明与根据简单迭代得到的级数等价. 于是这种 Taylor 级数展开式可用来表述沿一条线（即一个变量）的再分析. 这种特殊形式的再分析是与优化方法一起使用的. 设计变量的变化可以用单自变量来表示. 用单自变量的 Taylor 展开式，可以导出一个多项式近似式和一个修改了的非多项式近似式. 对问题的研究表明，用多项式近似式时，使用倒数比简单使用设计变量能够得到更好的结果. 非多项式近似式所得结果很接近于精确解，即使当结构性能对变化很敏感时也是这样. 因为这种再分析中仅有一个单自变量，所以这两种方法需要的计算比一般方法需要的少. 为了改进近似式，也引进了包含换算设计变量的动态加速方法和加速方法. 也提出了另外一些使用二次和三次插值的近似式. 这种方法需要两个精确的分析. 也得到了一些更好的近似式，但需要更多的计算费用. 所有这些方法都已包括在 Kirsch[44,45]的优化设计内容中.

3.3 级数与迭代相结合的方法 为了克服简单迭代方法和一阶Taylor级数方法的缺点，Noor & Lowder[76]提出把二者相结合也许会有益处. 从 Taylor 级数得到第一近似，然后再用它作为简单迭代方法的一个估值. 在这种结合方法中，1 次迭代循环就可以大大提高近似式的准确度和效率. 如果与修改后的简化基方法相比较，则对于变化小于20%的情形，结合方法与此有相同的准确度.

这种结合方法后来被 Noor[73]用于结构几何性质修改的混合分析法中. 与 Taylor 级数展开方法比较，证明结合方法更为优越.

Kirsch & Toledano[51]对结构几何性质的变化提出了一个类似的结合方法. 这种新方法是基于把简单迭代与初始结构分析的换算相结合. 简单迭代部分表达成一个级数展开式. 为了改进这种近似的质量，引进了对初始设计的换算. 结果表明，新提出的方法在准确度方面是足够的，但与其他较简单的方法比较，每次迭代包含更多的计算.

3.4 简化基方法 一种可能的近似方法是基于简化基（reduced bases）的思想. 这里修改后结构的响应表达成已知独立矢量的线性组合. 这些矢量的个数比结构的自由度数少. 换句话说，修改后结构的性能用更少的自由度来近似. Melosh & Luik[25,66-70]提出了两种方法来挑选这些矢量. 挑选方法正如本文第 2 节精确法一节所述. 这种近似方法对于几次再分析循环来说只需较少的运算次数. 这点与精确分析的方法迥然不同.

Fox & Miura[28]提出了一种类似方法，其中修改后的位移表达成以前算出的位移矢量的线性组合. 这些位移矢量是根据以前的结构变化得出的. 这些结构变化是基本的设计矢

量．这些基本设计的选择可以认为是基于一特定的基的．也有人提出，这种方法与应用 Ritz-Galerkin 原理等价．这种特殊形式显示出比试图用一种新分析进行计算的效率高．

Kavanagh[40] 引入了一种类似方法．位移矢量表示成原结构的本征矢量的线性组合．本征矢量的选择决定于它们的能量贡献，只有那些贡献很大的才包括在近似式里．这种方法的基础是结构动力学的简正模法．结构的变化是作为一个非线性项引入简正模方程中，再用动态松弛法求解．这种方法最好用于总体变化而不适用于局部变化．

近来 Noor & Peters[74,78,79] 对非线性分析做了这种方法的应用．独立矢量是用于静力摄动法的那些矢量．

最近，Ding & Gallagher[23] 用力法分析引进了简化的基本公式．公式的导出可以给出修改后结构的精确响应或近似响应．多余的力被选择作为简化的基，因为它们比结构中力的总个数要少．他们对问题的研究表明，他们的精确方法，尤其是近似方法是有效的．他们认为这两种方法都很有效，就连近似方法的结果，对于目的是在优化过程中进行再设计来说，已足够地准确．然而，这些方法仅限于框架和桁架结构的再分析，提高它的通用性的工作正在得到进展．

3.5 *修改简化基方法* Noor & Lowder[76] 提出了修改简化基的方法．这种方法是一阶 Taylor 级数与简化基法的结合．选择的独立矢量是原来解的矢量和一阶灵敏系数．给出了一些数值研究的结果，它们表明对于大规模的修改来说，修改基方法具有很高的准确度．他们进一步指出，独立矢量的选择是合理的．Noor & Lowder[77] 下结论道，这种方法与混合分析法的一阶 Taylor 级数展开式，在准确度和效率方面有很大潜力．

这种方法的进一步发展用于子结构[75]．这种发展的主要区别是不包括原来的解作为独立矢量．设计变量和它们的倒数给出相同的结果．这种方法对于分析大型结构显示出是准确和有效的．

4 结语

如本综述所说，有许多种再分析方法．选择哪种方法决定于问题的类型和大小、修改的次数和工作量、要求的效率和准确度．不存在什么高级的方法最好地适用于所有问题．用“标准测试法”比较各种方法有局限性[9,41,50,51,76,77,106]．一般来说，直接法适用于结构比较小的部分被修改的情况．迭代法和近似法更有效，但有些情况下解的准确度可能不够．使用各种方法的经验也许是选择合适方法，并把它付诸应用的最好向导．

应当记住，在计算机执行程序时，没有必要按照公式推导编程公式．推导仅仅用于适应矩阵形式化的需要，而不应当在实际编程中进行．在许多情况下，这会导致不必要的大量操作和浪费机时．在有可能的地方，使用稀疏的矩阵会节省机时和存储要求．因此，最根本的是要使用最优的操作顺序和数据存储．

使用再分析方法的优点如下：①结构优化中许多再分析过程可以在费用比较低的情况下进行；②有可能有效地根据简化的方程组处理非线性；③对于大型结构设计来说使用交互式分析成为可能．

参考文献（110篇，略）

梁　焰译自：*J. Struct. Eng., ASCE*, **113**, 5 (1987)：1029—1046．（**董务民**校）