

三向应力状态下材料的力学强度理论

胡庆山

(北票煤矿专科学校)

提要 通过对古典强度理论和苏联切略依海尔、巴兰金等人所提出的强度极限曲面的分析^[1], 本文提出一个新的见解; 并通过强度条件的选择和各项参数的研究, 导出了一个计算强度的公式。经过与实验结果比较、分析, 证明这一公式计算结果与实际情况比较接近。

关键词 强度理论; 强度极限曲面; 三向应力状态

1. 概述

力学强度理论是研究材料破坏主要原因的一些假说。构件材料的强度问题又是材料力学所研究的最基本问题之一。

各种材料的破坏现象可归纳为断裂破坏和流动破坏(也叫屈服破坏)两大类。因此工程上通常用的古典强度理论, 按力学界通用的分类基本上也分为两大类: 第一类适用于脆性状态下断裂破坏的材料, 一般采用第一强度理论即最大拉应力理论, 或第二强度理论即最大拉应变理论; 第二类适用于塑性状态下流动破坏的材料, 普遍采用第三强度理论即最大剪应力理论, 或第四强度理论即最大形状改变比能理论。

这些古典强度理论都曾对工业生产起过较大的作用, 而且在目前工程设计中仍然被应用。但它们都存在一定的缺点。因此, 进一步研究强度理论, 以寻找材料的破坏条件和破坏特征, 从而防止材料破坏, 或者是将材料按需要进行有效的破碎。这在理论上和实践中都有重要意义。

本文讨论的实质, 是根据实践中发现的材料破坏条件, 提出理论上相应的强度条件, 在以三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的正交坐标系的应力空间中可找出表示危险应力状态的曲面方程, 该曲面就称为强度极限曲面, 其上任意一点坐标值就代表材料上某一点的危险应力状态, 所谓危险应力状态就是指材料所受的外力达到一定数值时, 首先发生屈服或破坏的应力状态。

如果把应力状态的综合不变量用应力张量的代数特征方程表示, 则可写成

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0 \quad (1)$$

式中的系数是应力张量不变量。假如用主应力表示, 则应力张量的不变量可写为;

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ J_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

如找出一般对称形式的解，用应力状态的综合不变量表示

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ \theta_2^2 &= \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ \theta_3^3 &= (\sigma_1 - \bar{\sigma})(\sigma_2 - \bar{\sigma})(\sigma_3 - \bar{\sigma}) \end{aligned} \quad (3)$$

若使三次综合不变量 θ_3^3 与应力偏斜张量的最简单的三次不变量相符，式中

$$\bar{\sigma} = (1/3)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

因此可以认为强度极限条件可用应力状态的综合不变量单值地表示为

$$\phi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = C \quad (4)$$

而在古典强度理论中，胡勃-米塞斯最基本的极限条件只包含一个二次不变量，即：

$$\theta_2^2 = \sigma_0^2 = \text{常量} \quad (5)$$

苏联切略依海尔、巴兰金（1937年）、雅根（1931年）及密罗柳包夫（1953年）等所提出包含前二个综合不变量的极限条件为^[1]

$$F(\theta_1, \theta_2) = \text{常量} \quad (6)$$

若把函数 F 写成下列二次多项式的形式

$$\theta_2^2 + A\theta_1^2 + B\theta_1 = \text{常量} \quad (7)$$

它线性地包含着三个参量 A, B, C ，而要决定它们至少需要用三个实验，如拉伸、压缩及剪切等实验^[1]。

如将式（7）转换成回转面的自然坐标系，其极限条件为

$$\frac{3}{2}(x^2 + y^2) + 3Az^2 + B\sqrt{3}z = \text{常量} \quad (8)$$

而巴兰金的极限条件中令 $A = 0$ ，即简化为

$$\theta_2^2 + B\theta_1 = \text{常量} \quad (9)$$

在自然坐标系中成为回转抛物面，即

$$x^2 + y^2 + B\frac{2}{\sqrt{3}}z = \text{常量} \quad (10)$$

由于巴兰金没有从理论上解决好方程（10）中的系数和强度条件之间的关系，也就没有准确地反映破坏条件的客观规律。密罗柳包夫的极限条件为

$$r^2 - 4x^2\zeta^2 = (2/3)\lambda^2 \quad (11)$$

它是单腔的回转双曲面。就是说，不仅在各向等值压缩时，而且在各向等值拉伸时，强度极限都是无限制的，这与实验结果相矛盾，而这样的极限强度曲面在原则上是不正确的。

根据材料力学，处在三向任意应力状态下的材料单元体的体积改变，可从弹性体内的变形能求得，材料单元体内变形能为

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_1 dy dz) \epsilon_1 dx + \frac{1}{2}(\sigma_2 dx dz) \epsilon_2 dy + \frac{1}{2}(\sigma_3 dx dy) \epsilon_3 dz \quad (12)$$

将广义虎克定律代入方程中，可得到单位体积内的变形比能为

$$u = \frac{U}{dx dy dz} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (13)$$

上式由两部分组成：因体积改变而积蓄的变形比能

$$u_v = \frac{1}{6E} (1 - 2\mu) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1 - 2\mu}{6E} \theta_1^2 \quad (14)$$

及因形状改变而积蓄的比能

$$u_\phi = \frac{1 + \mu}{3E} \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1 + \mu}{3E} \theta_2^2 \quad (15)$$

根据实验观察，材料进入危险状态时其宏观现象可分为两种形式：①材料的流动（屈服）。如单向拉伸时材料的屈服，它是由最大正应力和最大剪应力引起的。正如莫尔所说，极限剪应力 τ 的值与滑移面上的正应力 σ 值有关。②材料的破坏，又可分为两种情况：一为断裂，它是垂直于最大拉应力或最大拉应变方向的分离破坏。如铸铁在简单拉伸时沿横截面断裂，石块在简单压缩时沿纵向断裂。另一种为切断，它是沿最大剪应力作用面错开，如铸铁在简单压缩时大约沿 45° 斜面上切断，因为该面上作用着最大剪应力。

综上所述，我们所研究的三向应力状态下材料的力学强度理论的实质，就是认为：①构成材料破坏力的来源就是由应力状态的综合不变量 θ_1^2 和 θ_2^2 所构成的，或者说是由单位体积弹性变形比能 u_v 及单位形状改变比能 u_ϕ 所引起的。这就构成了强度条件的计算应力，把最完整地反映材料破坏时所需要全部弹性变形比能作为计算应力，才能最全面地反映出材料破坏这一客观现实。②材料进入危险状态的原因，则是由于材料在上述应力作用下，最大主应力和最大、最小主应力差，分别达到了单向许用抗拉强度极限、单向许用抗压强度极限或剪切许用强度极限的某一项指标，或它们达到上述应力状态作用下的综合指标，而引起材料破坏的。这就构成了材料破坏的强度条件，因此我们可以用强度极限条件表达式写成

$$\phi(\theta_1, \theta_2) = K \quad (16)$$

而

$$f(K) = \{[\sigma], [\tau], \theta_1, \sigma_{max}/\theta_1\} \quad (17)$$

通过上述条件的选择，本文的目的在于寻求一个既适合于材料的脆性破坏，又适用于塑性屈服的较能全面地反映出材料破坏条件一般规律的力学强度的表达式。

2. 理论基础

力学强度理论表达式最终都要反映计算应力与许用应力间的关系。而计算应力又可用在外力作用下材料所积蓄在弹性体内的变形比能表示

$$u = u_v + u_\phi = \frac{1 - 2\mu}{6E} \theta_1^2 + \frac{1 + \mu}{3E} \theta_2^2 \quad (18)$$

由于材料在进入危险状态时，各主应力间的关系不再继续按一定比例增大，也就是说主应变与相应的主应力不再按原来线性增大而增大。实验结果表明：①在超过弹性限度后，材料的弹性模量 E 随主应力的变化而改变成随动弹性模量 E' 。由于弹性模量 E 的影响，所以在计算中 θ_1^2 和 θ_2^2 前面的系数已不再适用。②材料进入危险状态的过程，只不过是三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 或者说是应力状态综合不变量 θ_1^2 和 θ_2^2 单值地随三个主应力变化而不断地交错改变的一个力学过程。这种过程证明了任何材料都可能在某种条件下发生脆性破坏，而在另

一种条件下则处于塑性屈服状态。同一种材料，当主应力状态的类型不同时，也可能发生不同形式的破坏。该结论已被实验证实。

为保持作用在原来材料上的各主应力值及各主应力间的比值不变，我们必须把 θ_1^2 和 θ_2^2 的系数用一个能反映出各主应力比值的系数来代替，这就要把作用在材料上的体积变形比能和形状改变比能分离出来。如设改变后的 θ_1^2 和 θ_2^2 的系数分别为 A 和 B ，则此时计算应力为 $\sigma_r'^2$ ，

$$\sigma_r'^2 = A\theta_1^2 + B\theta_2^2 \quad (19)$$

上式中的参量 A ， B 必须满足以下三个条件：①它必须能全面地反映出参加体积变形比能与形状改变比能的两组主应力的变化状态和各主应力的变化特征，②同时它又能全面地反映出材料的应力状态作用形式。如在剪切应力状态时，能使 $A\theta_1^2 = 0$ ，并能使 $B\theta_2^2 = u$ ，在三向等值应力状态时，则使 $B\theta_2^2 = 0$ ，使 $A\theta_1^2 = u$ 。③在除此以外的其它任意应力状态时都有 $A\theta_1^2 + B\theta_2^2 = u$ ，即总保持使两组主应力产生的变形比能总值等于作用在材料单元体上所产生的总变形比能值。如果计算应力是在三向任意应力状态下发生的，它若与简单应力状态下的许用应力相比较，就有一个应力状态的关系问题。如在三向等拉伸的极限应力状态作用下的材料发生破坏，在式(19)的计算应力中

$$A\theta_1^2 = \frac{u_v}{u}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad B\theta_2^2 = \frac{u_\phi}{u} \cdot \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = 0$$

因为 $A = \frac{u_v}{u} = 1$ ，故 $\sigma_r'^2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = 9\sigma^2$ ，而在单向拉伸应力状态下 $\sigma_r'^2 = A\theta_1^2 + B\theta_2^2 = \sigma^2$ 。为使三向一般应力状态数值和简单许用应力值进行比较，在式(19)中各项都需乘一个应力状态系数。如设 $A\theta_1^2 = \frac{u_v}{u}\theta_1^2$ 的应力状态系数为 M ，设 $B\theta_2^2 = \frac{u_\phi}{u}\theta_2^2$ 的应力状态系数为 N 。若只在三向拉伸或剪切应力状态下，则其强度极限条件公式可写成

$$\sigma_r'^2 = AM\theta_1^2 + BN\theta_2^2 \leq [\sigma]^2 \quad (20)$$

式中 σ_r' 为该强度条件下的计算应力。

按力学方面考虑，参量 M ， N 必须用单向拉伸、压缩，二向等拉伸、压缩，三向等拉伸及剪切等六个实验结果来确定：

①在剪切应力状态时， $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$ ， $\sigma_2 = 0$ ，由于 $\theta_1^2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = 0$ ， $u_v/u = 0$ ，而 $u_\phi/u = 1$ ，代入式(20)中，则

$$\sigma_r'^2 = N\theta_2^2 \leq 3[\tau]^2 = [\sigma]^2 \quad (21)$$

所以

$$\sigma_r'^2 = N \cdot \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = N \cdot 3\tau^2 \leq 3[\tau]^2$$

因而应力状态系数

$$N = 1 \quad (22)$$

②在三向等值拉伸的极限应力状态时，有 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = [\sigma]$ ，由于 $\theta_2^2 = 0$ ， $u_\phi/u = 0$ ，而 $u_v/u = 1$ ，将其代入式(20)中，则

$$\sigma_r'^2 = M\theta_1^2 \leq [\sigma]^2 \quad (23)$$

根据该式的力学意义和三向等值拉伸极限应力状态的实验¹⁾资料分析，要使上式成立，则应

力状态系数为

$$M = \frac{\sigma_{\max}^2}{\theta_1^2} = \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} \right)^2 \quad (24)$$

上式说明应力状态系数 M 是最大主应力与三个主应力之和的一个比值的平方数，如在三向等值拉伸时， $M = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} \right)^2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ ，在二向等值拉伸时， $M = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ 。依此类推可求出各主应力在任意比值下的 M 值。

上海交通大学工程力学教研室曾经做过低碳钢的三向等拉伸的极限强度应力状态实验，其结果和简单应力状态下许用强度相同，证明上述系数 M 选择合理。

③在单向拉伸、压缩和二向等拉伸、压缩实验中检验参量 M ， N ，证明符合实验资料结果，说明参数选择合理。

综上所述，我们选择的计算应力为

$$\sigma_v^2 = AM\theta_1^2 + BN\theta_2^2 = \frac{u_v}{u} \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} \right)^2 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{u_\phi}{u} \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (25)$$

它既能同任意复杂的应力状态相比较，也能同简单应力状态下许用应力值进行比较。

我们再来研究在复杂应力状态下的材料破坏的强度条件。在强度问题计算中，构件内的应力与所受载荷之间一般都具有正比关系，因此强度条件可以这样建立：构件上的最大主应力不应超过许用应力，而许用应力就是与破坏载荷相应的破坏应力的 $1/n$ 。而 n 为大于 1 的数值，叫安全系数。即

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \sigma/n \quad [2] \quad (26)$$

受压的塑性材料在应力小于屈服极限时，材料的行为与拉伸时相同，塑性材料的比例极限（对钢而言甚至是屈服极限）及弹性模量 E 在拉伸与压缩时大约相等。而对于另外某些材料的抗拉和抗压强度则大不相同。在简单拉伸和压缩时，对理想塑性材料而言，危险应力就是它的屈服极限 σ_T 。因为用理想塑性材料所制成的构件发生屈服时，就认为它已失去效用。对脆性材料而言，危险应力就是强度极限 σ_B [8]。但塑性变形在一定范围时，拉伸和压缩的屈服极限是接近的。

由于在三向应力状态中，特别是在三向受压缩状态下，随着侧向应力的增大，材料被破坏时的最大应变随之增大，即需要在更大的压力下材料发生较大变形后才破坏。例如对大理石而言，当侧向应力为 400 kg/cm^2 时，最大应变达 12%。而低碳钢在三向均匀拉伸的极限强度下则出现脆性断裂。因为在一定条件下，它可表现为塑性状态，而在另一种条件下又表现为脆性，因此说材料在三向应力状态下的破坏受它的应力作用形式所支配。

本文研究的理论依据是：

①材料的弹性变形比能在三向一般应力状态下即表示为单元体总的变形比能，从式(25)

1) 上海交通大学工程力学教研室曾用低碳钢做过三向等拉伸极限状态应力实验，证明许用应力与简单应力状态下许用应力相同，但发生脆性断裂破坏。见参考文献 [2]。

的计算应力可以说明材料在外力作用下引起破坏是由于受载应力所产生的全部变形比能引起的。例如，a) 在不存在剪应力时的三向等拉伸极限应力状态时，如在式 (25) 中

$$B = u_{\phi}/u = 0, A = u_v/u = 1$$

此时体积变形比能就等于全部变形比能，它会使材料因拉伸而引起分裂破坏；b) 在纯剪应力状态时，在式 (25) 中 $A = u_v/u = 0, B = u_{\phi}/u = 1$ 。此时形状改变比能就等于全部变形比能，若比能值达到剪应力状态下的许用应力值时，就会使材料发生剪切破坏；c) 在一般任意应力状态中就是由于 a) 和 b) 两部分比能值各占一定比例，由于综合指标达到强度极限应力值而使材料发生破坏。

②材料的破坏是以最大正应力和最大剪应力等于常量为基础而得到的。在一般任意应力状态下，危险截面上既存在正应力也存在剪应力，而它们的综合效应达到一定综合指标时，就会使材料发生破坏。

③这些单项指标和综合指标，就是由抗拉与抗剪许用应力曲线延伸线及抗压与抗剪许用应力曲线延伸线所围成的包络线。而它在 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的正交坐标系中所表示的许用应力曲面方程就是我们要建立的强度极限曲面模型。而曲面上的任意一点坐标值就代表材料上某一点的危险应力状态。当计算应力值超出曲面的包络线时，材料就会发生破坏。

3. 强度极限曲面

3.1 利用材料的抗拉许用应力强度与抗剪切许用应力强度的关系，作出抗拉与抗剪许用应力强度极限曲线。根据 Mises 屈服条件应是在垂直于 $\theta_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ 的平面上的圆柱体，为计算方便用许用应力代替相对应的强度极限，其方程表示为

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2[\sigma]^2 = 6[\tau]^2 \quad (27)$$

如果材料只处在拉伸和剪切应力状态中，把式 (25) 写成

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 = AM\theta_1^2 + BN\theta_2^2 = \frac{u_v}{u} \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} \right)^2 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ + \frac{u_{\phi}}{u} \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq [\theta]^2 \end{aligned} \quad (28)$$

若在三向等拉伸极限应力状态时， $\theta_2^2 = 0, B = u_{\phi}/u = 0, A = u_v/u = 1$ ，代入式 (28)，则

$$\sigma_v^2 = \sigma_{max}^2 \leq [\sigma]^2 \quad (29)$$

当在剪切应力状态时， $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \sigma_2 = 0$ 而 $\theta_1 = 0$ ， $A = u_v/u = 0, B = u_{\phi}/u = 1$ ，代入式 (28)，则

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \\ + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq [\sigma]^2 = 3[\tau]^2 \end{aligned} \quad (30)$$

证明符合 Mises 屈服条件。若把式 (28) 写成

$$\frac{AM\theta_1^2}{[\sigma]^2} + \frac{BN\theta_2^2}{3[\tau]^2} = 1 \quad (31)$$

这是一个椭圆方程。若 $B = 0, A = 1$ ，则

$$\sqrt{M}\theta_1 = \sigma_{max} \leq [\sigma]$$

为长半轴；若 $A = 0, B = 1, N = 1$ ，则 $\tau \leq [\tau]$ 为短半

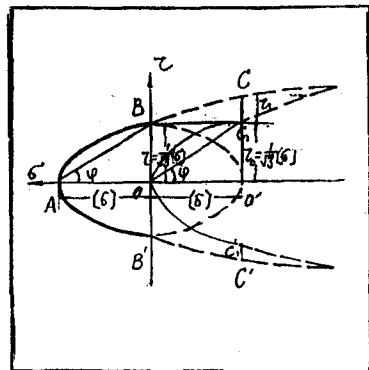


图 1

轴。如以 $[\sigma]$ 为椭圆长半轴表示三向等拉伸时的许用应力值，以 $[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$ 为短半轴表示纯剪切应力状态时的许用应力值，以 O 点为椭圆的对称中心，则可作出该椭圆图形。如图1所示。

3.2 利用材料剪切许用应力值与压缩许用应力值作出剪切与压缩许用应力曲线图。材料力学规定，拉伸应力为正，所以它的应力值应从 O 点起向正方向延伸。因此许用应力值的顶点 A 在 O 点左侧。如图1中实线的半椭圆部分。压应力为负，所以应从 O 点起向负应力值方向延伸。因此许用压缩应力值应在 O 点右侧。又因材料在某种状态如三向等值压缩应力状态下强度极限值或相对应的许用应力值是无限限制的，所以剪切、压缩许用应力曲面开口应向右侧，可以无限制地延展。有些材料的拉伸与压缩的许用应力值相同，而对于有些材料则不同，我们若在同一图上表示就必须遵循拉伸与剪切关系规则，即以拉伸应力的许用应力值为单位，在每一个 $[\sigma]$ 值上它所对应的许用剪切应力值为 $[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$ ，也就是说在拉伸与剪切

关系曲线中 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{[\tau]}{[\sigma]} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，而在压缩与剪切关系曲线中也应该有相同的斜率，因为我们认为拉伸与压缩时的许用应力值相同。对于压缩许用应力大于拉伸许用应力的某些材料，若在三向压应力状态中由于有侧向压应力的存在而存在一个流体静力应力场，则允许它的抗剪切应力值超出拉伸与剪切关系曲线中的许用应力值很多，而不会使材料发生破坏。正如[5]论述的，流体静力应力状态不能使材料进入塑性屈服状态，而只满足应力互换原则，因此才能与实验相符。

3.3 根据式(17)，我们知道在三向压应力状态下材料进入危险状态，除了与所受载荷的正应力和斜面上的剪应力有关外，还与某些材料的抗拉与抗压许用应力不同有关。而抗压强度的许用应力超过抗拉强度许用应力的那部分应力使材料的许用剪切变形增大，这与侧向压应力的存在而呈现一个流体静力应力场有关。即与 $\sqrt{M}\theta_1 = -\sigma_{\max}$ 有关，与 $-\sigma_{\max}/\theta_1$ 及 θ_1 有关。它使三向压应力状态下的剪应力超过纯剪切的许用应力值很多倍而不使材料发生破坏。但由于材料的塑性变形过大，使所设计的构件不能使用，就必须要有个抗压与抗剪强度的关系式做为约束条件。由于我们假定材料有相同的抗拉与抗压强度极限，对应有相同的许用应力值，所以在图1中 O 点向负应力值延伸方向取 $OO' = AO = [\sigma]$ ，并作 $O'C$ 垂直 OO' ，取 $O'C_1 = [\sigma]/\sqrt{3} = [\tau]$ 。

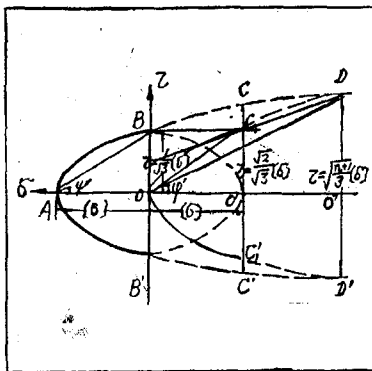


图 2

3.4 如果把抗拉与抗剪许用应力曲线延长，并把抗压与抗剪许用应力曲线也延长，可以证明两条曲线相交于 D 点及其相对应的另一侧 D' 点，而曲线 $D'B'ABD$ 就称为三向应力状态下材料的许用应力曲线的包络线。如图2所示。这条曲线所围成的曲面称为许用强度极限曲面，即 $\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \sigma/n$ 。而曲面上任意一点坐标值就代表材料上某一点的应力状态。

若把三向压应力状态下的许用应力用 $[\sigma_{\text{三压}}]^2$ 表示，则

$$[\sigma_{\text{三压}}]^2 = AM\theta_1^2 + BN\theta_2^2 \quad (32)$$

a) 当 θ_1^2 和 θ_2^2 中的各主应力值都不超过简单应力状态下许用应力值时,它就等于 $[\sigma]^2$ 。

b) 由于是在三向压应力状态下,应力是由一组平均应力 $\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma_3' = \bar{\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 / 3$ 形成的流体静力应力场及超出平均应力的各主应力差这两部分构成。随着流体静力应力场的应力值的增大,各主应力差的差值也越来越大才能使材料发生破坏。如果我们把这个流体静力应力场的应力值以材料单向破坏时的许用应力为单位,来衡量流体静力应力场中应力值的大小,即 $\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma_3' = \bar{\sigma} \geq n[\sigma]$, 则式 (32) 就可变成由许用应力值及超过许用应力值的两部分(超过平均主应力后的各主应力差的那部分)组成。

$$\begin{aligned} [\sigma_{\text{三压}}]^2 &= AM\theta_1^2_{\text{许}} + AM\theta_1^2_{\text{超}} + BN\theta_2^2_{\text{许}} + BN\theta_2^2_{\text{超}} \\ &= A([\sigma]^2 + (\sqrt{M}\theta_1 - [\sigma])^2) + BN([\sigma]^2 - \sqrt{M}\theta_1[\sigma]) \end{aligned} \quad (33)$$

为了反映计算应力与许用应力的关系,我们把式 (25) 的计算应力与式 (33) 的许用应力公式联在一起,则:

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= AM\theta_1^2 + BN\theta_2^2 \\ &\leq A([\sigma]^2 + (\sqrt{M}\theta_1 - [\sigma])^2) + BN([\sigma]^2 - \sqrt{M}\theta_1[\sigma]) \end{aligned} \quad (34)$$

上式就是本文强度理论的强度极限曲面方程。我们从以下五个方面来证明其正确性。

①在三向等拉伸应力状态时, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, 则 $B = 0$, $A = u_v/u = 1$, 代入式 (34)

$$\sigma_r^2 = AM\theta_1^2 \leq A([\sigma]^2 + (\sqrt{M}\theta_1 - [\sigma])^2)$$

经化简后, 则得

$$\sigma_r^2 = \sigma_{\text{max}}^2 \leq [\sigma]^2 + (\sqrt{M}\theta_1 - [\sigma])^2 \quad (35)$$

当 $\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma]$ 时,

$$\sigma_r^2 = \sigma_{\text{max}}^2 \leq [\sigma]^2 \quad (36)$$

说明材料不能被破坏, 是安全的, 证明式 (34) 和式 (35) 成立。当 $\sigma_{\text{max}} > [\sigma]$ 时, 由式 (34) 得

$$\sigma_r^2 = \sigma_{\text{max}}^2 \leq [\sigma]^2 + (\sqrt{M}\theta_1 - [\sigma])^2 \quad (37)$$

经计算, $\sigma_r = \sigma_{\text{max}} > [\sigma]$, 证明式 (34) 的计算应力大于许用应力, 表明材料已进入破坏状态。说明式 (34) 对三向等拉伸应力状态是适用的。

②在三向等压缩状态时, $\sigma_{\text{max}} = -\sigma > [\sigma]$, 则

$$\sigma_r^2 = \sigma_{\text{max}}^2 \leq [\sigma]^2 + (\sqrt{M}\theta_1 - [\sigma])^2 \quad (38)$$

经计算, $\sigma_r = -\sigma < \sqrt{[\sigma]^2 + (\sqrt{M}\theta_1 - [\sigma])^2}$, 说明计算应力为负值, 永远小于许用应力, 证明材料永远不会发生破坏。这结论被实验所证实。布立基曼曾以 70000 kg/cm² 的三向等压应力加到冰上, 而冰并未发生裂纹^[8]。

在三向等值压应力状态时, 由于不存在剪应力, 所以应力状态的点应位于通过原点且垂直于 $\theta_1 = 0$ 平面的直线上, 不与强度极限曲面相交, 表明在此应力状态下, 材料的强度是无限的。

③在纯剪切应力状态时, $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, 则 $A = u_v/u = 0$, $B = 1$, $N = 1$ 。由于 $\theta_1 = 0$, 将其代入式 (34), 有

$$\sigma_r^2 = BN\theta_2^2 \leq BN([\sigma]^2 - \sqrt{M}\theta_1[\sigma]) \quad (39)$$

由于 $[\sigma] = \sqrt{3}[\tau]$, 所以 $\sigma_r^2 = \theta_2^2 = 3\tau^2 \leq 3[\tau]^2$, 说明式 (34) 是正确的。

④当在三向一般任意应力状态下工作时, 除剪切应力外还存在着正应力 $\sqrt{M}\theta_1$, 正应力与斜面上的剪应力的关系可由式 (39) 看出: 当 $A=0, B=u_\phi/u=1, N=1$ 时, $\theta_2^2 = [\sigma]^2 - \sqrt{M}\theta_1[\sigma]$, 所以斜面上的最大剪应力为 $\theta_2 = \sqrt{3}\tau_{\max} = \sqrt{[\sigma]^2 - \sqrt{M}\theta_1[\sigma]}$, 即有

$$\tau_{\max} = \sqrt{[\sigma]^2 - \sqrt{M}\theta_1[\sigma]} / \sqrt{3} \quad (40)$$

如果我们用 $h = \sqrt{M}\theta_1/[\sigma]$ 表示正应力与剪应力的关系式, 则可得

τ_{\max}	0	$[\sigma]/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}[\sigma]/\sqrt{3}$	$[\sigma]$...	$\sqrt{n+1}[\sigma]/\sqrt{3}$
$h = \sqrt{M}\theta_1/[\sigma]$	1	0	-1	-2	...	-n

因此, 在三向一般任意应力状态下, 只要有正应力存在, 就可以求出它在斜面上的剪切应力的大小。所以这就确定了强度极限曲面的抛物面的开口大小。而 $\sqrt{M}\theta_1$ 的符号既表明作用力是拉还是压, 还决定了应力作用形式及斜面上的剪应力是增还是减。就是说流体静力应力场只与 θ_1 的一次项有关。如从式 (40) 可以看出, 当在纯剪切应力状态时 $\sqrt{M}\theta_1 = 0$, $\tau_{\max} = [\sigma]/\sqrt{3} = [\tau]$; 当在压缩应力状态时 $\sqrt{M}\theta_1 = -\sigma_{\max}$, 则 $\tau_{\max} = \sqrt{[\sigma]^2 - (-\sigma_{\max}[\sigma])} / \sqrt{3} = \sqrt{n+1}[\sigma]/\sqrt{3}$ 。连同它前面的负号代入, 使最大剪应力呈正值增长, 其增值大小由斜面上的最大剪应力公式 (40) 而定。当计算应力中的最大剪应力超过限度时, 材料就因被剪切而进入危险状态。

⑤在除上述四种情况以外的其它任意复杂应力状态下, 都可以从式 (34) 中计算出计算应力与许用应力的数值来。在图 2 中可以看出, 当计算应力大于许用应力值时, 则表明坐标点不在强度极限曲面上了, 说明材料已经进入了危险状态。

从上述五方面都证明本文所讨论的强度极限曲面方程 (34) 是正确的。为了计算方便, 将式 (34) 展开整理, 简化后得

$$\sigma_r^2 = BN\theta_2^2 + (2A+B)\sqrt{M}\theta_1[\sigma] - A[\sigma]^2 \leq [\sigma]^2 \quad (41)$$

如果把 $A = u_v/u, B = u_\phi/u, N = 1, \sqrt{M} = \sigma_{\max}/\theta_1$ 代入上式, 则

$$\sigma_r^2 = \frac{\frac{2(1+\mu)}{3}\theta_2^2\{\theta_2^2 + \sigma_{\max}[\sigma]\} + \frac{1-2\mu}{3}\theta_1^2\{2\sigma_{\max}[\sigma] - [\sigma]^2\}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq [\sigma]^2 \quad (42)$$

式中 $\theta_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \neq 0; \theta_2^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$

σ_{\max} 为绝对值最大的主应力, 但必须连同正、负号一起代入公式。

为了计算方便, 把式 (42) 开方, 即得

$$\sigma_r \leq [\sigma] \quad (43)$$

现在再根据式 (34) 确定强度极限曲面的各个顶点坐标。

①当在三向等拉伸应力状态时, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = [\sigma]$, 则 $\theta_2^2 = 0, B = u_\phi/u = 0, A = u_v/u = 1$, 代入式 (34),

$$\sigma_r^2 = AM\theta_1^2 \leq A([\sigma]^2 + (\sqrt{M}\theta_1 - [\sigma])^2) \quad (44)$$

即 $\sigma_r = \sigma_{\max} \leq [\sigma]$ 。在图 2 中用 OA 表示三向等拉伸的许用应力值, A 点表示三向等拉伸状态下许用应力值的顶点, 也即是该曲面的顶点, 当有任意一向最大主应力超过许用应力值时, 则计算应力就大于许用应力, 说明计算应力坐标点就不在强度极限曲面上了。材料就进入了危险状态。

②在三向等值压缩状态时, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_{\max}$, 则 $\theta_2^2 = 0, B = u_\phi/u = 0, A = u_v/u = 1$, 将其代入式 (34),

$$\sigma_r^2 = AM\theta_1^2 \leq A([\sigma]^2 + (\sqrt{M}\theta_1 - [\sigma])^2) \quad (45)$$

经计算 $\sigma_r = -\sigma_{\max} \leq [\sigma]$, 所以无论最大主应力超过许用应力值多少倍, 计算应力都为负值, 永远小于许用应力。由于在三向等值压缩时不存在剪应力, 所以在图 2 中以负方向的 σ 轴上的点表示, 并且可以向负方向无限延伸。

③当在纯剪切应力状态时, $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \sigma_2 = 0$, 则 $\theta_1 = 0, A = u_v/u = 0, B = u_\phi/u = 1, N = 1$, 将其代入式 (34), 得

$$\sigma_r^2 = BN\theta_2^2 \leq BN[\sigma]^2 \quad (46)$$

经计算 $\sigma_r^2 = \theta_2^2 = 3\tau^2 \leq [\sigma]^2 = 3[\tau]^2$, 即 $\tau_r = \tau_{\max} \leq [\tau]$, 在图 2 中以 OB 表示剪切应力值的长度, B 点则表示在纯剪切应力状态下的许用应力值的顶点。但随着三向压应力状态下的流体静力应力场的应力值增大, 许用剪切应力值也随之增大。从 O 点到曲面上任意一点的矢径, 在 σ 轴上的投影就表示正应力的分量大小; 在 τ 轴上的投影就表示剪切应力的分量大小。

④当在三向压应力的一般任意应力状态下时, $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 < 0$, 在斜面上的最大剪应力则按式 (40) 计算, 即按 $\sqrt{M}\theta_1 = -\sigma_{\max}$ 增大。而 $\tau_{\max} = \sqrt{n+1}[\sigma]/\sqrt{3}$ 也随之增大。证明了流体静力应力场只与 θ_1 的一次项有关, 也证明了《塑性理论简明教程》中所提出的流体静力应力状态不能使材料进入屈服状态, 而只满足应力互换原则。

由于上述曲面上的各个顶点坐标已经确定, 所以在任意复杂应力状态下都可以由计算应力的坐标值确定一个曲面, 而只要这些坐标点在强度极限曲面之上, 就可判断材料不会被破坏, 是安全的。就是说计算应力值所确定的坐标点只要在强度极限曲面的包络线范围之内, 材料就不会进入危险状态。当计算应力值所确定的坐标点不在强度极限曲面之上时, 就表明材料已经进入了危险状态。

参 考 文 献

- 1 M. M. 费洛宁柯-鲍罗第契著, 奚绍中译. 力学强度理论. 人民教育出版社 (1963年 8月): 53
- 2 上海交通大学工程力学教研室编. 工程力学. 人民教育出版社 (1976)
- 3 JI. M. 卡恰诺夫著, 周承倜译. 塑性理论基础. 高等教育出版社 (1978)
- 4 R. 希尔著, 王仁等译. 塑性数学理论. 科学出版社 (1978)
- 5 徐秉业, 陈森灿编. 塑性理论简明教程. 清华大学出版社 (1981)
- 6 杨桂通编. 弹塑性力学. 人民教育出版社 (1982)
- 7 J. C. 耶格, N. G. W. 库克著. 岩石力学基础. 科学出版社 (1983)
- 8 西北工业大学材料力学教研室编. 材料力学. 人民教育出版社 (1960年 8月): 42
- 9 同上: 116
- 10 天津大学材料力学教研室编, 苏翼林主编. 材料力学. 高等教育出版社 (1985年 6月)
- 11 蒋智翔编著. 材料力学. 清华大学出版社 (1985年 9月)
- 12 W. A. 纳什著, 杨春生译. 材料力学的理论与问题. 国防工业出版社 (1985年 9月)

THEORY OF MECHANICAL STRENGTH OF MATERIALS UNDER THREE-DIMENSIONAL STRESS

Hu Qing-shan
(Beipiao Coal Mine College)

Abstract Based on the classical strength theory and strength limit surface analysis, a strength theory is proposed. Through the choice of strength conditions and other parameters, a calculating formula of the strength theory, which is shown to be in good agreement with experiment results, is obtained.

Keywords *strength theory; strength limit surface; three-dimensional stress state*

(上接第287页) 较快, 陈槐卿、钟贵辉、李良、薛振南研究了红细胞压积对血液粘弹性的影响, 周玉萍研究了吸烟对血液流变性质的影响, 邓林红、吴云鹏等研究了血液的片流流变学, 郭仲三研究了血浆团流的有限元计算, 张廷杰等观察了老年高血压流变学。

吴大诚研究了儿种细菌悬浮体的流变性质, 钱民全等研究了血液凝固过程中挤压流动的粘弹性模量, 丁祖荣研究了鸡蛋的粘弹性, 均是十分有意义的研究内容。

人工心瓣研究是生物力学研究的一个重要方向。钟生平、乐以伦提出了论文“一种新的生物瓣材料——牦牛心包的应力/应变力学模型”。

6. 流变测量学 许元泽、韩函、李铁军应用叶浆状测头代替圆柱测头测量了复杂物质的屈服应力, 许元泽、章其忠、蒋淑惠研究了孔隙粘度计, 周曲园、范西俊、吴嘉等应用聚合物流体挤出胀大测量法向应力差。王昌永、李德曾、班九宪、万守华研制了LBM-20毛细管流变仪。这些研究工作发展了我国的流变测量学。

四川省副省长、成都流变学研究所所长、著名生物力学专家康振黄教授在本届会议开幕式上讲话中指出: “流变学是对经济建设有十分广泛而密切联系的一门科学, 无论是大型重点建设项目或是量大面广的技术改造项目, 无论是高技术新技术或是基础研究, 都离不开不断开展新的物性研究, 都离不开不断革新创造新的工艺, 都离不开开发自然环境、资源和能源。在非生命现象领域和生命现象领域都有大量这样的任务。贯穿在所有这些研究中的重要学科之一, 我认为就是流变学。”他又指出: “把许多有关传统学科领域的问题交叉融通起来, 把许多相关学科的研究工作者引向一起, 相互学习, 大力协作的重要学科之一, 我认为也是流变学。另一方面, 到现在还有不少研究工作者和业务部门, 由于对它还不熟悉, 因而在研究和应用中还大有潜力可挖的重要学科之一, 也是流变学。”

流变学, 作为一门新兴的边缘学科, 正以其巨大的生命力向前发展。在这一新的领域, 还有许多规律等待我们去发现, 还有许多奥秘等待我们去探索,