第18卷 第1期　力 学 进 展　Vol. 18 No. 1
1988年2月25日　ADVANCES IN MECHANICS　Feb. 25, 1988

非线性粘弹理论中的单积分型本构关系

杨 挺 青
（华中工学院）

提要 本文综述了非线性粘弹理论中的单积分本构表达，评述了多种有代表性的单积分型非线性粘弹理论，对几种本构方程加以分析比较，以揭示它们的内涵，明了其非线性表述原理.

关键词 非线性粘弹性；本构方程；单积分本构关系

1. 引 言

随着高聚物、橡胶、生物和地学材料研究的迅速发展，金属材料在高温条件下（喷气发动机、涡轮透平、航天装置、核动力设备等）的广泛使用，连续体力学理论与应用研究的不断深入，计算技术与试验手段的长足进步，非线性粘弹理论研究日益变得重要和迫切. 有关这方面的研究，已相继有了一些专著[1,2]，在许多有关论著中亦有专门论述[3-7].

粘弹非线性本构理论问题，Oldroyd[8]发展了非线性积分记忆理论，论述了本构方程应满足标架无关原理，Truesdell[9]用公理化体系建立物质的数学模型，概括和表述了一般简单材料的非线性本构关系. Green和Rivlin[10]在此基础上综述非线性记忆材料应力松弛的数学结构，导出了描述非线性粘弹行为的多重积分表达式，形成Green-Rivlin理论. 随后，Pipkin[11]，Lockett[12]，Findley[13]等许多学者具体表述了若干非线性粘弹本构关系. 要特别提出的是，Coleman和Noll[14]的有限线粘弹理论在积分型本构关系的关展中起着重要的作用. 有关粘弹非线性本构理论研究概况及某些动向（本构方程的简化、试验研究的深入、力学性态复合、学科间的渗透与结合等），笔者曾作简要的综述[15]，在此不予重述.

粘弹非线性本构关系的多重积分表示，因材料函数依赖于多个与时间有关的变量，只取三次项时的应力应变时间关系，已显得复杂，不易由试验决定核函数. 即使作一些简化，在解决边值问题时仍引起冗烦的运算，难于乃至不可能求得问题的解答. 因此，考虑形式简单、便于试验与较易求得材料函数、利于解决边值问题是必要的. 在非线性粘弹理论研究中，除幂律关系[2]和新虎克定律[5]外，广泛发展与应用单积分型本构关系来描述材料行为.

本文旨在表述主要的单积分本构关系，说明它们的内涵，对若干有代表性的单积分本构

方程加以分析比较，从而明了其非线性表达的原理，可看出某些单积分理论有相似之处，其中的基本项都相同，一些本构式都可看作橡皮非线性理论的推广。进行这些分析讨论，对于应用单积分本构理论，提出适合某些具体条件的本构关系，指导试验研究和进行计算分析，都是很有意义的。

2. 本构理论中的形变描述

为了讨论材料的非线性问题，往往不能采用小变形意义下的表示方法刻画物体的构形与形变，而需作一般的几何描述。

设自然状态（零应力零应变起始条件）物体构形为 $\mathbf{X}\equiv\mathbf{X}(X_1, X_2, X_3)$，$t$ 时刻的参考构形为 $\mathbf{x}\equiv\mathbf{x}(x_1,x_2,x_3)$，$x_i=x_i(\mathbf{X},t)$，$i=1,2,3$。为简单起见，取 X_i 和 x_i 为同轴坐标系，则

$$d\mathbf{x}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}d\mathbf{X}=\mathbf{F}d\mathbf{X} \tag{1}$$

其中$\mathbf{F}=|F_{i,J}|$称为变形梯度张量，它的分量 $F_{i,J}\equiv\dfrac{\partial x_i}{\partial X_J}\equiv x_{i,J}$。

右 Cauchy-Green 变形张量 $\mathbf{C}=|C_{KL}|$，$C_{KL}\equiv x_{i,K}x_{i,L}$，或

$$\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F} \tag{2}$$

左 Cauchy-Green 变形张量或称 Finger 变形张量为

$$\mathbf{B}=\mathbf{F}\mathbf{F}^T \tag{3}$$

变形梯度唯一地极分解：

$$\mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U}=\mathbf{V}\mathbf{R} \tag{4}$$

其中 $\mathbf{R}$ 表示刚体转动（正交张量），$\mathbf{U}$，$\mathbf{V}$ 是正定对称张量，$\mathbf{U}^2=\mathbf{C}$，$\mathbf{V}^2=\mathbf{B}$。

Lagrange 应变张量定义为

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}[\mathbf{C}-\mathbf{I}] \tag{5}$$

为了研究相对变形，设以物体 t 时刻的状态作参考构形，质量 X_K 在 t 时刻的位置为 $x_i(X_K,t)$，在某一 τ 时刻的位置为 $x_i(X_K,\tau)$，于是，相对于 t 时刻的变形梯度可表示为

$$F_{t\,ij}(\tau)=\frac{\partial x_i(\tau)}{\partial x_j}=F_{i,K}(\tau)\cdot F^{-1}_{j,K}(t)$$

或

$$\mathbf{F}(\tau)=\mathbf{F}_t(\tau)\mathbf{F}(t) \tag{6}$$

其中 $\mathbf{F}(t)=\partial\mathbf{x}(\mathbf{X},t)/\partial\mathbf{X}$ 即（1）中的变形梯度。

按照定义，可表示

$$\mathbf{C}_t(\tau)=\mathbf{F}_t^T(\tau)\mathbf{F}_t(\tau) \tag{7}$$

$$\mathbf{B}_t(\tau)=\mathbf{F}_t(\tau)\mathbf{F}_t^T(\tau) \tag{8}$$

对于不可压缩的各向同性材料，简单拉伸可表示为

$$x_1=\lambda X_1;\quad x_2=\lambda^{-1/2}X_2;\quad x_3=\lambda^{-1/2}X_3 \tag{9}$$

式中 $\lambda=\lambda(t)\equiv dx_1/dX_1$ 称为伸长比。常用工程应变为 ε，则 $\lambda=1+\varepsilon$。可依（1）—（8）计算得简单拉伸式（9）的有关量：

$$\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\end{vmatrix},\quad \mathbf{C}=\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\lambda^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda}\end{vmatrix} \tag{10}$$

$$2\mathbf{E}=\begin{vmatrix}\lambda^2-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda}-1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda}-1\end{vmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbf{F}_t(\tau)=\begin{vmatrix}\frac{\lambda(\tau)}{\lambda} & 0 & 0\\ 0 & \left[\frac{\lambda}{\lambda(\tau)}\right]^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & 0 & \left[\frac{\lambda}{\lambda(\tau)}\right]^{\frac{1}{2}}\end{vmatrix} \tag{12}$$

$$\mathbf{C}_t(\tau)=\begin{vmatrix}\frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda(\tau)} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda(\tau)}\end{vmatrix} \tag{13}$$

可以求得 $\mathbf{BC}_t$ 的迹
$$\operatorname{tr}(\mathbf{BC}_t)=\lambda^2(\tau)+\frac{2}{\lambda(\tau)} \tag{14}$$

3．单积分型本构表达

在名目繁多的单积分表示中，这里选取如下几种有代表性的理论，加以简略的介绍。

3.1 BKZ 理论 Bernstein, Kearsley 和 Zapas[16] 遵循 Green-Rivlin 理论[10]和 Coleman-Noll 方法[14]，研究了有限应变的应力松弛问题，导出不可压缩的固体和流体的非线性粘弹本构方程，其中固体的松弛型本构方程表示为

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(t)=-p\delta_{ij}+x_{i,K}x_{j,L}\Big[&m\delta_{KL}+k\delta_{KL}\operatorname{tr}\mathbf{E}(t)+2\mu E_{KL}(t)\\ &-\delta_{KL}\int_{-\infty}^{t}a(t-\zeta)\operatorname{tr}\mathbf{E}(\zeta)d\zeta-2\int_{-\infty}^{t}b(t-\zeta)E_{KL}(\zeta)d\zeta\Big]\end{aligned} \tag{15}$$

式中 m，k，μ 为材料常数，$a(t)$ 和 $b(t)$ 为材料函数，p 表示静水压力，σ_{ij} 是 Cauchy 应力。

将 (10)，(11) 诸式代入 (15)，可得简单拉伸的 σ_{11}，σ_{22} 和 σ_{33} 的表达式，利用 $\sigma_{22}=\sigma_{33}=0$ 求出 p，代入 σ_{11} 的表达式，最后得

$$\sigma_{11}=\left(\lambda^2-\frac{1}{\lambda}\right)\left\{m+\frac{k}{2}\left(\lambda^2+\frac{2}{\lambda}-3\right)+\mu\left(\lambda^2-1+\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$
$$-\left(\lambda^2-\frac{1}{\lambda}\right)\int_{-\infty}^{t}\frac{a(t-\zeta)}{2}\left[\lambda^2(\zeta)+\frac{2}{\lambda(\zeta)}-3\right]d\zeta$$
$$-\lambda^2\int_{-\infty}^{t}b(t-\zeta)[\lambda^2(\zeta)-1]d\zeta$$
$$+\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{t}b(t-\zeta)\left[\frac{1}{\lambda(\zeta)}-1\right]d\zeta \tag{15a}$$

BKZ 理论未给出蠕变型本构式。然而，它是单积分本构关系的重要代表，颇为人们赞赏。

3.2 有限线粘弹理论 Lianis 等[17]将 Coleman-Noll 有限线粘弹性一般理论[14]经过若干简化并进行了许多试验研究，得到不可压缩各向同性材料的松弛型本构方程

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=-p\mathbf{I}+[a+b(I_1-3)+cI_1]\mathbf{B}-c\mathbf{B}^2$$
$$+2\int_{-\infty}^{t}\phi_0(t-\zeta)\dot{\mathbf{C}}_t(\zeta)d\zeta$$
$$+\int_{-\infty}^{t}\phi_1(t-\zeta)[\mathbf{B}\dot{\mathbf{C}}_t(\zeta)+\dot{\mathbf{C}}_t(\zeta)\mathbf{B}]d\zeta$$
$$+\int_{-\infty}^{t}\phi_2(t-\zeta)[\mathbf{B}^2\dot{\mathbf{C}}_t(\zeta)+\dot{\mathbf{C}}_t(\zeta)\mathbf{B}^2]d\zeta$$
$$+\mathbf{B}\int_{-\infty}^{t}\phi_3(t-\zeta)\dot{I}_1(\zeta)d\zeta \tag{16}$$

其中 a，b，c 为材料常数，$\phi_i(i=0,1,2,3)$ 是材料函数，$I_1(\zeta)=\mathrm{tr}[\mathbf{B}\mathbf{C}_t(\zeta)]$. Lianis 的改进理论[18]包括四个材料常数和三个材料函数，同样没有给出蠕变型本构方程.

对于（9）所示的简单拉伸情形，同样可求得应力公式[19]

$$\sigma_{11}(t)=\left(\lambda^2-\frac{1}{\lambda}\right)\left[a+b\left(\lambda^2+\frac{2}{\lambda}-3\right)+\frac{c}{\lambda}\right]$$
$$+2\int_{-\infty}^{t}\phi_0(t-\zeta)\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{\lambda^2(\zeta)}{\lambda^2}-\frac{\lambda}{\lambda(\zeta)}\right]d\zeta$$
$$+2\int_{-\infty}^{t}\phi_1(t-\zeta)\frac{d}{d\zeta}\left[\lambda^2(\zeta)-\frac{1}{\lambda(\zeta)}\right]d\zeta$$
$$+2\int_{-\infty}^{t}\phi_2(t-\zeta)\frac{d}{d\zeta}\left[\lambda^2\lambda^2(\zeta)-\frac{1}{\lambda\lambda(\zeta)}\right]d\zeta$$
$$+\left(\lambda^2-\frac{1}{\lambda}\right)\int_{-\infty}^{t}\phi_3(t-\zeta)\frac{d}{d\zeta}\left[\lambda^2(\zeta)+\frac{2}{\lambda(\zeta)}\right]d\zeta \tag{16a}$$

McGuirt 和 Lianis[20]还进行过非等温情形的本构讨论与试验研究。

3.3 *修正叠加法* 这一方法是由 Leaderman[21,22]最先提出的。他在广泛研究纺织纤维的蠕变和回复中，发现非线性行为可在小应变时发生，提出推广线粘弹性叠加原理来表示非线性粘弹本构关系。Findley 等[23]把这种方法称为改进的叠加原理。后来，Pipkin 和 Rogers[24]将它理论化，推广到比较一般但也较复杂的情形。因此，修正叠加法的形式很

多，可见[2]中的介绍．对于核函数作积式近似时，扭转剪应力产生的剪应变，可表示为

$$\varepsilon_{12}(t)=\int_0^t[R_1(t-\zeta)+3R_2(t-\zeta)\tau^2(\zeta)]\dot{\tau}(\zeta)d\zeta \tag{17}$$

其中 $R_1(t)$ 和 $R_2(t)$ 为单步应力作用的蠕变试验所求得的核函数．

3.4 Schapery 本构关系 Schapery[25-27] 根据不可逆过程的热力学，采用广义坐标(含隐变量与显变量）和假定自由能和熵生成的某些简单形式，导出含折减时间的本构关系，有松弛型和蠕变型的表达式．在等温条件下，单轴应力作用的蠕变方程可表述为

$$\varepsilon(t)=g_0\phi_0\sigma(t)+g_1\int_0^t\phi(\gamma-\gamma')\frac{\partial}{\partial\zeta}[g_2\sigma(\zeta)]d\zeta \tag{18}$$

其中

$$\gamma=\gamma(t)=\int_0^t\frac{d\zeta}{a_\sigma\sigma(\zeta)},\ \gamma'=\gamma'(\zeta)$$

称为折算时间或折减时间，$g_i(i=0,1,2)$和 a_σ 是应力的函数，因而也是时间的函数，$\phi(t)$ 为材料的蠕变函数，ϕ_0 为常量．显然，当 $g_i=a_\sigma=1$ 时，(18) 简化为线粘弹性本构方程．对于松弛型本构方程，形式上与（18）类似，这时的折减时间则与应变过程有关．

值得注意的是，Schapery本构方程中采用的折减时间是固体力学中广义时间引入的一种方式．Valanis[28] 建立内时理论中提出的内蕴时间的概念，是广义时间在本构关系中引入的重要发展．

3.5 物理线性近似 核函数近似，可使一些简单受力的复积分本构方程成为单积分型．物理线性近似是其中一种特殊形式，它是由 Coleman 和 Noll[14] 提出，后经 Stafford 讨论[29]，将衰退记忆原理应用到有限线粘弹理论的一种本构关系．它假定材料在 t 时刻的应力（应变）与应变（应力）起因过程呈线性关系，与起因的 t 时刻值成非线性关系．例如，简单拉伸应力所产生的应变表示为

$$\varepsilon_{11}(t)=\int_0^t[f_1(t-\zeta)+\sigma(t)f_2(t-\zeta)+\sigma^2(t)f_3(t-\zeta)]\dot{\sigma}(\zeta)d\zeta \tag{19}$$

其中 f_i 表示材料函数，方括号中的函数与应力现时值呈非线性关系，而按修正叠加法如（17）中所示，则是应力过程的非线性函数．

3.6 Christensen 本构方程 这是一种适用于不可压缩的橡胶类材料的非线性粘弹理论．它实际上是橡皮非线性理论的推广．虽然有起因为应力的条件，但能首先表示出应力应变关系[30]

$$\sigma_{ij}(t)=-p\delta_{ij}+x_{i,K}x_{j,L}\left[g_0\delta_{KL}+\int_0^t g_1(t-\zeta)\dot{E}_{KL}(\zeta)d\zeta\right. \tag{20}$$

其中 $g_1(t)$ 为材料函数，满足 $g_1(\infty)=0$，g_0 是材料常数，含有 g_0 的展式相应于橡皮非线性理论．

对于简单拉伸，将（10），（11）代入（20）并利用 $\sigma_{22}=\sigma_{33}=0$ 的条件，可得出

$$\sigma_{11}(t)=g_0\left(\lambda^2-\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{1}{2\lambda}\int_0^t g_1(t-\zeta)\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{1}{\lambda(\zeta)}\right]d\zeta$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t g_1(t-\zeta)\frac{d}{d\zeta}\lambda^2(\zeta)d\zeta \tag{20a}$$

Christensen 导出了近似蠕变函数 $J(t)$，包括线性和非线性效应两部分．由蠕变试验可求出非线性函数$J(t)$．

对于稳态情况，则可不顾及起因的限制，式（20）能用于一般受力情形．笔者在讨论周期应变下的应力响应与能耗时曾用这种本构式[31]，文中说明[30]中谐波剪应变，准静态作用的有关算式与结论有误，也表明采用这种本构关系的计算易与线粘弹情形[32]相比较．

3.7 广义线积分（CBT理论） Chang 等[33,34]把材料性能与形变的参量联系起来，将 Seth 应变形式加以推广，引进广义应变函数，从而简化本构表达．他们研究了不可压缩的软聚合物，导出能用于相当大形变的应力应变关系

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p\mathbf{I} + \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{t} G(t-\zeta)\left[\mathbf{B}^{n/2}(t)\frac{d}{d\zeta}\mathbf{C}^{n/2}(\zeta) + \frac{d}{d\zeta}\mathbf{C}^{n/2}(\zeta)\cdot\mathbf{B}^{n/2}(t)\right]d\zeta \tag{21}$$

式中 n 为应变参量和材料参数，$G(t)$ 是材料函数．

对于简单拉伸（9），可得

$$\sigma_{11}(t) = \frac{2}{n}\int_{-\infty}^{t} G(t-\zeta)\frac{d}{d\zeta}\left\{\lambda^n(\zeta) - \left[\frac{1}{\lambda(\zeta)}\right]^{n/2}\right\}d\zeta \tag{21a}$$

单积分本构理论尚有其他引进广义应变度量的表达[35]，在此不赘述．

4. 单积分本构方程比较

单积分本构关系往往是对某些材料特定条件而言的，有一些是半经验性的，有的只有一维表达形式，因此难于一般地肯定哪一种本构方程最好．Findley 曾将物理线性近似、修正叠加法、核函数积式近似[36,37]、和式近似[38,39]等类本构方程与复积分表示的实验研究结果[40]相比较．Smart 等[41]曾用聚丙烯和聚氯乙烯的试验结果就修正叠加原理，Schapery和 BKZ 理论进行比较分析．

这里将适用于三维有限变形的几种单积分本构方程（BKZ，Lianis，Christensen，CBT 理论）进行分析讨论．为简明起见，采用突加恒应变简单拉伸

$$\lambda(t) = 1 + (\lambda_0 - 1)H(t) \tag{22}$$

其中的单位阶跃函数使满足

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1 & t \leqslant 0 \\ \lambda_0 & t > 0 \end{cases}$$

将（22）代入 BKZ 理论中（15a），经整理得

$$\sigma_{11}(t) = \left(\lambda_0^2 - \frac{1}{\lambda_0}\right)\left[\alpha(t) + \frac{1}{\lambda_0}\beta(t) + (\lambda_0^2 - 1)\gamma(t)\right] \tag{23}$$

式中

$$\alpha(t) = m - k + \int_0^t a(\zeta)d\zeta \equiv m - A(t)$$

$$\beta(t) = k + u - \int_0^t a(\zeta)d\zeta - \int_0^t b(\zeta)d\zeta \equiv A(t) + B(t)$$

$$\gamma(t) = \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\int_0^t a(\zeta)d\zeta + u - \int_0^t b(\zeta)d\zeta \equiv \frac{1}{2}A(t) + B(t)$$

这三个时间函数可通过三次不同的λ_0值作用，由三个式（23）形式的代数方程联立求得，其试验研究可参见文献[42]．

对于稳态情形，即 $t\to\infty$，应力不再随时间而变，$\lim_{t\to\infty} A(t)=A_0$，$\lim_{t\to\infty} B(t)=B_0$。这时（23）变为

$$\sigma_{11}=\left(\lambda_0^2-\frac{1}{\lambda_0}\right)\left[P+\frac{1}{\lambda_0}Q+(\lambda_0^2-1)R\right] \tag{23a}$$

式中 $P=m-A_0$，$Q=A_0+B_0$，$R=(1/2)A_0+B_0$。若 $R=0$ 则(23a)表示 Mooney 非线性材料的本构方程[43]。

将（22）代入 Lianis 理论式（16a），整理得

$$\sigma_{11}(t)=\left(\lambda_0^2-\frac{1}{\lambda_0}\right)\left[\alpha_1(t)+\frac{1}{\lambda_0}\beta_1(t)+(\lambda_0^2-1)\gamma_1(t)\right] \tag{24}$$

其中

$$\alpha_1(t)=a-2b+2\phi_1(t)-2\phi_3(t)$$
$$\beta_1(t)=2b+c+2\phi_0(t)+2\phi_2(t)+2\phi_3(t)$$
$$\gamma_1(t)=b+2\phi_2(t)+\phi_3(t)$$

式（24）与（23）相似。$\alpha_1(t)$，$\beta_1(t)$和$\gamma_1(t)$可由三种不同λ_0值的松弛试验来决定。其中a，b，c可利用稳态平衡条件来求得，这时$\phi_i(\infty)=0$，α_1，β_1，γ_1为$\alpha_1(\infty)$，$\beta_1(\infty)$，$\gamma_1(\infty)$。但是由$\alpha_1(t)$，$\beta_1(t)$，$\gamma_1(t)$三个方程不能决定四个松弛函数，因此还必须采用两步松弛试验。

将（22）代入 Christensen 方程（20a），可得

$$\sigma_{11}(t)=\left(\lambda_0^2-\frac{1}{\lambda_0}\right)\left[g_0+\frac{1}{\lambda_0}\frac{g_1(t)}{2}+(\lambda_0^2-1)\frac{g_1(t)}{2}\right] \tag{25}$$

它与式（23），（24）的形式相同，比较简单。

将广义线积分式（21a）分部积分后，使用（22）得到

$$\sigma_{11}(t)=\frac{2}{n}\left(\lambda_0^n-\frac{1}{\lambda_0^{n/2}}\right)G(t) \tag{26}$$

n较难确定，决定于材料，且与温度有关，一般不为整数。当$n=2$时，式（26）即为橡皮非线性弹性的推广形式

$$\sigma_{11}(t)=\left(\lambda_0^2-\frac{1}{\lambda_0}\right)E(t) \tag{27}$$

有时称之为新虎克定律。许多学者研究若干聚合物大变形拉伸的应力松弛现象以后，得到这种形式的本构方程[5,44]。他们表示出材料函数一般为

$$E_n(t,\lambda)=\frac{3\sigma(t)}{(\lambda^2-\lambda^{-1})} \tag{28}$$

它称为新虎克杨氏模量（Neo-Hookean Young's modulus），式中λ为伸长比，$\sigma(t)$为实际拉应力。

利用单积分型本构方程进行非线性粘弹的数值分析，本文不予讨论，可参阅文献[45]。

参 考 文 献

1 Lockett F J. Nonlinear Viscoelastic Solids. Academic Press, London (1972)

2 Findley W N, Lai J S, Onaran K. Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials. North-Holland Pub. Co. (1976)

3 Christensen R M. Theory of Viscoelasticity. Academic Press, New York (1982)

4 Rabotnov Y N. Elements of Hereditary Solid Mechanics. MIR Publishers, Moscow (1980)

5 Ferry J D. Viscoelastic Properties of Polymers. 3rd Ed., John Wiley, New York (1980)

6 I. M. 沃德著. 固体高聚物的力学性能. 科学出版社 (1980)

7 Eringen A C. Continuum Physics, Vol. Ⅱ. Academic (1975)

8 Oldroyd J G. On the Formulation of Rheological Equations of State. *Proc. Royal. Soc.*, A **200** (1950) : 523—541

9 Truesdell C. The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics. *J. Rat. Mech. and Analysis*, **1** (1952) : 125—300; and **2** (1953) : 593—616

10 Green A E, Rivlin R S. The Mechanics of Nonlinear Materials with Memory, Part I. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **1** (1957) : 1—21

11 Pipkin A C. Small Finite Deformations of Viscoelastic Solids. *Rev. Mod. Phys.*, **36** (1964) : 1034—1041

12 Lockett F J, Stafford R O. On Special Constitutive Relations in Nonlinear Viscoelasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, **7** (1969) : 917—930

13 Findley W N, Onaran K. Incompressible and Linearly Compressible Viscoelastic Creep and Relaxation. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **41**-E (1974) : 243—248

14 Coleman B D, Noll W. Foundations of Linear Viscoelasticity. *Rev. Mod. Phys.*, **33** (1961) : 239—249; Erratum, ibid, **36** (1964) : 1103

15 杨挺青. 非线性粘弹本构理论的近期进展. 国外科技动态, 3 (1983) : 21—25

16 Bernstein B, Kearsley E A, Zapas L J. A Study of Stress Relaxation with Finite Strain. *Trans. Soc. Rheol.*, **7** (1963) : 391—409

17 Lianis G. Constitutive Equations of Viscoelastic Solids under Finite Deformation. Purdue Univ. Report. A & ES 63—11 (1963)

18 McGuirt C W, Lianis, G. Constitutive Equations for Viscoelastic Solids under Finite Uniaxial & Biaxial Deformations. *Trans. Soc. Rheol.*, **14** (1970) : 117—134

19 杨挺青. 粘弹性力学 (讲义). 华中工学院, (1983)

20 McGuirt C W, Lianis G. Experimental Investigation of Non-Linear, Non-Isothermal Viscoelasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, **7** (1969) : 579—599

21 Leaderman H. Elastic and Creep Properties of Filamentous Materials and Other High Polymers. Textile Foundation, Washington, D. C. (1943)

22 Leaderman H. Large Longitudinal Retarded Elastic Deformation of Rubberlike Network Polymers. *Trans. Soc. Rheol.*, **6** (1962) : 361—382

23 Findley W N, Lai J S Y. A Modified Superposition Principle Applied to Creep of Nonlinear Viscoelastic Material under Abrupt Changes in State of Combined Stress. *Trans. Soc. Rheol.*, **11** (1967) : 361—380

24 Pipkin A C, Rogers T G. A Nonlinear Integral Representation for Viscoelastic Behavior. *J. Mech. Phys. Solids*, **16** (1968) : 59—72

25 Schapery R A. A Theory of Nonlinear Thermovisco-elasticity Based on Irreversible Thermodynamics. Proc. 5th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., ASME (1966) : 511—530

26 Schapery R A. On a Thermodynamic Constitutive Theory and its Application to Various Nonlinear Materials. Proc. IUTAM Symp., East Kilbride (1968) : 259—285

27 Schapery R A. On the Characterization of Nonlinear Viscoelastic Materials. *Polym. Eng. Sci.*, 9 (1969) : 295—310

28 Valanis K C. A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface. *Archives of Mech.*, **23**, 4 (1971) : Ⅰ. 517—533; Ⅱ. 535—551

29 Stafford R C. On Mathematical Forms for the Material Functions in Nonlinear Viscoelasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, **17** (1969) : 339—358

30 Christensen R M. A Nonlinear Theory of Viscoelasticity for Application to Elastomers. *J. Appl. Mech.*, **47** (1980) : 295—310

31 杨挺青. 非线性粘弹体在周期应变条件下的应力与能耗. 力学学报, 17, 6 (1985) : 507—513
32 Yang Ting-qing (杨挺青), Chen Yu (陈煜). Stress Response and Energy Dissipation in a Linear Viscoelastic Material under Periodic Triangular Strain Loading. *J. Polym. Sci., Polym. Phys. Ed.*, **20** (1982) : 1437—1442
33 Chang W V, Bloch R, Tschoegl N W. On the Theory of the Viscoelastic Behavior of Soft Polymers in Moderately Large Deformations. *Rheol. Acta.*, **15** (1976) : 367—378
34 Chang W V, Bloch R, Tschoegl N W. Time-dependent Response of Soft Polymers in Moderately Large Deformations. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **73**, 4 (1976) *Appl. Phys. Sci.*, 931—983
35 Phillips M. A Generalized Strain Measure in a Single-Integral Constitutive Equation. *Trans. Soc. Rheol.*, **20**, 2 (1976) : 185—194
36 Nakada O. Theory of Non-linear Response. *J. of the Phys. Soc. of Japan*, **15** (1960): 2280—2288
37 Nolte K G, Findley W N. A Linear Compressibility Assumption for the Multiple Integral Representation of Nonlinear Creep of Polyurethane. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **37**E (1970): 441—448
38 Gottenberg W G, Bird J O, Agrawall G L. An Experimental Study of a Nonlinear Viscoelastic Solid in Uniaxial Tension. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **36**E (1969) : 558—564
39 Cheung J B, Nonlinear Viscoelastic Stress Analysis of Blood Vessels, Ph. D. thesis, University Minnesota (1970)
40 Onaran K, Findley W N. Experimental Determination of Some Kernel Functions in the Multiple Integral Method for Non-linear Creep of Polyvinylchloride. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **38**E (1971) : 30—38
41 Smart J, Williams J G. A Comparison of Single-Integral Non-linear Viscoelasticity Theories. *J. Mech. Phys. Solids*, **20** (1972) : 313—324
42 Zapas L J, Craft T. Correlation of Large Longitudinal Deformations With Different Strain Histories. *J. of Research of the Nat. Bureau of Standards-A*, **69**A (1965) : 541—546
43 Treloar L R G. The Physics of Rubber Elasticity. 3rd Ed., Clarendon Press, Oxford (1975)
44 Taylor C R, Greco R, Kramer O, Ferry J D. Non-Linear Stress Relaxation of Polyisobutylene in Simple Extension. *Trans. Soc. Rheol.*, **20** (1976) : 141—152
45 Haddad Y M. Numerical Analysis in Nonlinear Viscoelasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, **18** (1980) : 325—331

SINGLE-INTEGRAL CONSTITUTIVE RELATIONS FOR NONLINEAR VISCOELASTICITY

Yang Ting-qing
(Huazhong University of Science and Technology)

Abstract The single-integral representations of constitutive relations for nonlinear viscoelasticity are summarized in this paper. A number of single-integral nonlinear viscoelastic theories are reviewed. In order to understand better the description and the implication of these nonlinear relations, a comparison of several constitutive equations for various theories is presented.

Keywords *nonlinear viscoelasticity; constitutive equations; single-integral constitutive relations*