边界元法展望

［英］ 计算力学研究所 C. A. Brebbia

为了使一个新理论成为一个发现或前进一步，就应当同旧理论作斗争……，应当驳斥它，推翻它。从这个意义上来看，科学的进步（或至少是显著的进步），总是一场革命。

（英国哲学家K. Popper爵士，1975）

试图预言未来的发展，尤其是在计算机硬件的进展和理论研究的进展影响着计算技术发展的情况下，来试图预言未来的发展，如果说不是不可能的，那也总是很困难的。任何形式预言的常有的不确定性，都同仍然在发生的迅速发展情况耦合在一起。尽管如此，预言未来的发展趋势还是重要的。这是为了更好地确定我们的研究目标，并且在这样做时可以吸取其他数值方法特别是有限元法的历史经验。以有限元为例，它经历了一代人即25年的时间，才发展成为一种有很大潜力的方法。可是这么长的时间并不是花在技术的探讨上，而是由于人们不能吸收新的思想，不愿进行改革。关于这点，其重要性在科学史上还没有得到充分的强调！

这个标准可能有助于我们了解边界元法目前的状况和它的科学“年龄”。为此我们需要首先确定这种方法的诞生日期。

所谓发现，在于见到人人所已见到的，但想到谁也没有想到的。

（美国科学家A. Szent-Gyorgyi，1971）

正如许多科学思想都力图具有一般性那样，边界元的基础是相当简单的，并且是从另一途径对已有的事物进行解释。这种简单性，意味着一旦发现了一种方法，许多研究人员都有权共享它所带来的好处。然而，最重要的情况是，如果不问边界元法的历史基础，则边界元只是在1978年才得到明确的定义，尽管有些不大的变化，但定义仍在应用。1978年还召开了第1次边界元方法的学术会议并出版了关于边界元法的第1本书。当我们认识到新定义对我们目前的工作是多么关键时，讨论边界元的起因和缘由就变得黯然失色而无什么意义了。1978年开始把边界元解释为变分法或准变分法，使它的公式化表述脱离了经典积分方程的体系。这种方法的实质仍是利用曲线元，而在其他方面这种方法则大大得益于发展有限元法时所取得的数值方法的进展。简要地讨论这些方面，对于了解边界元法的许多尚未得到利用的潜力是重要的。

任何适用于宇宙内所有现象的科学原理，**必然**是简单的。

（美国数学家E. T. Bell，1937）

边界元法应用变分或功形式的公式，都突破了经典的数学积分方法，并且在这种情况下

不仅这种方法脱离了后者的限制，而且使工程师可以接受这种公式．这一步骤对于这种方法的未来发展具有根本的重要性并且是必不可少的．因为对于复杂的非线性问题和依赖于时间的积分形式问题，它允许使用比较简单的公式．

用虚功的方式来解释边界积分公式的重要性，在于这样就可以避免一系列虚拟的约束．如今我们可以建立空间、时间和非线性问题的边界元积分公式而没有任何特别困难．一旦我们掌握了基本原理，其应用看来就是平凡的和相当明显的，但要达到这一点，却需要很长的时间和做出大量的努力．

现在我们感到有信心，我们可以运用虚功的概念对于任何由控制方程给出的问题建立边界积分公式．这样就允许我们用不同变量和混合型公式来进行实验，允许我们把边界元和其他方法结合起来．它也为不连续元奠定了理论基础，并且一般地有助于确定某一特定公式中对连续性类型的要求．

正如哥白尼系统在解释宇宙机构时比托勒枚系统更好一样，用虚功方法解释边界积分方程更适合边界元法的发展．

注意到甚至那些积极致力于开展新的应用领域的研究人员，对这种发展的重要性也了解得那么不清楚，这仍然是使人费解的．对于不同的公式化表述，如互易定理、加权残数等的重要性也存在着误解，不能清楚地认识到所有这些方法实际上都是等效的，采用这一种或那一种，只是优先选择和方便的问题，而不是根本重要的问题．指出以下事实是有意义的：拉格朗日在建立和证明虚位移原理时，使用了平衡方程和问题的边界条件，并用所谓拉格朗日乘子来加权．当然这个推导是完全有效的，并且证明了边界元中使用的不同公式的等效性．

这些原理的更基本和更一般的表达式是虚功原理所给出的，所有的边界元公式（以及其他的公式）都可以由此而导出．这个原理无疑是力学中最美妙、最优雅的原理．不知有多少次有人问我，你如何能用线性基本解来解非线性问题？回答这一问题在于对虚功原理的虚场变量概念有清楚的了解．虚场变量是通过小增量（有些研究人员认为是无限小增量）来定义，使得这些虚变量及所有与其他有关的变量都可认为是线性系统的一部分．相反，实际的场变量却不受这种方式的限制，所以这原理可应用到非线性问题．

石头一块块地垒，书一本本地读，我在不断提高……

（Giovanbattista Strozzi给Brunelleshi写的墓志铭，1446）

虽然边界元法的基本概念在一定意义上讲是革命的，但由于它们的解释借助于虚功原理或类似的原理，所以其数值的实现应归功于以前的大量工作．

边界元法在工程上的应用，是与有限元法及其他数值方法的一系列计算方法的发展分不开的．特别是曲线元及其相应变换规则的发展，对于创立一种可以同有限元法媲美的方法至关重要．

在其他方法中发展起来的数值积分法，首先直接用于边界元法，进而推广到具有奇点的函数情形而改进其性能．

快速解算机也很重要，边界元方法从60年代以来这方面的进展中直接受益．在边界元法刚刚涌现时，许多其他数值方法已有效应用，不过这些数值方法中的许多问题需要进一步研究，但已经为创立可靠的有力工程工具打好了基础．

以上考虑已提出了边界元法的基础，这样我们可以定义边界元法如下：

边界元法是一种基于边界积分方程的数值方法，它考虑了曲线或曲面的精确的几何定义，可以利用虚功原理推导出来.

指出如下这点是重要的：当这些条件没有满足时，也就是在1978年或大约那个时期，尽管有关于边界积分方程的初期开创性工作，但边界元法是不存在的．正如以下所述：

> 科学上重要的事不在于取得多少新的事实，而在于发现思考这些事实的新思路。
>
> （英国科学家W．Bragg爵士，1968）

边界元发展的现状表明，蓬勃发展的计算方法能够解决不断扩大范围的工程问题．工程界已满意地接受了这一方法，而且使开发者感到吃惊的是，工程界已经以许多不同于原来设想的各种形式实现了这种方法．这些新进展中最重要的成就是采用**边界元法**作为工程设计的一种工具．虽然我们已经意识到边界元法在工程领域中的优点，主要是由于所计算问题需要的网格简单，但预见其全部意义是不可能的．计算机综合制造（CIM）的发展，特别需要更为有力的多功能的设计工具，但决不仅仅在于所谓的“初步的和概念性的设计阶段”．边界元法的网格可以由将模型表面分为较少的单元来生成，同生成有限元网格相比其网格要简单得多，且运算易于自动化．它不仅容易从固体模拟的定义进展到边界元的网格，而且可以建立生成边界元网格的专家系统，而有限元法却难于做到这点．

这种容易的办法解决了复杂的非线性问题，不仅包括应力分析问题，还包括各种其他问题，如水力学、静电学、电磁学、流体流动等，其成效是惊人的．有一种特殊的涉及运动物体和界面的非线性问题，使用边界元法可以容易和自然地得到解决，其中许多问题用其他方法实际上不可能解决．

使用边界元法也攻克了依赖于时间的问题．这种方法不仅对抛物型方程问题，而且对双曲型方程问题都能很好解决．使用近似法使区域积分简化为边界积分的新公式提出后，边界元法又有了进一步的发展．这些数值实验为某些边界元的新型解释提供了原始资料，这为边界元方法的进一步应用开辟了道路．

到目前为止，应用边界元法对几何非线性问题的研究还不多．虽然提出了某些线性化临界载荷解，但这种解很少或仅对非常特殊的非线性几何情形求解．困难在于当非线性发展时需要重新确定坐标系和相应的控制方程．或许对此问题的解可尝试使用其他形式的边界积分公式或不同的参考系．

> 至于科学本身，它只能发展。
>
> （伽里略，1632）

边界元方法仅仅在其最初10年内就取得了上述那些进展，可以期望，今后10—15年间将继续进行深入的研究．我们认为，今后的研究将集中在下列几个关键领域．

考虑到广泛的物理现象的解，新的应用范围将增加．在所有这些发展中，保持只在边界上离散的简单性是重要的．但这样会使问题具有非线性和初始条件的危险．在这方面重要的是应指出，尽管解许多非线性问题通常需要计算内点处的变量，但这些计算及随后的体积分并不需要把积分区域划分成许多“单元”来进行．计算时首先随机地确定一系列的点，然后确定围绕这些点的影响区域，最后在该影响区域上进行积分．格子（cell）的概念对边界元法来说是一个有害的概念，它是有限元法遗留下来的东西，

能够解大多数工程问题的综合边界元计算机系统将会发展，有时需要结合有限元程序求解．但为了保证这些系统的高效性和可靠性，不能让边界元法从属于有限元法，而应当分别使用基于各自方法的程序，然后使用公用数据管理结构把二者结合起来，而有限元程序和边界元程序都可以从这个数据管理结构中寻址．

新的硬件可能较任何其他数值方法更大程度地影响边界元的研究．令人感到惊异的是，边界元法有两个明显的理由使它很理想地适合于新型计算机硬件的两极端即超级计算机和工程工作站．超级计算机的出现似乎有利于边界元法，它们的广泛应用会对边界元这种新方法的传播做出贡献．边界元法适合于超级计算机，似乎是由于一系列边界元运算可以容易矢量化，尤其是所得方阵的解的积分容易矢量化．后者已经得到了一些给人印象深刻的结果，而前者还没有适当加以研究．这需要进一步研究在边界元程序下用来进行数值积分的方法．

边界元法适用于工程工作站，是由于用它们进行初步设计和概念设计过程要比有限元法容易得多．工程工作站吸取超级计算机的一些特点，最终二者成为同一网络，这只是一个时间问题．有趣并且有希望的是边界元法似乎特别适合于计算机硬件配置的两极端，因此对于网络是一种极好的方法．

头等理论是预言，二等理论是禁止，三等理论是事后的解释．

（苏联科学家A．I．Kitaigorodski，1975）

当计算机综合制造过程更自动化时，缩短设计部件的时间就显得更为重要．使用简单的设计法则和公式可以达到这目的，但这样可能导致得到不精确的或过分保守的结果（二等理论）．有限元程序可以比通常的法则和公式得到更精确的结果，但这种法则不能显著缩短设计时间．使用有限元法的工程分析员经常抱怨的是得到结果太慢，以致影响了特别部件的设计（三等理论）．问题主要在于生成适当网格所需的时间过长．虽然采用某些预处理程序可以使这个问题得到一些缓和，但这时问题变为需要特定水平的专业技术人员来操纵这些系统，而且不管怎样，问题症结依然存在！若将数值方法应用到计算机综合制造过程中，则它们必须是使用起来简单或更好，而且不被发觉，做到这点可以使用边界元法与某些形式的专家系统相结合，这种专家系统可根据几何上模拟计算机结果显示而直接进行，无需任何明显的参考网格或细分．用有限元法来进行这些工作是极端困难的．同其他任何理由相比，这种使用的简单性更有理由使边界元法具有作为工程设计方法的强大力量源泉（头等理论）．

总之，在下一个10年，我们对边界元法研究的目标是：

1．解决新的工程应用领域问题，同时保持边界元法的主要特性，仅在表面划分网格，不使用内部格子或严格的区域细分．同时结合使用有限元法，但边界元法并不从属于有限元法而是保持其全部潜力．

2．发展边界元法的数值方面的研究，使其形式更好地适合于现有的和将来的超级计算机，其目的不仅在于优化解算机和其他矩阵运算，而且要研究出适合新硬件的新积分格式．

3．更好实现边界元法在计算机综合制造中特别在工程工作站中作为一种工程设计的工具．这包括利用人工智能元件来确定网格和用于设计及形状优化子程序的相互作用过程．

我相信这是我们现在必须走的道路，这也将是我们的贡献．

（下转第428页）

55. Ibrahim, R.A., "Numerical Solution of Nonlinear Problems in Structural Dynamics," Proc. Intl. Conf. Comp. Mech., Tokyo, Japan, 2, pp XI.155-160 (1986).

56. Cai, G. and Xi, D., "A General Method for Dealing with Random Vibrations under Wide-band Excitation-Moment Equation Method," Acta Mech. Solida Sinica, 1 (1), pp 114-121 (1986) (in Chinese).

57. To, C.W.S., "Random Modal Interaction of a Two Degree-of-Freedom Structure," Proc. ASME PVP Conf., Chicago, IL, PVP-113 (1986).

58. To, C.W.S. and Orisamolu, I.R., "Response of Discretized Plates to Transversal and In-plane Nonstationary Random Excitations," J. Sound Vib., 24 (6), pp 893-900 (1986).

59. To, C.W.S., "First Passage Time of Discretized Plates with Geometrical Nonlinearity," Computers Struc. (1987).

60. Lipsett, A.W., "Nonlinear Structural Response in Random W-ves," ASCE, J. Struc. Engrg., 112 (11), pp 2416-2429 (1986).

61. Beaman, J.J. and Hedrick, J.K., "Improved Statistical Linearization for Analysis and Control of Nonlinear Stochastic Systems Part I: An Extended Statistical Linearization Technique," J. Dynam. Syst. Meas. Control, Trans. ASME, 103, pp 14-21 (1981).

62. Jahedi, A. and Ahmadi, G., "Application of Wiener-Hermite Expansion to Nonstationary Random Vibration of a Duffing Oscillator," J. Appl. Mech., Trans. ASME, 50, pp 436-442 (1983).

63. Orabi, I.I. and Ahmadi, G., "A Functional Series Expansion Method for Response Analysis of a Duffing Oscillator Subjected to White Noise Excitations," Abstracts, 22nd Ann. Mtg. SES, Penn. State Univ., p 188 (1985).

64. Orabi, I.I. and Ahmadi, G., "The Wiener-Hermite Expansion Method for Response Analysis of a Duffing Oscillator," Abstracts, 23rd Ann. Mtg. SES, Buffalo, NY, p S.11 (1986).

65. Spencer, B.F. and Bergman, L.A., "On the Reliability of a Simple Hysteretic System," ASCE, J. Engrg. Mech., 111 (2), pp 1502-1514 (1985).

66. Langley, R.S., "A Finite Element Method for the Statistics of Non-linear Random Vibration," J. Sound Vib., 101 (1), pp 41-54 (1985).

67. To, C.W.S., "Response of Tall Building with Geometrical and Material Nonlinearities to Nonstationary Random Excitation," Proc. 3rd Intl. Conf. Tall Buildings, Hong Kong and Guangzhou, China, pp 504-509 (1984).

68. To, C.W.S., "Response of Discretized Structures with Elasto-Plastic Deformation to Nonstationary Random Excitation," J. Sound Vib., 110 (3), pp 463-470 (1986).

69. Ditlevsen, O., "Elasto-Plastic Oscillator with Gaussian Excitation", ASCE, J. Engrg. Mech., 112 (4), pp 386-405 (1986).

70. Leadbetter, M.R., Lindgren, G., and Rootzen, H., Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes, Springer-Verlag, NY (1983).

71. To, C.W.S., "Random Response of a Duffing Oscillator by the Stochastic Central Difference Method," Abstracts, 23rd Ann. Mtg. SES, Buffalo, NY, p S.32 (1986).

72. To, C.W.S., "Recursive Expression for Random Response of a Duffing Oscillator" (submitted).

73. To, C.W.S., "Recursive Variance of Offshore Structures to Random Waves" (submitted).

74. Lutes, L.D. and Jan, T.S., "Stochastic Response of Yielding Multi-story Structures," ASCE, J. Engrg. Mech., 109 (6), pp 1403-1418 (1983).

75. Katz, A. and Schuss, Z., "Reliability of Elastic Structures Driven by Random Loads," SIAM, J. Appl. Math., 45 (3), pp 383-402 (1985).

李　力 译自：*Shock and Vib. Dig.*, **19**, 3 (1987)：3—9

（蔡强康校）

（上接第 395 页）

已知的事物是有限的，未知的事物是无限的；理智地我们站在神秘的无限海洋的孤岛中间。我们每一代的事业都是要开垦一点新的土地，增加一些新的东西，使已有的东西更加充实。

（T. H. 赫胥黎，1887）

天津大学土木系**刘兴业**译自：Boundary Element Ⅷ Conference 1986

（梁　焰　董务民校）