

# 流体力学中的分形

美国康乃尔大学地质科学系 D. L. Turcotte

## 1 引言

统计分布在物理学中有许多十分重要的应用。统计力学就是一例；宏观量如温度和熵是微观层次上随机分布的统计平均。在量子力学中，原子的位置与动量具有统计分布。

愈来愈多的事实证明，为了了解各种宏观现象，可能要直接应用统计方法。人们发现微分方程可以有混沌解，这就说明使用统计方法的必要性。象奇怪吸引子这样的解往往呈现分形行为。重正化群的方法已应用于研究具有突变性质的连续介质问题；例如相变，磁性的突然发生。上述这些解往往具有分形性态的统计分布。

Mandelbrot (1967) 提出了“分形”这个术语，用以描述多岩石的海岸线的特性。海岸线的长度与测量杆的长度成幂律关系；该幂的值定义了分维。以后，Mandelbrot (1982) 还把许多物理过程及数学结构同分形性态联系起来。分形分布的共同特征是尺度不变性。幂律分布是在问题中不引进特征尺度的唯一分布。

## 2 分形分布的定义

分形的基本定义是

$$N_i = C/r_i^D \quad (1)$$

其中  $N_i$  是具有特征长度  $r_i$  的客体数目， $D$  是分维数， $C$  是比例常数。若令

$$N = C/r^D \quad (2)$$

其中  $N$  为特征长度大于  $r$  的客体数目，则分形的定义就被推广到连续分布的情况了。

方程 (1) 和 (2) 作为数学表达式，它们在无限的范围内适用；然而，在任何物理应用中，存在着分形分布适用的上限和下限。在某些情况下，大小不同的尺度上适用不同的分维数。直接应用方程 (2) 的例子有：Korczak 关于岛屿数目同面积大于某一给定值的经验关系，这时  $D \approx 1.30$  (Mandelbrot 1975)；关于地震次数与断裂区面积大于某一给定值的关系，这时  $D \approx 1.80$  (Aki 1981)；碎块数目同体积大于某一给定值的关系，这时若取  $D \approx 2.5$  往往是良好的近似 (Turcotte 1986)。

## 3 周长关系

虽然我们象方程 (1)，(2) 那样，定义了用数目与尺度表达的分形关系，但是，Mandelbrot (1967) 原先给出的分形定义是把路径长度或周长作为步长的函数。若步长是  $r_i$ ， $N_i$  是为得到路径长度  $P_i$  所需要的步数，那么

$$P_i = N_i r_i \quad (3)$$

将式 (1) 代入上式可得

$$P_i = C r_i^{1-D} \quad (4)$$

Mandelbrot (1967) 利用这个关系式证明了英国西部多岩石的海岸线满足式 (4), 并取  $D \approx 1.25$ .

准确地应用式 (4) 的例子是如图 1(a) 所示的三合一的 Koch 岛. 对于这种结构,  $r_{i+1}/r_i = 1/3$ ,  $P_{i+1}/P_i = 4/3$ , 所以  $D = \ln 4 / \ln 3 = 1.2618$ . 另一种结构如图 1(b) 所示. 对这一种情况, 边长为常数, 但周长与面积在改变, 这时

$$P_i = C A_i^{D/2} \quad (5)$$

是良好的近似公式, 其中  $D \approx \ln 4 / \ln 3 = 1.2618$ .

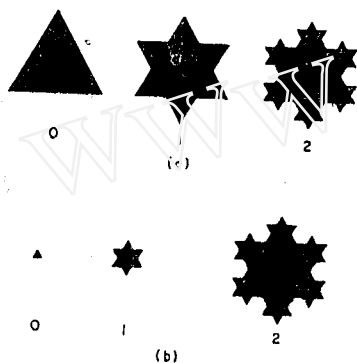


图 1 三合一的 Koch 岛

- (a) 长度为  $1/3$  的三角形置于每边的中心  
 $P_{i+1}/P_i = 4/3$ ,  $r_{i+1}/r_i = 1/3$ ,  $D = \ln 4 / \ln 3$   
 (b) 除边长为常数外, 其余与 (a) 相同  
 $P_{i+1}/P_i = 4$ ,  $A_{i+1}/A_i \approx 3^2$ ,  $D \approx \ln 4 / \ln 3$

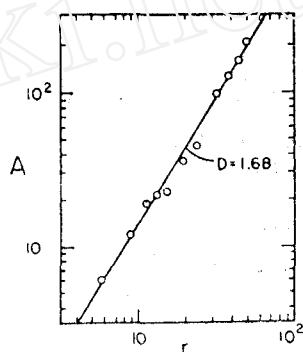


图 2 水注入半径为  $r$  的径向 Hele-Shaw 泡中粘土泥浆内时的粘性指形面积  $A$  (Van Damme 1986). 分维数  $D = 1.68$

河流长度与其流域的面积是满足式 (5) 的一种关系,  $D$  的典型值为 1.22 (Hack 1957). 在许多情况下, 粘性成指现象可以导致分形关系. Van Damme et al (1986) 利用径向 Hele-Shaw 泡研究粘土泥浆中水的成指现象. 他们画出了在半径为  $r$  的圆内水的面积同  $r$  的关系图; 当粘土与水的比例为 0.06 时, 他们的结果如图 2 所示, 分维数为 1.68. 受扩散约束的二维集聚现象的分维数也是 1.68 (Meakin 1983), 注意到这一点是很有意义的.

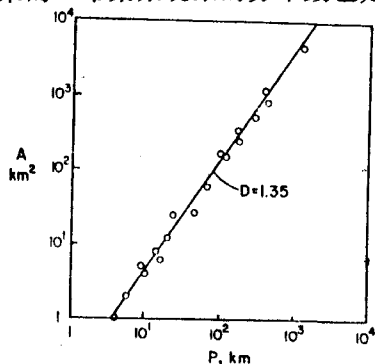


图 3 热带暴风雨的面积是从雷达反射信号所得周长的函数 (Lovejoy 1982). 分维数为  $D = 1.35$

对于周长大于 3 公里的情况证实了这一关系式, 但对于周长小于 1 公里的情况,  $D \approx 1$ .

Maloy et al (1985) 发现在多孔介质中, 空气注入液态环氧树脂内时的分形形态有  $D = 1.62$ . Nittmann et al (1985) 研究了将水注入高粘度的聚合物水溶液内时粘性指的扩展规律. 这时, 在 Hele-Shaw 泡中界面上的表面张力几乎为零, 而  $D = 1.38$ . Jacquin (1985) 研究了多孔介质中重力排出气液的方法, 并发现  $D \approx 2.3$ .

Lovejoy (1982) 已经指出, 由雷达或卫星照片得到的云的横截面满足式 (5). 图 3 说明了他从热带暴风雨的雷达反射信号所得到的结果, 发现同  $D = 1.35$  的关系非常一致. Rys & Waldvogel (1986)

Heutschel & Procaccia(1984) 把观察到的云的分维数同有关的湍流扩散理论联系起来。

#### 4 概 率

在许多情况下, 将分维数同概率联系起来是恰当的。图 4(a) 所示的 Cantor “尘” 可以在每一步通过去掉每根实线的中间三分之一来构成, 所以  $r_{i+1}/r_i = 1/3$ ; 若  $N$  是实线的数目, 那么,  $N_{i+1}/N_i = 2$ 。而由式 (1), 分维数为  $D = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309$ 。该值介于点与线的 Euclid 维数 0 与 1 之间。我们定义概率  $Pr_i$  是长度为  $r_i$  的实线的步数, 于是由式 (1) 可得

$$Pr_i = N_i r_i = r_i^{1-D} \quad (6)$$

随机 Cantor “尘” 可以由随机地去掉每条实线的三分之一来得到。

Cantor “尘” 的二维比拟是图 4(b) 所示的 Sierpinski “毯”。在每一步, 要去掉每个实正方形的中间三分之一。若  $N$  是实正方形的数目, 那么  $N_{i+1}/N_i = 8$  以及  $r_{i+1}/r_i = 1/3$ , 所以, 从式(1)可得  $D = \ln 8 / \ln 3 = 1.8928$ 。分维数介于线与面的 Euclid 维数 1 与 2 之间。定义边长为  $r_i$  的正方形是实正方形数目的概率为

$$Pr_i = N_i r_i^2 = r_i^{2-D} \quad (7)$$

在各种应用中, 可用这个关系式导出分维数。

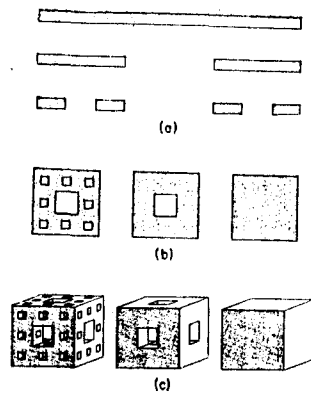


图 4 (a) Cantor “尘”. 每一步去掉实线的中间三分之一  
 $N_{i+1}/N_i = 2, r_{i+1}/r_i = 1/3, D = \ln 2 / \ln 3$   
 (b) Sierpinski “毯”. 每一步去掉实正方形的中间三分之一,  
 $N_{i+1}/N_i = 8, r_{i+1}/r_i = 1/3, D = \ln 8 / \ln 3$   
 (c) Mengor “海绵”. 每一步每个实立方体用正方形截面的通道穿过每个面的中心三分之一  
 $N_{i+1}/N_i = 20, r_{i+1}/r_i = 1/3, D = \ln 20 / \ln 3$

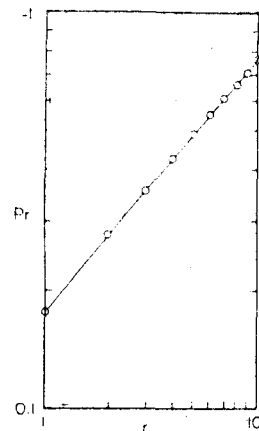


图 5 含强触发湍流边界层的边界。边长为  $r$  的箱子的分数概率  $Pr$  (Sreenivasan & Meneveau 1986), 分维数  $D = 1.37$

Sreenivasan & Meneveau (1986) 已经利用式 (7) 确定强触发湍流边界层的分维数。他们的结果如图 5 所示。分维数  $D = 1.37$  (对于二维横截面)。该湍流边界层同图 3 中所考虑的雨云有几乎相同的分维数。在各种不同的条件下, 湍流区的边界似乎都取该分维数的值。

Cantor “尘” 及 Sierpinski “毯” 的三维比拟是图 4(c) 所示的 Mengor “海绵”。一个

设立方体用正方形截面的通道穿过每个面的中心三分之一。若 $N$ 是设立方体的数目，那么 $N_{i+1}/N_i = 20$ ， $r_{i+1}/r_i = 1/3$ ，所以从式(1)，我们有 $D = \ln 20 / \ln 3 = 2.7268$ 。该分维数介于面与体的 Euclid 维数 2 与 3 之间。边长为 $r_i$ 的立方体是实体数目的概率为

$$\text{Pr}_i = N_i r_i^3 = r_i^{3-D} \quad (8)$$

Menger “海绵” 可以作为具有分维分布渗透率的多孔介质的模型。

虽然渗流的分形模型并不影响 Darcy 定律，但这些模型确实大大增加了渗流的弥散量 (Ross 1986)。已经积累了许多证据，证明沙石中孔隙分布具有分形分布 (Katz & Thompson 1985, Krohn & Thompson 1986)。

## 5 应用于时间序列

上面所考虑的分形应用是自相似的分形。我们现在要把这种分析推广到自仿射的分形 (Mandelbrot 1985)。考虑一个单值函数 $x(t)$ ，该函数是随机的，但有确定的谱，例如， $x$ 可以是速度分量，它是时间的函数。我们要求增量 $x(t+T) - x(t)$ 满足条件

$$\text{Pr}\left(\frac{x(t+T) - x(t)}{T^H} < x'\right) = F(x') \quad (9)$$

其中 $H$ 是常数，它往往指 Hausdorff 维数。在许多例子中， $F(x)$ 是 Gauss 分布。随机过程的这种表达方式先于分形的讨论。

为了将式(9)的表达方式同分维数联系起来，我们利用式(7)的下述形式：

$$\text{Pr}/T^{2-D} = \text{const} \quad (10)$$

比较式(9)和(10)，我们确定

$$H = 2 - D \quad (11)$$

这是 Hausdorff 维数同分数 Brown 运动的分维数之间的关系。

增量的方差定义为

$$V(T) = \langle [x(t+T) - x(t)]^2 \rangle \quad (12)$$

从式(9)，(11)和(12)，可得

$$V(T) \sim T^{2H} \sim T^{4-2D} \quad (13)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时，能谱密度 $S(f)$ 由

$$S(f) \sim T \bar{x}^2(f, T) \quad (14)$$

与区间 $0 < t < T$ 上 $x(t)$ 的 Fourier 变换 $\bar{x}(f, T)$ 相联系，如果能谱密度以幂律依赖于频率，则有

$$S(f) \sim f^{-\beta} \quad (15)$$

从式(12)–(15)可得到 $\beta$ 与分维数之间的关系，结果为

$$S \sim f^{-\beta} \sim T^\beta \sim TV \sim T^{2H+1} \sim T^{5-2D} \sim f^{-(5-2D)} \quad (16)$$

或

$$\beta = 5 - 2D \quad (17)$$

对于真实的分形谱 $1 < D < 2$ ，上式相应于 $1 < \beta < 3$ ， $0 < H < 1$  (Montroll & Schlesinger 1983)。对于 Brown 运动，我们有 $\beta = 2$ ， $H = 1/2$ 以及 $D = 3/2$ 。

人工产生分数 Brown 运动的例子 (Mandelbrot & Van Ness 1968) 如图 6 所示。用来产生这些随机序列的方法如下:

①时间间隔分为许多增量,按 Gauss 概率分布,给予每个增量以一个随机数,那么,这是白噪声序列;

②取序列的 Fourier 变换;

③所得的 Fourier 系数乘以  $f^{-\beta/2}$  予以滤波;

④用滤波后的 Fourier 系数进行 Fourier 反变换;

⑤为了消除边缘效应(周期性),仅保留时间序列的中间部分。

Brown 运动是不可微的。然而,对它进行平滑以消除高频分量后,其导数将变为 Gauss 白噪声。同样地,平滑了的分数 Brown 运动成为 Gauss 分数噪声 (Mandelbrot & Walls 1969a)。Gauss 分数噪声的谱密度正比于  $B = 2H - 1$ 。已经证明,许多气象及水文记录与 Gauss 分数噪声有相同的时间行为 (Mandelbrot & Wallis 1968, 1969b, c, Lovejoy & Schertzer 1985, 1986)。

## 6 浑沌, 奇怪吸引子和分形

Lorenz (1963) 导出了一组全微分方程,它们是适用于 Rayleigh-Bénard 对流的完整方程的一种近似。这些方程的数值解呈现浑沌行为,也就是说,初始条件的无限小改变导致正在演化的解的一阶改变。已经找到这一类型的许多别的解,它们的一般行为可以归入相平面上的奇怪吸引子。在许多情况下,相平面行为满足分形分布的条件。Russel et al (1980) 和 Grassberger (1981) 讨论了各种映射及微分方程的 Hausdorff 维数与 Lyapunov 指数之间的等价性。Froehling et al (1981) 证明了怎样用分箱法来确定奇怪吸引子的分维数。Farmer et al

(1983) 弄清了分维与有理测度维数之间的差别。Mori (1980) 证明了在特定条件下,

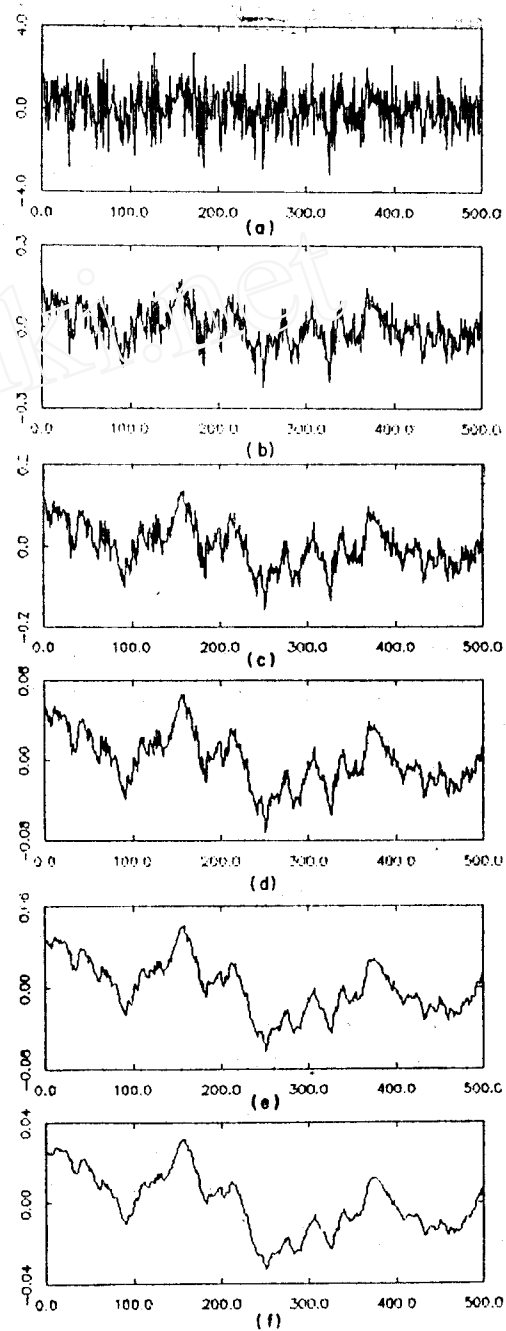


图 6 人工产生的分数 Brown 运动

- (a) Gauss 白噪声序列
- (b)  $\beta=1.2, D=1.9$
- (c)  $\beta=1.6, D=1.7$
- (d)  $\beta=2.0, D=1.5$  (Brown 运动)
- (e)  $\beta=2.4, D=1.3$
- (f)  $\beta=2.8, D=1.1$

Lorenz 方程的解具有分维数  $D = 2.06$ 。

## 7 湍流

湍流的某些最成功的理论导致分形行为。然而，必须指出，这些理论中很多是在引入分形以前提出的。图 7 说明了其中的两个理论。

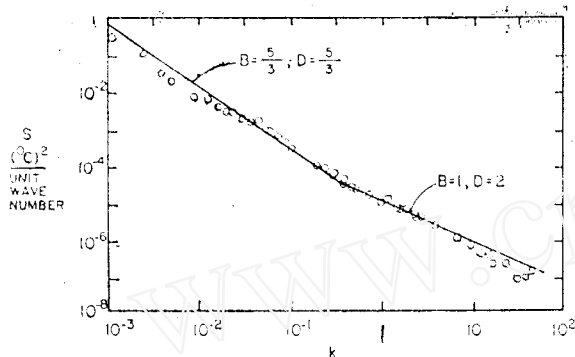


图 7 在开阔海洋中温度脉动的能谱密度 (Grant et al 1968) 给出了同方程 (15) 的两种关系

在开阔海洋中，温度脉动的能谱密度 (Grant et al 1968) 可以同两个幂律理论相比较。在低波数时，人们发现同适用于惯性子区的  $\beta = 5/3$  ( $D = 5/3$ ) 的幂律十分一致；在高波数时，则同适用于粘性为主的区域的  $\beta = 1$  ( $D = 2$ ) 的幂律十分一致。

可以证明，湍流的许多方面问题会产生分形结构，我们已经指出了其中的某些。Malraison et al (1983) 证明，

$Ra/Ra_c = 235$ ,  $Pr = 40$  的 Rayleigh-Bénard 对流导致  $D \sim 2.8$ 。Brandstätter et al (1983) 获得 Couette-Taylor 流动的分形行为；Tabeling (1985) 发现螺旋式 Taylor 涡流中的分维数有规律地增加。关于分形与湍流的许多理论工作同间歇现象 (Mandelbrot 1974, 1976, Frisch et al 1978, Rose & Sulem 1978, Fujisaka & Mori 1979, Heutschel & Procaccia 1983 a, b) 与湍流扩散 (Benzi et al 1984) 有关。

## 8 结论

由于种种理由，分形的概念受到了批评。往往有人说，分形没有什么新东西；这确实是如此。也有人说，分形没有坚实的理论基础。这种评论值得商榷。在物理学中，最广泛适用的统计分布是正态分布 (Gauss 分布)。中心极限定理是许多应用的基础。愈来愈多的事实证明，分形分布也具有广泛的适用性。根本的理由是尺度不变性。然而，关于适用性的更为严格的数学基础显然是需要的。

许多新概念不能达到有些人对这些新概念所提出的较高的目标。分形这个概念亦不例外。分形并不打算解决湍流问题。但是，分形概念提出了处理数据的新方法。其中的某一些已在本文中举例说明。其余的还有待于发掘。很久以来，流体力学家已利用了尺度不变性这个概念，其中的许多可以归入分形这一类。思考一下，从呈现奇怪吸引子行为的微分方程的数值解和为满足尺度不变性条件而设计的新的实验观察可以有哪些新的进展，这是很有意义的。

## 参 考 文 献

- Aki, K. 1981. A probabilistic synthesis of precursory phenomena. In *Earthquake Prediction—An International Review, Maurice Ewing Ser.*, ed. D. W. Simpson, P. G. Richards, 4: 556-74. Washington, DC: Am. Geophys. Union.
- Benzi, R., Paladin, G., Parisi, G., Vulpiani, A. 1984. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. *J. Phys. A* 17: 3521-31.
- Brandstätter, A., Swift, J., Swinney, H. L., Wolf, A., Farmer, J. D., et al. 1983. Low-dimensional chaos in a hydrodynamic system. *Phys. Rev. Lett.* 51: 1442-45.
- Farmer, J. D., Ott, E., Yorke, J. A. 1982. The dimension of strange attractors. *Physica D* 7: 153-80.
- Frisch, U., Sulem, P. L., Nelkin, M. 1978. A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *J. Fluid Mech.* 87: 719-26.
- Froehling, H., Crutchfield, J. P., Farmer, D., Packard, N. H., Shaw, R. 1981. On determining the dimension of chaotic flows. *Physica D* 3: 605-17.
- Fujisaka, H., Mori, H. 1979. A maximum principle for determining the intermittency exponent  $\mu$  of fully developed steady turbulence. *Prog. Theor. Phys.* 62: 54-60.
- Grant, H. L., Hughes, B. A., Vogel, W. M., Moilliet, A. 1968. The spectrum of temperature fluctuations in turbulent flow. *J. Fluid Mech.* 34: 423-42.
- Grassberger, P. 1981. On the Hausdorff dimension of fractal attractors. *J. Stat. Phys.* 26: 173-79.
- Hack, J. T. 1957. Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland. *US Geol. Surv. Prof. Pap. No. 294B*.
- Heutschel, H. G. E., Procaccia, I. 1983a. Passive fluctuations in intermittent turbulence with applications to wave propagation. *Phys. Rev. A* 28: 417-26.
- Heutschel, H. G. E., Procaccia, I. 1983b. Fractal nature of turbulence as manifested in turbulent diffusion. *Phys. Rev. A* 27: 1266-69.
- Heutschel, H. G. E., Procaccia, I. 1984. Relative diffusion in turbulent media: the fractal dimension of clouds. *Phys. Rev. A* 29: 1461-70.
- Jacquin, C. 1985. Caractère fractal des interfaces fluid-fluide en milieu poreux. *C. R. Acad. Sci. Paris* 300(2): 721-25.
- Katz, A. J., Thompson, A. H. 1985. Fractal sandstone pores: implications for conductivity and pore formation. *Phys. Rev. Lett.* 54: 1325-28.
- Krohn, C. E., Thompson, A. H. 1986. Fractal sandstone pores: automated measurements using scanning-electron microscope images. *Phys. Rev. B* 33: 6366-74.
- Lorenz, E. N. 1963. Deterministic non-periodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20: 130-41.
- Lovejoy, S. 1982. Area-perimeter relation for rain and cloud areas. *Science* 216: 185-87.
- Lovejoy, S., Schertzer, D. 1985. Generalized scale invariance in the atmosphere and fractal models of rain. *Water Resour. Res.* 21: 1213-30.
- Lovejoy, S., Schertzer, D. 1986. Scale invariance, symmetries, fractals, and stochastic simulations of atmospheric phenomena. *Bull. Am. Meteorol. Soc.* 67: 21-32.
- Maloy, K. J., Feder, J., Jossang, T. 1985. Viscous fingering fractals in porous media. *Phys. Rev. Lett.* 55: 2688-91.
- Malraison, B., Aitten, P., Bergé, P., Dubois, M. 1983. Dimension of strange attractors: an experimental determination for the chaotic regime of two convective systems. *J. Phys. Lett.* 44: L897-902.
- Mandelbrot, B. B. 1967. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science* 156: 636-38.
- Mandelbrot, B. B. 1974. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.* 62: 331-58.
- Mandelbrot, B. B. 1975. Stochastic models for the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 72: 3825-28.
- Mandelbrot, B. B. 1976. Intermittent turbulence and fractal dimension: kurtosis and the spectral exponent  $5/3 + \beta$ . In *Turbulence and Navier-Stokes Equations, Lect. Notes Math.*, ed. R. Temam, 565: 121-45. Berlin: Springer-Verlag.
- Mandelbrot, B. B. 1982. *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco: Freeman.
- Mandelbrot, B. B. 1985. Self-affine fractals and fractal dimension. *Phys. Scr.* 32: 257-60.
- Mandelbrot, B. B., Van Ness, J. W. 1968. Fractional Brownian motions, fractional noises, and applications. *SIAM Rev.* 10: 422-37.
- Mandelbrot, B. B., Wallis, J. R. 1968. Noah, Joseph, and operational hydrology. *Water Resour. Res.* 4: 909-18.
- Mandelbrot, B. B., Wallis, J. R. 1969a. Computer experiments with fractional Gaussian noises. Parts I, II, III. *Water Resour. Res.* 5: 228-67.
- Mandelbrot, B. B., Wallis, J. R. 1969b. Some long-run properties of geophysical records. *Water Resour. Res.* 5: 321-40.
- Mandelbrot, B. B., Wallis, J. R. 1969c. Robustness of the rescaled range  $R/S$  in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resour. Res.* 5: 967-88.
- Meakin, P. 1983. Diffusion-controlled cluster formation in 2-6 dimensional space. *Phys. Rev. A* 27: 1495-1507.
- Montroll, E. W., Schlesinger, M. F. 1983. Maximum entropy formalism, fractals, scaling phenomena, and  $1/f$  noise: a tale of tails. *J. Stat. Phys.* 32: 209-30.
- Mori, H. 1980. Fractal dimensions of chaotic flows of autonomous systems. *Prog. Theor. Phys.* 63: 1044-47.
- Nittmann, J., Daccord, G., Stanley, H. E. 1985. Fractal growth of viscous fingers: quantitative characterization of a fluid instability phenomenon. *Nature* 314: 141-44.
- Rose, H. A., Sulem, P. L. 1978. Fully developed turbulence and statistical mechanics. *J. Phys.* 39: 441-84.
- Ross, B. 1986. Dispersion in fractal fracture networks. *Water Resour. Res.* 22: 823-27.
- Russell, D. A., Hanson, J. D., Ott, E. 1980. Dimension of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.* 45: 1175-78.
- Rys, F. S., Waldvogel, A. 1986. Fractal shape of hail clouds. *Phys. Rev. Lett.* 56: 784-87.
- Sreenivasan, K. R., Meneveau, C. 1986. The fractal facets of turbulence. *J. Fluid Mech.* 173: 357-86.
- Tabeling, P. 1985. Sudden increase of the fractal dimension in a hydrodynamic system. *Phys. Rev. A* 31: 3460-62.
- Turcotte, D. L. 1986. Fractals and fragmentation. *J. Geophys. Res.* 91: 1921-26.
- Van Damme, H., Obrecht, F., Levitz, P., Gatineau, L., Laroche, C. 1986. Fractal viscous fingering in clay slurries. *Nature* 320: 731-33.

李家春译自: *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 20 (1988);

5—16, (董务民校)