

# 非线性系统的随机振动

[加拿大] 西Ontario大学工程科学院 C.W.S.To

**提要** 本文评述了最近发展的分析随机干扰下的一般非线性机械和结构系统的方法。重点放在这些方法对承受非平稳随机激励的多自由度非线性系统的适用性及对多自由度系统有限元分析的适应性上。

自从 To<sup>[1]</sup> 发表上一篇评述文章以来,人们对非线性机械和结构系统随机振动领域的兴趣大为增加。对此问题已出版了各种评述性文章<sup>[2-6]</sup>、四本书<sup>[7-10]</sup>、一种国际性杂志<sup>[11]</sup>和三种会议文集<sup>[12-14]</sup>。

本文评述了1983年末到1986年中,文献中所论述的各种方法。已经评述过的或在会议文集中出现的方法不考虑在内。重点为应用于受非平稳随机激励的多自由度非线性机械和结构系统的方法。探讨了这些方法对多自由度系统的有限元分析的适用性。非参数激励和参数激励也包括在内。参数激励可作为平面内或轴向载荷出现在线性和非线性系统中,也可由受横向或非参数载荷作用的结构的大位移而产生。下面各节讨论应用于单自由度系统、多自由度系统的方法及其他方法。

## 1. 用于单自由度系统的方法

许多简单结构或系统当其第一阶固有频率远离其他各高阶固有频率时,可近似为单自由度系统。本节评述用于单自由度系统的分析方法。这些方法包括统计法或等效线性化法, Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程法和矩方程法。

1.1 统计法或等效线性化法 由于等效线性化法能够处理迟滞系统及其简单性,它仍非常流行。Spanos & Agarwal<sup>[15]</sup>用这种方法,把简单张力腿式平台模型中随时间变化的刚度近似为不随时间变化。其结果与 Monte Carlo 仿真的结果作了对比。他们得出结论,用 Monte Carlo 法所需的计算时间比这种近似解析方法所需的时间大3个数量级。

Baber<sup>[16]</sup>将等效线性化法用于受非零均值力作用的迟滞系统。他的结论是响应的均值和协方差与 Monte Carlo 仿真的结果很吻合。Baber & Noori<sup>[17,18]</sup>还用这种方法求解衰变和收缩的迟滞系统<sup>[19,20]</sup>。用类似的方法提出了更复杂的模型。Davies & Rajan<sup>[21,22]</sup>将等效线性化法和谐波平衡法(一种在确定性非线性振动中的成熟方法)结合起来求解 Duffing 振子的分谐波和超谐波随机响应。他们还作了数字仿真。

1.2 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程和矩方程方法 FPK 方程法与矩方程法在本质上不同。它们的一个共同特点是都假定响应过程是 Markov 过程。非线性振子的 FPK 方程的精确解又能在特殊情况下得到。因此, FPK 方程法和矩方程法通常与其他方法(如数值近似和随机平均法)结合使用。Caughey<sup>[23]</sup>最近研究了一个单自由度非线性振子

对白噪声激励的稳态响应,使用的是所谓等效非线性微分方程法。他还探讨了带有多重极限循环和高斯白噪声的自激振子的概率密度函数的稳态解<sup>[24]</sup>。将理论推导的密度函数与实验得到的进行了比较。Spigler<sup>[25]</sup>用 FPK 后退方程法求解 Duffing 型非线性振子,所考虑的是弱非线性。比较了用 Crank-Nicolson 的隐式有限差分格式得到的数值结果与线性情形的结果。

Kapitaniak<sup>[26]</sup>最近用路线积分法<sup>[27]</sup>数值求解了描述过阻尼激励下的 Duffing 振子的 FPK 方程。他给出了具有分叉的随机过程的平稳概率密度函数。Davies & Nandlall<sup>[28]</sup>应用 FPK 方程法求解由窄带随机干扰激励的 Duffing 振子。他们指出,对于带宽很窄的激励,在某些频率上响应会出现多值,而随着带宽的增加降为单值。

Davies<sup>[29]</sup>用 FPK 方程法和广义随机平均<sup>[3]</sup>,求得了非线性振子在有限带宽激励下的响应和最大分布。由于在处理非白噪声随机激励时使用了滤波器,所以增加了 FPK 方程的维数,从而增加了方程求解的困难。该文给出了系统响应的最大值分布的结果。Roberts<sup>[30]</sup>用 FPK 方程法和广义随机平均求解一个带有非线性阻尼和软弹簧、受非白噪声随机载荷作用的振子。描述首次通过时间的矩的 FPK 方程的伴随形式用四阶 Runge-Kutta 算法求解。

随机平均<sup>[8]</sup>与 FPK 方程法一起用于船舶在随机横波中的左右摇摆问题<sup>[31]</sup>。Lin<sup>[32]</sup>用一种很受工程师欢迎的数学方法又导出了 Stratonovich 的随机平均法,并给出了一个简单的例子。Brouwers<sup>[33]</sup>用 FPK 方程法和随机平均对受参数激励的非线性阻尼二阶系统作了稳定性分析。

Dimentberg<sup>[35]</sup>用矩方程法及 Khasminskii<sup>[34]</sup>的平均法研究了受外部和参数激励的线性振子。Crandall<sup>[36]</sup>用矩方程法及非高斯截断法研究了一些非线性振子。他指出,在运用带有 Gram-Charlier 密度<sup>[38]</sup>的非高斯截断法时,可能会遇到的麻烦是导出的非线性代数方程可能没有实数解。

## 2. 用于多自由度系统的方法

对许多工程结构和系统来说,单自由度数学模型不能充分描述对象的动力行为,而需用多自由度数学模型来提供分析这类系统的符合实际的描述。本节评述用于分析受随机载荷作用的多自由度系统的方法。这些方法包括等效线性化法、FPK 方程法以及矩方程法。它们已经是评述过的单自由度系统分析方法的推广。在进行随机分析之前通常需用一种方法(如正则振型法)进行坐标变换或解耦。如果系统仅有静力耦合,则当矩方程法中运动方程用状态矢量表示时,不必进行坐标变换。从有限元角度讲静力耦合相应于集中质量或惯性矩阵情形。

2.1 统计法或等效线性化法 用于单自由度系统的等效线性化法能够很容易地推广到求解多自由度系统。[37]将这种方法与确定性有限差分法一起运用,研究了多自由度非线性问题。Jiang & Lu<sup>[38]</sup>提出一种用平均响应谱的等效线性化法进行多自由度迟滞结构响应的随机分析。他们考虑了非平稳随机激励。Mei & Paul<sup>[39]</sup>也用等效线性化法求解受到可看成平稳随机过程的声扰动的固支矩形平板问题。有一个方程中的非线性项表示为广义位移 3 次方的矢量函数。在多自由度系统中这样定义非线性是基于探索性而非物理上的考虑。

Spanos & Koh<sup>[40-42]</sup>将等效线性化法用于建筑物随机摆动的分析中, Harrison &

Hammond<sup>[43]</sup> 将等效线性化法与状态空间法结合进行非平稳非线性随机振动分析, 给出了一个多自由度的例子。[44]中有一个二自由度例子, 用的是四阶 Runge-Kutta 法。Lin & Xi<sup>[45]</sup> 用等效线性化法分析了一个二自由度系统在平稳随机路面激励下的响应问题。

Constantinou & Tadjbakhsh<sup>[46]</sup> 用等效线性化法计算了基础隔离中迟滞阻尼器的非平稳响应统计量。考虑的激励属演变非白噪声型。数值求解(采用国际数学和统计库 (IMSL)) 联合 Lyapunov 矩阵微分方程得到了响应的统计值。

Fang & Wang<sup>[47]</sup> 将正则振型法和等效线性化法用于平稳 Gauss 激励的非线性随机振动问题。这种方法简洁明了, 但只能用于弱非线性情况。

Baber<sup>[48]</sup> 用等效线性化法研究迟滞结构的非零随机振动问题, 指出平稳解并不总是存在。Wen<sup>[49]</sup> 用从理论上讲能够处理一般的自由度数目很多的迟滞系统的等效线性化法推出一种公式。但实际上这种公式只能给出那些自由度数目不多的系统的响应统计量。

2.2 FPK 方程法和矩方程法 在本文所评述的这段时间内, 还没有精确求解多自由度系统的 FPK 方程的文献发表。要获得一般的多自由度非线性系统 FPK 方程的精确解, 即使不是不可能, 也是很困难的。仅对近似解法作了尝试。

Prussing & Lin<sup>[50]</sup> 将这种方法与随机平均法一起用于含有随机参数激励的多自由度线性系统。Kapitaniak<sup>[51]</sup> 给出一种用于受白噪声激励的多自由度非线性系统的公式。用路线积分法<sup>[27]</sup> 数值求解了单自由度非线性系统的 FPK 方程, 以说明具有分叉的随机过程平稳状态的概率密度函数和混沌平稳状态的概率密度函数的求法。

Ibrahim & Heo<sup>[52]</sup> 研究了含有自参数振动的非线性问题。他们采用的是矩方程法及 Gauss 和非 Gauss 截断法, 并用了正则振型变换。矩方程是用五阶和六阶 Runge-Kutta 算法求解的。然而, 将正则振型变换法和截断法一起使用只能求解弱非线性问题。

Ibrahim & Heo<sup>[53]</sup> 还用矩方程法研究了受参数激励的二自由度线性结构。当假定自由端的离散质量被止住而采用正则振型变换的方法时, 与参数激励有关的项被忽略掉了, 而文中既未给出物理上的证明也未说明是出于探索性的考虑。Ibrahim & Soundararajan<sup>[54]</sup> 尝试使用非 Gauss 法求解带有非线性惯性的另一个问题。尽管只给出了一个单自由度系统的结果, 但推出的公式可用于多自由度系统。Ibrahim<sup>[55]</sup> 还发表了应用类似方法<sup>[52,54]</sup> 的一篇文章。

对于非 Gauss 截断法, 一个二自由度系统的解包括五阶矩项, 用国际数学和统计库中的五阶和六阶 Runge-Kutta 算法需数值求解 69 个方程。对有许多自由度的系统来说, 这种方法即使计算上可行, 费用也极为昂贵。

Cai & Xi<sup>[56]</sup> 应用矩方程法并举了两个单自由度系统和一个二自由度系统的例子加以说明; 在某些方程中作了 Gauss 响应过程的假定。对非线性系统来说这种假定并不成立。此外, 高于三阶的矩被截掉了。因此, 即使 Gauss 响应过程的假定可以接受, 这种处理方法也只能用于弱非线性情况。

To<sup>[57]</sup> 用矩方程法及五阶 Runge-Kutta 法计算了一个二自由度线性系统在非平稳随机参数和非参数激励下的响应, 将与参数激励有关的项对角化并保留在分析中。To & Orisamolu<sup>[58]</sup> 给出了用五阶 Runge-Kutta 格式求解有小变形几何非线性的离散化板响应矩的双振型方法, 并考虑了非平稳随机激励。计算了多于 200 个自由度的算例, [59]介绍了与

此相应首次通过问题。

### 3. 其他方法

本节评述的方法包括摄动法, Wiener-Hermite 展开法, Petrov-Galerkin 有限元法, 有限元 FPK 方程法, 正则振型与分段线性法 (normal mode-cum-piecewise linear technique), Slepian 模型过程法 (Slepian model process method), 随机中心差分法, 半经验法和 Kramers-Moyal 展开的差分微分方程法。数字仿真法由于经常用于验证分析法或其他方法, 故不包括在内。此外, 还结合前述各节中评述的某些方法介绍了由上述方法得到的结果。

3.1 摄动法 在所评述的这一时期内, 仅发现一篇有关单自由度非线性振子的文章<sup>[60]</sup>。该文采用多标度 (multiple scale) 摄动和随机变量的 Hermite 多项式。这种方法与等效线性化法密切相关并体现了线性化解的一致改进。但它对于一般非线性多自由度系统的适用性并不如等效线性化法那样简洁明了, 也不如 Beaman & Hedrick<sup>[61]</sup> 的广义等效线性化法。这种方法的基本假设是, 求解过程的每个标准函数 (sample function) 均可由一个收敛的小参数幂级数表示。文中还给出了各种风速下的响应谱和与时间无关的标准偏差。

3.2 Wiener-Hermite 展开法 一个单自由度非线性振子的激励和响应均在 Wiener-Hermite 集上展开<sup>[62-64]</sup>, 级数第三项以后的各项被截掉, 导出了近似的核函数并由一种对于强非线性问题计算费用可能较昂贵的迭代方法求解。Wiener-Hermite 展开法的主要优点是它可以求解强非线性振子和非 Gauss 响应统计量。

3.3 Petrov-Galerkin 有限元法 [65] 应用了广义 Pontriagin-Vitt 方程和 Markov 过程理论的公式。这些方程用 Petrov-Galerkin 有限元法来求解, 需用 Runge-Kutta 算法数值求解一组一阶方程。对于一个受白噪声作用的单自由度迟滞系统, 求出两个统计矩在 IBM-4341 机上运算需要 CPU 时间 1506 秒。

3.4 有限元 FPK 方程法 Langley<sup>[66]</sup> 将这种方法用于求解受 Gauss 白噪声激励的单自由度 Duffing 振子。需用有限元对要近似的区域作一估计。时间域方程用等效线性化法解出。这个例子在 Vax 750 机上运算需要 CPU 时间 30 秒。

3.5 正则振型分段线性法 在有限元法范畴内, 用这种方法及公式分析了对称和非对称非线性结构在非平稳随机扰动下的响应。有两个例子<sup>[67,68]</sup> 涉及小变形。对于大变形结构, 只要对应于每一个离散时间步长特征值问题得到解决, 这种方法仍可应用。

3.6 Slepian 模型过程法 Ditlevsen<sup>[69]</sup> 用这种方法分析了受 Gauss 激励的弹塑性振子。Slepian 模型过程法可行性的一个关键性假设是: 在一个塑性相结束之后而进入一个新的塑性相之前, 响应有时间重新正则化<sup>[70]</sup>。

3.7 随机中心差分法或递推关系法 此法可认为是随机等效于确定性中心差分法。随机响应用递推关系来表示。[71—73] 研究了单自由度非线性振子。这种方法既简单又经济, 可用于强非线性问题。

3.8 半经验法 [74] 用这种方法研究了多自由度屈服结构。因为在线性化单元中的参数值是根据单自由度双线性迟滞系统的仿真 (经验) 数据选定的, 故此法是经验法。

3.9 Kramers-Moyal 展开的差分微分方程法 这种方法<sup>[75]</sup> 用于连续柱在随机脉冲力和 Gauss 白噪声激励下的可靠性和稳定性分析。连续柱被近似为一个 N 重摆。此法用于弱

非线性问题。

#### 4. 结 语

过去3年来,在公开文献中发表了一些令人感兴趣的方法。然而在受随机激励的一般多自由度非线性系统领域还有很大的发展余地。递推方法以及正则振型分段线性法具有求解这类系统的能力,因此值得进一步研究和应用。

#### 勘 误

在To<sup>[1]</sup>的上一篇评述文章中,T.T.Baker应为T.T.Baber,方程(39)和(40)应分别为

$$E\langle \tilde{x}_0 \tilde{x}_1^T \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau_1) E\langle \tilde{F}(\tau_1) \tilde{F}^T(\tau_2) \rangle h^T(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$E\langle \tilde{x}_0 \tilde{x}_1^T \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau_1) E\langle \tilde{F}(\tau_1) g[\tilde{x}_0(\tau_2), \dot{\tilde{x}}_0(\tau_2)] \rangle h^T(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

#### 参 考 文 献

1. To, C.W.S., "The Response of Nonlinear Structures to Random Excitation," Shock Vib. Dig., 16 (4), pp 13-33 (1984).
2. Crandall, S.H. and Zhu, W.O., "Random Vibration: A Survey of Recent Developments," J. Appl. Mech., Trans. ASME, 50, pp 953-962 (1983).
3. Roberts, J.B., "Techniques for Nonlinear Random Vibration Problems," Shock Vib. Dig., 16 (9), pp 3-14 (1984).
4. Spanos, P.D. and Lutes, L.D., "A Primer of Random Vibration Techniques in Structural Engineering," Shock Vib. Dig., 18 (4), pp 3-9 (1986).
5. Roberts, J.B. and Spanos, P.D., "Stochastic Averaging: An Approximate Method of Solving Random Vibration Problems," Intl. J. Nonlin. Mech., 21 (2), pp 111-134 (1986).
6. Ibrahim, R.A., "Recent Development in Non-Gaussian Solutions of Nonlinear Dynamic Problems," Abstracts, 23rd Annual Meeting SES, Buffalo, NY, p S.37 (1986).
7. Nigam, N.C., Introduction to Random Vibration, The MIT Press, London (1983).
8. Elishakoff, I., Probabilistic Method in the Theory of Structures, Wiley Interscience, NY (1983).
9. Ibrahim, R.A., Parametric Random Vibration, Research Studies Press Ltd. (John Wiley & Sons, Inc.), England (1985).
10. Spanos, P.D. (ed.), Probabilistic Offshore Mechanics, Computational Mechanics Ltd., England (1985).
11. Shinozuka, M. and Spanos, P.D. (eds.), Probabilistic Engineering Mechanics, Computational Mechanics Ltd., England (1986).
12. Hennig, K. (ed.), Proc. IUTAM Symp. Random Vibrations and Reliability, Frankfurt/oder (GDR) 1982 Akademie-Verlag, Berlin (1983).
13. Wen, Y.K. (ed.), Proc. ASCE Engrg. Mech. Div. Specialty Conf. Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, Berkeley, CA (1984).
14. Huang, T.C. and Spanos, P.D. (eds.), Random Vibrations, AMD-vol. 65, ASME, NY (1984).
15. Spanos, P.D. and Agarwal, V.K., "Response of a Simple Tension Leg Platform Model to Wave Forces Calculated at Displaced Position," J. Energy Resources Tech., 106, pp 437-443 (1984).
16. Baber, T.T., "Nonzero Mean Random Vibration of Hysteretic Systems," ASCE J. Engrg. Mech., 110 (7), pp 1036-1049 (1984).
17. Baber, T.T. and Noori, M.N., "Random Vibration of Degrading, Pinching Systems," ASCE J. Engrg. Mech., 111 (8), pp 1010-1026 (1985).
18. Baber, T.T. and Noori, M.N., "Modelling General Hysteresis Behavior and Random Vibration Application," ASME Paper No. 85-DET-181 (1985).
19. Noori, M.N., Choi, J.D., and Davoodi, H., "A New Hysteresis Model for Random Vibration of Degrading Systems," Proc. Southwestern Conf. Theoret. Appl. Mech., Columbia, SC, pp 522-530 (1986).
20. Noori, M.N., Choi, J.D., and Davoodi, H., "Zero and Nonzero Mean Random Vibration Analysis of A New General Hysteresis Model," SES Paper No. ESP23.86061 (1986).
21. Davies, H. and Rajan, S., "Random Subharmonic Response of a Duffing Oscillator," Proc. 12th Intl. Cong. Acoust., Toronto, Canada, 2, p D5-5 (1986).
22. Rajan, S., "Random Superharmonic and Primary Response a Duffing Oscillator," Proc. 12th Intl. Cong. Acoust., Toronto, Canada, 2, p D5-4 (1986).
23. Caughey, T.K., "On the Response of Nonlinear Oscillators to Stochastic Excitation," Probab. Engrg. Mech., 1 (1), pp 2-4 (1986).
24. Caughey, T.K., "Exact Solutions in the Theory of Nonlinear Random Vibrations and Their Applications," Abstracts, 23rd Ann. Mtg. SES, Buffalo, NY, p S.21 (1986).

25. Spigler, R., "A Stochastic Model for Nonlinear Oscillators of Duffing Type," *SIAM J. Appl. Math.*, **45** (6), pp 990-1005 (1985).
26. Kapitaniak, T., "Stochastic Response with Bifurcations to Nonlinear Duffing's Oscillator," *J. Sound Vib.*, **102** (3), pp 440-441 (1985).
27. Wehler, M.F. and Wolfer, W.G., "Numerical Evaluation of Path-Integral Solutions to Fokker-Planck Equations," *Phys. Rev.*, **A27**, pp 2263-2670 (1983).
28. Davies, H.G. and Nandlall, D., "Phase Plane for Narrow Band Random Excitation of a Duffing Oscillator," *J. Sound Vib.*, **104** (2), pp 277-283 (1986).
29. Davies, H.G., "The Response and Distribution of Maxima of a Nonlinear Oscillator with Band-limited Excitation," *J. Sound Vib.*, **90** (3), pp 333-340 (1983).
30. Roberts, J.B., "Response of an Oscillator with Nonlinear Damping and a Softening Spring to Non-white Random Excitation," *Probab. Engrg. Mech.*, **1** (1), pp 40-48 (1986).
31. Roberts, J.B., "Comparison between Simulation Results and Theoretical Predictions for a Ship Rolling in Random Beam Waves," *Intl. Shipbldg. Prog.*, **31** (359), pp 168-180 (1984).
32. Lin, Y.K., "Some Observations on the Stochastic Averaging Method," *Probab. Engrg. Mech.*, **1** (1), pp 23-27 (1986).
33. Brouwers, J.J.H., "Stability of a Nonlinear Damped Second-Order System with Randomly Fluctuating Restoring Coefficient," *Intl. J. Nonlin. Mech.*, **21** (1), pp 1-13 (1986).
34. Khasminskii, R.Z., "Limiting Theorem for Solution of Differential Equations with a Random Right-hand Side," *Theor. Probab. Appl.*, **11** (3), pp 390-406 (1966).
35. Dimentberg, M.F., "Correlation and Spectral Characteristics of the Square of the Oscillation Amplitude of a System with External and Parametric Random Excitation," *Mech. Solids*, **19** (2), pp 70-72 (1984).
36. Crandall, S.H., "Non-Gaussian Closure Techniques for Stationary Random Vibration," *Intl. J. Nonlin. Mech.*, **20** (1), pp 1-8 (1985).
37. DiPaola, D., Ioppolo, M., and Muscolino, G., "Stochastic Seismic Analysis of Multi-Degree of Freedom Systems," *Engrg. Struc.*, **6**, pp 113-118 (1984).
38. Jiang, J. and Lu, Q., "Stochastic Seismic Response Analysis of Hysteretic MDF Structures Using Mean Response Spectra," *EEEV*, **4** (4), pp 1-13 (1984) (In Chinese).
39. Mei, C. and Paul, D.B., "Non-linear Multi-mode Response of Clamped Rectangular Plates to Acoustic Loading," *Proc. 2nd Intl. Conf. Recent Advances Struc. Dynam.*, **2**, pp 577-587 (1984).
40. Spanos, P.D. and Koh, A.S., "Analysis of Block Random Rocking," *J. Soil Dynam. Earthquake Engrg.*, **2** (3), pp 178-183 (1986).
41. Spanos, P.D. and Koh, A.S., "Seismically Induced Rocking of Rigid Structures," *Proc. 8th World Cong. Earthquake Engrg.*, San Francisco, CA, **4**, pp 251-258 (1984).
42. Spanos, P.D. and Koh, A.S., "Stochastic Response of Rigid Blocks on Flexible Foundations," *Proc. 8th Intl. Conf. Struc. Mech. Reactor Tech. (SMRT-8)*, Brussels, Belgium, **ML**, pp 327-332 (1985).
43. Harrison, R.F. and Hammond, J.K., "A State Space Approach to the Analysis of Nonstationary Nonlinear Random Vibration with Particular Application to the Problem of Vehicles on Rough Ground," *Proc. 2nd Intl. Conf. Recent Advances Struc. Dynam.*, **2**, pp 673-680 (1984).
44. Harrison, R.F., "The Non-Stationary Response of Vehicles on Rough Ground," Ph.D. Thesis, Univ. of Southampton, UK (1983).
45. Lin, Y. and Xi, D., "Nonlinear Random Vibration of the Vehicle Suspension with Oil-pneumatic Spring," *Acta Armamentarii*, **1** (1), pp 17-25 (1985) (In Chinese).
46. Constantinou, M.C. and Tadjbakhsh, I.G., "Hysteretic Dampers in Base Isolation: Random Approach," *ASCE J. Struc. Engrg.*, **111** (4), pp 705-721 (1985).
47. Fang, T. and Wang, Z., "A Generalization of Caughey's Normal Mode Approach to Nonlinear Random Vibration Problems," *AIAA J.*, **24** (3), pp 531-534 (1986).
48. Baber, T.T., "Nonzero Mean Random Vibration of Hysteretic Frames," *Computers Struc.*, **23** (2), pp 265-277 (1985).
49. Wen, Y.K., "Stochastic Response and Damage Analysis of Inelastic Structures," *Probab. Engrg. Mech.*, **1** (1), pp 49-57 (1986).
50. Prussing, J.E. and Lin, Y.K., "A Closed-form Analysis of Rotor Blade Flap-Lag Stability in Hover and Low-Speed Forward Flight in Turbulence Flow," *J. Amer. Helicopter Soc.*, **28**, pp 42-46 (1983).
51. Kapitaniak, T., "A Property of a Stochastic Response with Bifurcation of a Nonlinear System," *J. Sound Vib.*, **102** (1), pp 177-180 (1986).
52. Ibrahim, R.A. and Heo, H., "Autoparametric Vibration of Coupled Beams under Random Support Motion," *ASME Paper No. 85-DET-184* (1985).
53. Ibrahim, R.A. and Heo, H., "Structural Modal Analysis under Random External and Parametric Excitations," *Proc. 3rd Intl. Modal Anal. Conf.*, Orlando, FL, **1**, pp 360-366 (1985).
54. Ibrahim, R.A. and Soundararajan, A., "An Improved Approach for Random Parametric Response of Dynamic Systems with Non-linear Inertia," *Intl. J. Nonlin. Mech.*, **20** (4), pp 309-323 (1985).

55. Ibrahim, R.A., "Numerical Solution of Nonlinear Problems in Structural Dynamics," Proc. Intl. Conf. Comp. Mech., Tokyo, Japan, 2, pp XI.155-160 (1986).
56. Cai, G. and Xi, D., "A General Method for Dealing with Random Vibrations under Wide-band Excitation-Moment Equation Method," Acta Mech. Solida Sinica, 1 (1), pp 114-121 (1986) (In Chinese).
57. To, C.W.S., "Random Modal Interaction of a Two Degree-of-Freedom Structure," Proc. ASME PVP Conf., Chicago, IL, PVP-113 (1986).
58. To, C.W.S. and Orisemolu, I.R., "Response of Discretized Plates to Transversal and In-plane Nonstationary Random Excitations," J. Sound Vib., 24 (6), pp 893-900 (1986).
59. To, C.W.S., "First Passage Time of Discretized Plates with Geometrical Nonlinearity," Computers Struct. (1987).
60. Lipsett, A.W., "Nonlinear Structural Response in Random Waves," ASCE, J. Struct. Engrg., 112 (11), pp 2416-2429 (1986).
61. Beaman, J.J. and Hedrick, J.K., "Improved Statistical Linearization for Analysis and Control of Nonlinear Stochastic Systems Part I: An Extended Statistical Linearization Technique," J. Dynam. Syst. Meas. Control, Trans. ASME, 103, pp 14-21 (1981).
62. Jahedi, A. and Ahmadi, G., "Application of Wiener-Hermite Expansion to Nonstationary Random Vibration of a Duffing Oscillator," J. Appl. Mech., Trans. ASME, 50, pp 436-442 (1983).
63. Orabi, I.I. and Ahmadi, G., "A Functional Series Expansion Method for Response Analysis of a Duffing Oscillator Subjected to White Noise Excitations," Abstracts, 22nd Ann. Mtg. SES, Penn. State Univ., p 188 (1985).
64. Orabi, I.I. and Ahmadi, G., "The Wiener-Hermite Expansion Method for Response Analysis of a Duffing Oscillator," Abstracts, 23rd Ann. Mtg. SES, Buffalo, NY, p S.11 (1986).
65. Spencer, B.F. and Bergman, L.A., "On the Reliability of a Simple Hysteretic System," ASCE, J. Engrg. Mech., 111 (2), pp 1502-1514 (1985).
66. Langley, R.S., "A Finite Element Method for the Statistics of Non-linear Random Vibration," J. Sound Vib., 101 (1), pp 41-54 (1985).
67. To, C.W.S., "Response of Tall Building with Geometrical and Material Nonlinearities to Nonstationary Random Excitation," Proc. 3rd Intl. Conf. Tall Buildings, Hong Kong and Guangzhou, China, pp 504-509 (1984).
68. To, C.W.S., "Response of Discretized Structures with Elasto-Plastic Deformation to Nonstationary Random Excitation," J. Sound Vib., 110 (3), pp 463-470 (1986).
69. Ditlevsen, O., "Elasto-Plastic Oscillator with Gaussian Excitation," ASCE, J. Engrg. Mech., 112 (4), pp 386-406 (1986).
70. Leadbetter, M.R., Lindgren, G., and Rootzen, H., Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes, Springer-Verlag, NY (1983).
71. To, C.W.S., "Random Response of a Duffing Oscillator by the Stochastic Central Difference Method," Abstracts, 23rd Ann. Mtg. SES, Buffalo, NY, p S.32 (1986).
72. To, C.W.S., "Recursive Expression for Random Response of a Duffing Oscillator" (submitted).
73. To, C.W.S., "Recursive Variance of Off-shore Structures to Random Waves" (submitted).
74. Lutes, L.D. and Jen, T.S., "Stochastic Response of Yielding Multi-story Structures," ASCE, J. Engrg. Mech., 102 (6), pp 1403-1418 (1983).
75. Katz, A. and Schuss, Z., "Reliability of Elastic Structures Driven by Random Loads," SIAM, J. Appl. Math., 45 (3), pp 383-402 (1985).

李力 译自: *Shock and Vib. Dig.*, 19, 3 (1987): 3-9  
(蔡强康校)

(上接第 395 页)

已知的事物是有限的, 未知的事物是无限的; 理智地我们站在神秘的无限海洋的孤岛中间。我们每一代的事业都是要开垦一点新的土地, 增加一些新的东西, 使已有的东西更加充实。

(T. H. 赫胥黎, 1887)

天津大学土木系刘兴业译自: *Boundary Element VIII Conference 1986*  
(梁焱 董务民校)