第17卷 第3期　　力 学 进 展　　Vol. 17 No. 3
1987年8月25日　　ADVANCES IN MECHANICS　　Aug. 25, 1987

关于具有剪应力的普通湍流理论发展

谢 象 春
（中国科学院力学研究所）

提要 本文叙述了周培源1945年发表具有剪应力的普通湍流理论以后，各种湍流模式理论的主要发展概况.

关键词 湍能；湍流耗散；湍流长度尺度

在自然界如大气、海洋、天体以及许多工程技术如航空、航天、水利、化工、冶金与受控热核反应等部门中，普遍存在着湍流现象. 自从 Osborne Reynolds 的实验（1883）与理论（1895）研究开始，直至目前为止的一个世纪以来，流体力学工作者对湍流问题的研究进行了大量工作. 本世纪 20 年代至 30 年代，Prandtl 的混合长度理论（1925），Karman 的相似理论（1930）以及 Taylor 的涡量转移理论（1932），奠定了经典半经验湍流理论的基础. 其后，在 Taylor（1921，1935）提出的统计相关与各向同性湍流概念的基础上，著名的 Karman-Howarth 方程（1938）的建立，为均匀各向同性湍流研究提供了严格的依据. 遵循这一线索，出现了不少卓越的工作，例如 Колмогоров 的能谱 $-5/3$ 次方律（1941）等. 笔者最近也提出了一个与实验数据符合得很好的关于大气与海洋湍流浮力次区能谱 -3 次方律[1]. 另一方面，把统计相关概念比较完整地用于普通剪切湍流研究，则是周培源[1]（1945）的工作，它为以后湍流传递理论的发展奠定了基础. 此类传递理论的特点，是从物理上引进适宜的假设，从而得出 Reynolds 应力与湍流尺度等有关湍流量. 必须指出，50 年代末期出现的 Kraichnan 直接相互作用理论（1959），它能阐明湍流场的一些基本动力学性质，因此可以得到更多的湍流统计信息. 但是这种理论非常复杂，目前主要局限于均匀湍流的研究，而很难应用到一般的湍流剪切流动中去. 此外，近代计算机技术的蓬勃兴起，为湍流理论的数值计算开辟了广阔的前景. 目前，诸如小网格封闭模型以及直接数值模拟等方法，正在迅速向前发展. 以上所述理论工作，均与实验工作者在各个不同时期所发表的大量测量数据进行了对比. 就实验方面而言，随着实验技术的日益发展，例如热线风速仪的不断

1）Shieh SC（谢象春）. Large scale spectrum of homogeneous nonisotropic turbulence with constant transverse mean velocity gradient or scalar gradient. Proc. IUTAM Symp. on Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids, 1983, Kyoto, North-Holland (1984).

完善，激光Doppler流速计的出现，导致在实验数据方面积累了大量饶有兴趣的（包括最近发展起来的拟序结构）各种实验结果。遗憾的是，目前理论上还不能对所有实验中揭露出的现象作出令人满意的描述。因此，总的说来，摆在流体力学工作者面前的任务，是如何从物理上建立一个能洞察湍流基本机制的可靠理论。同时，为了深入探讨湍流现象的本质，必须进一步加强对湍流详细结构的实验研究。

本文旨在总结周培源的论文"关于速度相关与湍流脉动方程的解"[1]在1945年发表以后，国际流体力学界在其基础上发展的各种不同模式理论的主要进展。

Ⅰ. Rotta假设（1951）

Rotta[2]把[1]中式（1.6）的速度脉动与压力脉动梯度相关项表示成压力与速度脉动相关的梯度和压力-应变项的差值，而把压力和速度脉动相关与三元速度相关项以及粘性扩散等组成一个总的扩散项；于是Reynolds应力方程写作

$$\frac{D\overline{u_iu_k}}{Dt}=\underbrace{-\left[\overline{u_ku_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\overline{u_iu_j}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right]}_{\text{生成}}\underbrace{-2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}}_{\text{耗散}}+\underbrace{\overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)}}_{\text{压力-应变}}$$

$$\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u_iu_ku_j}-\nu\frac{\partial\overline{u_iu_k}}{\partial x_j}+\overline{\frac{p}{\rho}(\delta_{kj}u_i+\delta_{ij}u_k)}\right]}_{\text{扩散}}\tag{1.1}$$

此处 u_i 表示速度脉动分量，U_i 表示平均速度分量，p 表示压力脉动，ρ 表示常数密度，ν 表示运动粘度，x_j 表示笛卡儿坐标，t 表示时间，重复下标表示求和。根据[1]中压力脉动满足的Poisson方程得到

$$\overline{\frac{p}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathrm{Vol}}\left\{\underbrace{\overline{\left(\frac{\partial^2u_lu_m}{\partial x_l\partial x_m}\right)'\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}}_{\phi_{ik,1}}+\underbrace{2\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\right)'\overline{\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right)'\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}}_{\phi_{ik,2}}\right\}\frac{d\mathrm{Vol}}{r}\tag{1.2}$$

假设

$$\phi_{ik,1}+\phi_{ki,1}=-C\frac{\sqrt{q}}{L}\left(\overline{u_iu_k}-\frac{2}{3}\delta_{ik}q\right)\tag{1.3}$$

式中 L 是表征涡旋平均直径的湍流长度尺度，$q=(1/2)\overline{u_ju_j}$，C 是经验常数。并按[1]的方法把 $\partial U_l/\partial x_m$ 展开成Taylor级数，而把 $\phi_{ik,2}$ 表为

$$\phi_{ik,2}=\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\right)a^{mi}_{lk}+\left(\frac{\partial^2U_l}{\partial x_m\partial x_n}\right)_n b^{mi}_{lk}+\left(\frac{\partial^3U_l}{\partial x_m\partial x_n\partial x_j}\right)_{nj}c^{mi}_{lk}\tag{1.4}$$

式中

$$a^{mi}_{lk}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Vol}}\frac{\partial^2\overline{u'_mu_i}}{\partial\xi_l\partial\xi_k}\frac{d\mathrm{Vol}}{r};\quad {}_nb^{mi}_{lk}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Vol}}\frac{\partial^2\overline{u'_mu_i}}{\partial\xi_l\partial\xi_k}\xi_n\frac{d\mathrm{Vol}}{r}$$

$${}_{nj}c^{mi}_{lk}=-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathrm{Vol}}\frac{\partial^2\overline{u'_mu_i}}{\partial\xi_l\partial\xi_k}\xi_n\xi_j\frac{d\mathrm{Vol}}{r}$$

由连续性条件[1]与交换规律给出

$$a^{mi}_{li}=0,\ a^{mi}_{lm}=0,\ {}_nb^{mi}_{li}=0,\ {}_nb^{mi}_{lm}=0,\ {}_{nj}c^{mi}_{li}=0,\ {}_{nj}c^{mi}_{lm}=0\ 等\tag{1.5}$$

$$a_{lk}^{im} = a_{lk}^{mi}, \quad {}_{nj}c_{lk}^{im} = {}_{nj}c_{lk}^{mi}, \quad {}_{n}b_{lk}^{im} = -{}_{n}b_{lk}^{mi} \tag{1.6}$$

以及按照 Green 定理求得

$$a_{kk}^{mi} = 2\overline{u_m u_i} \tag{1.7}$$

由（1.5）—（1.7）可以估计 a，b，c 值。

对于耗散项，在参照 Prandtl 假设[3]

$$\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 = \kappa\frac{q^{3/2}}{L} \tag{1.8}$$

并且分析 Batchelor 和 Townsend[4]，Dryden[5]，Simmons 和 Salter[6] 以及Taylor[7] 等的实验基础上，引入下列插值公式：

$$\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}} = \nu\left(K\frac{\overline{u_i u_k}}{2L^2} + \delta_{ik}\kappa\frac{q^{3/2}}{3\nu L}\right) \tag{1.9}$$

此处 κ，K 是经验常数。

Rotta[2] 略去扩散项以及对比各向同性湍流的结果估计并假设有关 a，b，c 值，根据（1.3），（1.4）与（1.9）以平面槽道湍流问题为例进行了计算。给出

$$-\overline{u_1u_2}/\sqrt{\overline{u_1^2}}\sqrt{\overline{u_2^2}} \text{ 和 } \sqrt{\overline{u_2^2}}/\sqrt{\overline{u_1^2}}(=\sqrt{\overline{u_3^2}}/\sqrt{\overline{u_1^2}})$$

与 Reynolds 数 $\mathrm{Re}_L(=L^2/\nu\cdot dU_1/dx_2)$ 的显式关系。当 Re_L 较小时，相关系数

$$-\overline{u_1u_2}/\sqrt{\overline{u_1^2}}\sqrt{\overline{u_2^2}}$$

随 Re_L 的减小而增加，这与 Laufer[8] 的实验相符。

其次，Rotta[9] 积分流场中两点速度相关方程，推得下列湍流尺度 L 的方程：

$$\frac{D(qL)}{Dt} + \frac{3\pi}{8}\int_0^\infty F_{ij}(k)\frac{dk}{k}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{3\pi}{8}\int_0^\infty F_Q^j(k)\frac{dk}{k}\right) - \nu\nabla^2(qL)$$

$$+\frac{3\pi}{8}\int_0^\infty F_s(k)\frac{dk}{k} = 0 \tag{1.10}$$

此处 $F_{ij}(k)$，$F_Q^j(k)$，$F_s(k)$ 分别表示 Reynolds 剪应力，湍流扩散与湍流耗散的谱函数（其中 k 是波数）。根据 Prandtl[3] 的下列假设：

$$\overline{u_j\left(\frac{u_i^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right)} = -D\frac{dq}{dx_j} \tag{1.11}$$

此处 $D = k_q\sqrt{\overline{u_i^2}}L$（$k_q$ 为经验常数），可把（1.10）中的扩散项写成

$$\frac{3\pi}{8}\int_0^\infty F_Q^j(k)\frac{dk}{k} = -\zeta_Q D\frac{\partial q}{\partial x_j}L + C_Q Dq\frac{\partial L}{\partial x_j} \tag{1.12}$$

式中 ζ_Q，C_Q 是常数。

Rotta[9] 仍以平面槽道湍流流动为例，在方程（1.1）中考虑形式如（1.11）所示的扩散项以及利用（1.10），用级数展开求解一个常微分方程组，得出平均速度分布以及脉动速度 $\sqrt{\overline{u_1^2}}$，$\sqrt{\overline{u_2^2}}(=\sqrt{\overline{u_3^2}})$ 的分布。在流场的大部分区域内，理论与实验数据相符。

Ⅱ. Давыдов 的近似模型（1959，1961）

Давыдов[10-12] 认为能量的湍流耗散主要为其非各向同性程度不大的微尺度湍流所确

定，从而假设

$$2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}=\frac{2}{3}\delta_{ik}\epsilon \tag{2.1}$$

压力脉动与速度脉动相关 $\overline{(p/\rho)(u_i+u_k)}$ 表示由压力脉动所转移的能量流，目前尚无确凿的证据认为在不可压缩流体中此种能量转移具有很大的意义，于是把它略去．与此相反，压力脉动与速度脉动梯度的相关 $\overline{(p/\rho)(\partial u_i/\partial x_k+\partial u_k/\partial x_i)}$ 则起重要作用；这些项估计脉动流在压力脉动上的散逸，犹如脉动流动和局部压力脉动相“碰撞”而不改变脉动流动速度的绝对值一样．因此这些项类似于Boltzmann动力学方程中估计理想气体分子之间的碰撞项．如所周知，这些碰撞导致速度分布的第二类谐函数与其正常值偏差的减小，而这种减小与其本身偏差成比例．于是从类比出发，对湍流流体可以假设

$$\overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)}=-\frac{\beta_0\epsilon}{q}\left(\overline{u_iu_k}-\frac{2}{3}\delta_{ik}q\right) \tag{2.2}$$

其中 β_0 是实验常数．实际上（2.2）就是Rotta的假设（1.3）．实验表明，靠近壁面，脉动速度的非各向同性程度很大．为了估计此种壁面影响，从粗略分析湍流边界层的具体流动出发，Давыдов 对（2.2）引入了一个补充项即写成

$$\overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)}=-\frac{\beta_0\epsilon}{q}\left(\overline{u_iu_k}-\frac{2}{3}\delta_{ik}q\right)-B_{ik}+\frac{\delta_{ik}}{3}B_{ii} \tag{2.3}$$

此处

$$B_{ik}=N\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\left(\beta_0-1-3\beta_0^2N\frac{\overline{u_lu_m}}{2q^2}\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\right) \tag{2.4}$$

其中 N 为涡粘性系数，其值为

$$N=-\overline{u_iu_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\right)^{-2}$$

对于大 Reynolds 数情形，由 Navier-Stokes 方程得出（即[1]的（1.7）中略去粘性项）

$$\frac{D\overline{u_iu_ku_j}}{Dt}+\overline{u_iu_ku_l}\frac{\partial U_j}{\partial x_l}+\overline{u_ku_ju_l}\frac{\partial U_i}{\partial x_l}+\overline{u_ju_iu_l}\frac{\partial U_k}{\partial x_l}+\frac{\partial}{\partial x_l}\overline{u_iu_ku_ju_l}$$
$$-\overline{u_iu_k}\frac{\partial\overline{u_ju_l}}{\partial x_l}-\overline{u_ku_j}\frac{\partial\overline{u_iu_l}}{\partial x_l}-\overline{u_ju_i}\frac{\partial\overline{u_ku_l}}{\partial x_l}+\frac{1}{\rho}\left(\overline{u_iu_k\frac{\partial p}{\partial x_j}}\right.$$
$$\left.+\overline{u_ku_j\frac{\partial p}{\partial x_i}}+\overline{u_ju_i\frac{\partial p}{\partial x_k}}\right)=0 \tag{2.5}$$

认为在每一个给定点脉动速度分布与正态分布的偏差很小，则方程（2.5）中的四元速度相关可由二元速度相关表示：

$$\overline{u_iu_ku_ju_l}=\overline{u_iu_k}\,\overline{u_ju_l}+\overline{u_iu_j}\,\overline{u_ku_l}+\overline{u_ku_j}\,\overline{u_iu_l} \tag{2.6}$$

方程（2.5）中的 $\overline{u_iu_k\cdot\partial p/\partial x_j}/\rho$ 则与 $\overline{p/\rho\cdot\partial u_i/\partial x_k}$ 相类似而假设为

$$\frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i u_k \frac{\partial p}{\partial x_j}}+\overline{u_k u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}}+\overline{u_j u_i \frac{\partial p}{\partial x_k}}\right)=\frac{\beta_1 \epsilon}{q}\overline{u_i u_k u_j} \tag{2.7}$$

（β_1 为实验常数）最后得到三元速度相关的下列方程：

$$\frac{D\overline{u_i u_k u_j}}{Dt}+\overline{u_i u_k u_l}\frac{\partial U_j}{\partial x_l}+\overline{u_k u_j u_l}\frac{\partial U_i}{\partial x_l}+\overline{u_j u_i u_l}\frac{\partial U_k}{\partial x_l}+\overline{u_i u_l}\frac{\partial \overline{u_k u_j}}{\partial x_l}$$

$$+\overline{u_k u_l}\frac{\partial \overline{u_j u_i}}{\partial x_l}+\overline{u_j u_l}\frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_l}+\frac{\beta_1 \epsilon}{q}\overline{u_i u_k u_j}=0 \tag{2.8}$$

（2.1），（2.3）与（2.8）中的湍流耗散 ϵ，可由 Navier-Stokes 方程推得的下列 ϵ 方程：

$$\frac{D\epsilon}{Dt}+2\nu\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}+\overline{\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}}\right)+2\nu\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_l}\overline{u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_l}}+\frac{\partial C_j}{\partial x_j}$$

$$+2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}+\frac{2\nu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial p}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}+2\nu^2\overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l}\right)^2}=\nu\nabla^2\epsilon \tag{2.9}$$

求得．上式中的 C_j 表示耗散流，等于 $\nu\overline{u_j(\partial u_m/\partial x_l)^2}$．其相应的方程是

$$\frac{DC_i}{Dt}+2\nu\frac{\partial U_j}{\partial x_l}\left(\overline{u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_m}\frac{\partial u_l}{\partial x_m}}+\overline{u_i\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}}\right)+2\nu\frac{\partial^2 U_m}{\partial x_j \partial x_l}\overline{u_i u_j\frac{\partial u_m}{\partial x_l}}$$

$$+C_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+2\nu\overline{u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial^2 u_j u_m}{\partial x_l \partial x_m}}-2\nu u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial^2 \overline{u_j u_m}}{\partial x_l \partial x_m}+\nu\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j}\overline{\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\right)^2}$$

$$-\nu\overline{\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\right)^2}+\frac{2\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_l}u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}+\frac{\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right)^2}+2\nu^2\overline{u_i\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_m}\right)^2}$$

$$+2\nu^2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\right)^2}=\nu\nabla^2 C_i \tag{2.10}$$

用处理前面二元速度相关和三元速度相关方程的类似办法以及分别假设

$$2\nu\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}+\overline{\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}}\right)=\alpha_*\frac{\epsilon}{q}\overline{u_i u_j} \tag{2.11}$$

$$2\nu^2\overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l}\right)^2}=\gamma_*\frac{\epsilon^2}{q} \tag{2.12}$$

$$\frac{2\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial^2 p}{\partial x_l \partial x_m}u_i\frac{\partial u_l}{\partial x_m}}+\frac{\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\right)^2}=\frac{\beta_2 \epsilon}{q}C_i \tag{2.13}$$

（α_*，γ_*，β_2 为实验常数）则由（2.9），（2.10）分别得到关于 ϵ 与 C_i 的下列方程：

$$\frac{D\epsilon}{Dt}+\frac{\partial C_j}{\partial x_j}+\alpha_*\frac{\epsilon}{q}\overline{u_i u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+2\frac{\epsilon^2}{q}=\nu\nabla^2\epsilon \tag{2.14}$$

$$\frac{DC_i}{Dt}+C_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\overline{u_i u_j}\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}+\frac{2}{9}\epsilon\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j}+\frac{\beta_2 \epsilon}{q}C_i=0 \tag{2.15}$$

按照上面所得（2.1），（2.3），（2.8），（2.14）与（2.15）即可封闭 Reynolds 应力方程．

经与 Laufer[13] 的圆管湍流实验对比分析，$\beta_0\approx\beta_1\approx\beta_2\approx5$，$\alpha_*\approx1.65$；而与均匀各向同性湍流的 $q\sim1/t$ 的规律对比得到 $\gamma_*=2$.

Ⅲ. Глушко 的工作（1965）

Глушко[14] 根据 Rotta 的假设（1.3），（1.9）并在（1.1）中略去对时间的全微分项以及湍流扩散项，得出湍流剪应力 $\overline{u_1u_2}$ 为

$$\overline{u_1u_2}=-\varepsilon_*\nu\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \tag{3.1}$$

此处

$$\varepsilon_*=\frac{d_1\mathrm{Re}_{l*}^2}{(\mathrm{Re}_{l*}+d_2)(\mathrm{Re}_{l*}+d_3)} \tag{3.2}$$

其中 $\mathrm{Re}_{l*}=\sqrt{q}\,L/\nu$；$d_1$，$d_2$，$d_3$ 是常数．结合 Klebanoff[15] 与 Schubauer[16] 等的实验给出 $\varepsilon_*(\mathrm{Re}_{l*})$ 的经验函数来代替(3.2)（Глушко[14] 具体计算了湍流边界层）．然后 Re_{l*} 由表示湍流尺度的经验函数

$$\frac{L}{\delta}=\varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \tag{3.3}$$

（δ 为湍流边界层厚度）以及求解湍能方程确定．

湍能方程中的扩散项（包括三元速度相关，压力能扩散与粘性扩散），则表示成湍能梯度的形式．同时，耗散项假设为

$$\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2}=\nu KD(\mathrm{Re}_{l*})\frac{q}{L^2} \tag{3.4}$$

式中 $D=1+\varepsilon_*(\chi_0\mathrm{Re}_{l*})$，$\chi_0$ 为常数．于是最后湍能方程的形式是

$$U_1\frac{\partial q}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial q}{\partial x_2}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu D\frac{\partial q}{\partial x_2}\right)}_{\text{扩散}}+\underbrace{\nu(M-1)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2}_{\text{生成}}-\underbrace{\nu KD\frac{q}{L^2}}_{\text{耗散}} \tag{3.5}$$

此处 $M=1+\varepsilon_*(\mathrm{Re}_{l*})$.

Ⅳ. Donaldson 的工作（1969）

Donaldson[17] 对（1.1）中的压力-应变、扩散与耗散等项，从量纲考虑出发引入假设

$$\overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)}=-\frac{(A_1U_i^2+A_2q)^{1/2}}{L}\left(\overline{u_iu_k}-\frac{2}{3}\delta_{ik}q\right) \tag{4.1}$$

$$\overline{u_iu_ku_j}=-B_1q^{1/2}L\left(\frac{\partial\overline{u_iu_k}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_ku_j}}{\partial x_i}+\frac{\partial\overline{u_ju_i}}{\partial x_k}\right) \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{\rho}\overline{pu_i}=-B_2q^{1/2}L\frac{\partial\overline{u_iu_k}}{\partial x_k} \tag{4.3}$$

$$\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}=\nu\frac{\overline{u_iu_k}}{\lambda_{*ik}^2} \tag{4.4}$$

式中 A_1，A_2，B_1，B_2 是实验常数；λ_{*ik} 为相应微尺度，此处下标 i，k 相同不表示求和．

(4.1) 是 (1.3) 的引伸. 按照 (4.1)—(4.4) 用数值计算求得的层流边界层接近完成湍流转捩时的 $\overline{u_1^2}$ 分布，和Klebanoff[15]的实验大致相符(计算中选取常数值为 $A_1=0, B_1=B_2=A_2=1$. 由于 $A_1=0$，从而 (4.1) 在形式上完全与 Rotta 假设 (1.3) 相同).

V. Daly 与 Harlow 的近似模型 (1970)

Daly 与 Harlow[18] 根据张量与 Galileo 不变量及普遍性原理，提出了封闭 Reynolds 应力方程的下列假设：

$$\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}=\nu\frac{\Delta}{s^2}\overline{u_i u_k} \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_k u_j}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\alpha_0 s^2\overline{u_j u_l}}{\nu\Delta}\frac{\partial\overline{u_i u_k}}{\partial x_l}\right) \tag{5.2}$$

此处 α_0 是实验常数，Δ 是湍流 Reynolds 数 Re_T $(=s(2q)^{1/2}/\nu)$ 的函数，s 是下式定义的尺度函数：

$$\epsilon'_0\equiv\Delta q/s^2 \tag{5.3}$$

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\overline{pu_i}}{\partial x_k}+\frac{\partial\overline{pu_k}}{\partial x_i}\right)=\theta\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{s^2q}{\nu\Delta}\frac{\partial\overline{u_i u_l}}{\partial x_l}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{s^2q}{\nu\Delta}\frac{\partial\overline{u_k u_l}}{\partial x_l}\right)\right] \tag{5.4}$$

$$\overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)}=-\frac{\omega\nu\Delta}{s^2}\left(\overline{u_i u_k}-\frac{2}{3}q\delta_{ik}\right)+\frac{2\mu q}{5}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)$$
$$-\frac{\zeta\nu\Delta}{2s^2}\left(P_{il}\overline{u_l u_k}+P_{kl}\overline{u_l u_i}-\frac{2}{3}P_{lm}\overline{u_l u_m}\delta_{ik}\right) \tag{5.5}$$

此处

$$\omega=\omega_0-\frac{\omega_1 s^2}{\nu\Delta q}\overline{u_j u_l}\frac{\partial U_j}{\partial x_l},\qquad P_{ik}(\mathbf{r})=\int n_i(\mathbf{r}')n_k(\mathbf{r}')F(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{dA}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}$$

是遍及界面固壁的所有面元 dA 的面积分. 其中 θ，ω_0，ω_1，μ 及 ζ 为常数. ϵ'_0 则由求解类似于 (2.14) 的耗散方程确定.

Daly 等用数值计算方法求解了平面槽道问题，算出湍流应力 $\overline{u_1^2}$，$\overline{u_2^2}$，$\overline{u_3^2}$，$\overline{u_1u_2}$ 及平均速度分布，并且和 Laufer[8] 及 Comte-Bellot[19] 等的实验符合得比较好.

VI. Kolovandin 与 Vatutin 的设想 (1972)

Kolovandin 与 Vatutin[20] 利用坐标变换

$$\xi_j=(x_j)_B-(x_j)_A,\quad (x_j)_{AB}=(1/2)[(x_j)_A+(x_j)_B]$$

把[1]中方程 (1.6) 与 (1.7) 的有关压力-速度相关以及耗散等项表成

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}=\frac{1}{4}\nabla_x^2\overline{u_i u_k}-(\nabla_\xi^2\overline{u_i u'_k})_0 \tag{6.1}$$

$$\overline{u_i\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}+\overline{u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}}+\overline{u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}}=\frac{3}{2}\nabla_x^2\overline{u_i u_k u_j}$$
$$-\frac{1}{2}[(\nabla_\xi^2\overline{x_i u_k u'_j})_0+(\nabla_\xi^2\overline{u_k u_j u'_i})_0+(\nabla_\xi^2\overline{u_j u_i u'_k})_0] \tag{6.2}$$

$$\overline{u_i\frac{\partial p}{\partial x_k}}+\overline{u_k\frac{\partial p}{\partial x_i}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{pu_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{pu_k}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial \xi_k}\overline{u_i p'}\right)_0+\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\overline{u_k p'}\right)_0 \tag{6.3}$$

$$\overline{u_iu_k\frac{\partial p}{\partial x_j}}+\overline{u_ku_j\frac{\partial p}{\partial x_i}}+\overline{u_ju_i\frac{\partial p}{\partial x_k}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_iu_kp}+\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_ku_jp}+\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_ju_ip}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\overline{u_iu_kp'}\right)_0+\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\overline{u_ku_jp'}\right)_0+\left(\frac{\partial}{\partial \xi_k}\overline{u_ju_ip'}\right)_0 \tag{6.4}$$

此处撇号表示流场中B点处的相应脉动值，下标“0”表示$\xi=0$处的微分算子．然后基于准均匀性假设[1]与（2.6）以及利用均匀湍流中的有关表示式求出

$$[L_\xi^{m\cdots st}B_{lm\cdots p}(\mathbf{x}_{AB},\xi,t)]_0$$

所示的相应未知项．于是即得封闭 Reynolds 平均运动方程组

$$\frac{D\overline{u_iu_k}}{Dt}+\overline{u_iu_j}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}+\overline{u_ku_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_iu_ku_j}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{pu_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{pu_k}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\nu\nabla_x^2\overline{u_iu_k}+\frac{10}{3}\nu\overline{\rho}_{s;s}^{\bullet}\left[R_{ik}+\frac{1}{5}(1-4\overline{C}_0)(R_{ik}-\delta_{ik})\right]=0 \tag{6.5}$$

$$\frac{D\overline{u_iu_ku_j}}{Dt}+\overline{u_iu_ku_l}\frac{\partial U_j}{\partial x_l}+\overline{u_ku_ju_l}\frac{\partial U_i}{\partial x_l}+\overline{u_ju_iu_l}\frac{\partial U_k}{\partial x_l}+\overline{u_iu_l}\frac{\partial\overline{u_ku_j}}{\partial x_l}+\overline{u_ku_l}\frac{\partial\overline{u_ju_i}}{\partial x_l}$$

$$+\overline{u_ju_l}\frac{\partial\overline{u_iu_k}}{\partial x_l}+\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{pu_iu_k}+\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{pu_ku_j}+\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{pu_ju_i}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\nu\nabla_x^2\overline{u_iu_ku_j}=0 \tag{6.6}$$

$$\frac{1}{4\rho}\nabla_x^2\overline{pu_r}+\frac{\partial U_m}{\partial x_n}\frac{\partial\overline{u_nu_r}}{\partial x_m}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_n}\overline{u_mu_nu_r}=0 \tag{6.7}$$

$$\frac{1}{4\rho}\nabla_x^2\overline{pu_ru_s}+\frac{\partial U_m}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_m}\overline{u_nu_ru_s}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_n}(\overline{u_mu_n}\,\overline{u_ru_s}$$

$$+\overline{u_mu_r}\,\overline{u_nu_s}+\overline{u_mu_s}\,\overline{u_nu_r})=0 \tag{6.8}$$

$$\frac{D\overline{\rho}_{s;s}^{\bullet}}{Dt}-\frac{1}{10}\nabla_x^2U_j\frac{\partial q}{\partial x_j}-\frac{1}{10}\overline{u_su_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\nabla_x^2U_s+\frac{2}{15}\overline{\rho}_{s;s}^{\bullet}\frac{\partial U_j}{\partial x_l}F_{1lj}$$

$$+\frac{2}{15}\frac{\partial U_j}{\partial x_l}\overline{\rho}_{s;s}^{\bullet}F_{2lj}+\frac{7}{3\sqrt{3}}\overline{\rho}_{s;s}^{3/2}\left(S+\frac{S_\nu}{R_q}\right)-\frac{1}{2}\nu\nabla_x^2\overline{\rho}_{s;s}^{\bullet}=0 \tag{6.9}$$

此处

$$F_{1lj}=2(3-2\overline{C}_0)R_{lj}-(1-4\overline{C}_0)\delta_{lj},\quad F_{2lj}=4\overline{C}_0R_{lj}-(5+4\overline{C}_0)\delta_{lj}$$

$$R_{ik}=\frac{3\overline{u_iu_k}}{2q},\quad R_q=\frac{\sqrt{q}\,\lambda}{\nu}$$

其中λ是 Taylor 微尺度，S，S_ν，$\overline{C}_0$是系数．

Ⅶ. Launder 等的工作（1972，1975，1976）

Hanjalic 与 Launder[21] 认为湍流是均匀的，即假设平均速度在其垂直于矢量方向系线性地变化，从而把（1.4）写成（这实际上是[1]中（5.2）的第一部分）：

$$\phi_{ik;2}=\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\right)a_{l\ k}^{m\ i} \tag{7.1}$$

把四阶张量 $a_{l\ k}^{m\ i}$ 表为

$$\begin{aligned}a_{l\ k}^{m\ i}=&\alpha\overline{u_m u_i}\delta_{lk}+\beta[\overline{u_m u_l}\delta_{ik}+\overline{u_m u_k}\delta_{il}+\overline{u_i u_k}\delta_{ml}+\overline{u_i u_l}\delta_{mk}]\\&+[\gamma\delta_{mi}\delta_{lk}+\eta(\delta_{ml}\delta_{ik}+\delta_{mk}\delta_{il})]q+v[\overline{u_m u_k}\ \overline{u_i u_l}+\overline{u_m u_l}\ \overline{u_i u_k}]/q\\&+c_{\phi 2}[\overline{u_m u_i}\ \overline{u_l u_k}]/q\end{aligned} \tag{7.2}$$

由(1.5)，(1.6)（即 $a_{l\ k}^{m\ i}=a_{l\ k}^{i\ m}=a_{k\ l}^{i\ m}$ 及 $a_{l\ i}^{m\ i}=0$）以及（1.7）得到（7.2）中诸常数表示式

$$\alpha=\frac{10-8c_{\phi 2}}{11},\ \beta=-\frac{2-6c_{\phi 2}}{11},\ \gamma=-\frac{4-12c_{\phi 2}}{55},\ \eta=\frac{6-18c_{\phi 2}}{55},\ v=-c_{\phi 2} \tag{7.3}$$

（其中 $c_{\phi 2}$ 是待定的实验常数）．对应于（1.3），$(\phi_{ik}+\phi_{ki})_1$ 用（2.2）表示：

$$(\phi_{ik}+\phi_{ki})_1=-c_{\phi 1}(\epsilon/q)[\overline{u_i u_k}-(2/3)\delta_{ik}q] \tag{7.4}$$

为了本节所用实验常数的表示符号一致起见，此处用 $c_{\phi 1}$ 代替（2.2）中的 β_0。

其次采用局部湍流Reynolds数相当大的限制条件，假设运动的最小尺度是各向同性的，于是把（1.1）中的耗散项表示成（2.1）所示的形式．（1.1）中扩散项的粘性扩散部分由于大 Reynolds 数的假设而可忽略．同时基于 Hanjalic 与 Launder[22] 关于非对称平面槽道流的实验，在湍能方程中与其他项相较，$d\overline{pu_2}/dx_2$ 很小，从而此处忽略压力能扩散的影响．

现在讨论三元速度相关的处理．大湍流 Reynolds 数情形下的三元速度相关方程是

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{u_i u_k u_j}}{Dt}=&-\underbrace{\left\{\overline{u_i u_k u_l}\frac{\partial U_j}{\partial x_l}+\overline{u_k u_j u_l}\frac{\partial U_i}{\partial x_l}+\overline{u_j u_i u_l}\frac{\partial U_k}{\partial x_l}\right\}}_{\text{I}}\\&+\underbrace{\left\{\overline{u_i u_k}\frac{\partial\overline{u_j u_l}}{\partial x_l}+\overline{u_k u_j}\frac{\partial\overline{u_i u_l}}{\partial x_l}+\overline{u_j u_i}\frac{\partial\overline{u_k u_l}}{\partial x_l}\right\}}_{\text{II}}-\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l}\overline{u_i u_k u_j u_l}}_{\text{III}}\\&-\underbrace{\frac{1}{\rho}\left\{\overline{u_i u_k\frac{\partial p}{\partial x_j}}+\overline{u_k u_j\frac{\partial p}{\partial x_i}}+\overline{u_j u_i\frac{\partial p}{\partial x_k}}\right\}}_{\text{IV}}\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $\overline{u_i u_k u_j u_l}$ 可写成（2.6）的形式，于是Ⅱ，Ⅲ项之和如（2.8）中一样，而为

$$\text{II}+\text{III}=-\left\{\overline{u_i u_l}\frac{\partial\overline{u_k u_j}}{\partial x_l}+\overline{u_k u_l}\frac{\partial\overline{u_j u_i}}{\partial x_l}+\overline{u_j u_l}\frac{\partial\overline{u_i u_k}}{\partial x_l}\right\} \tag{7.5}$$

实验[22]表明，（7.5）右边的符号和（2.5）中Ⅰ项相同而且比第Ⅰ项大若干倍，因此二者相较，第Ⅰ项可以忽略．至于其中的第Ⅳ项，按[1]的理论表明，该项可分为

$$\overline{u_p u_q u_r}\partial U_l/\partial x_m$$

类型的项和速度脉动相关项之和，而前者恰如上面所讨论的可以略去，从而由量纲考虑可得如前面 Давыдов 所得一样的下列表示式：

$$-\frac{1}{\rho}\left\{\overline{u_i u_k \frac{\partial p}{\partial x_j}}+\overline{u_k u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}}+\overline{u_j u_i \frac{\partial p}{\partial x_k}}\right\}=-c_s\frac{\epsilon}{q}\overline{u_i u_k u_j} \tag{7.6}$$

（此处用 c_s 代替（2.7）中的 β_1）

把（7.1），（7.2），（7.4），（2.1）与（7.6）代入（1.1），最后得到 Reynolds 应力方程为

$$\frac{D\overline{u_i u_k}}{Dt}=-\left[\overline{u_k u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\overline{u_i u_j}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right]-\frac{2}{3}\delta_{ik}\epsilon-c_{\phi 1}\frac{\epsilon}{q}\left(\overline{u_i u_k}-\delta_{ik}\frac{2q}{3}\right)$$

$$+(\phi_{ik}+\phi_{ki})_2+c_s\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{q}{\epsilon}\left[\overline{u_i u_l}\frac{\partial\overline{u_k u_j}}{\partial x_l}+\overline{u_k u_l}\frac{\partial\overline{u_j u_i}}{\partial x_l}+\overline{u_j u_l}\frac{\partial\overline{u_i u_k}}{\partial x_l}\right] \tag{7.7}$$

大湍流 Reynolds 数情形下湍能耗散 $\epsilon\left[=\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right)^2}\right]$ 的方程是[12][参看（2.9）]

$$\frac{D\epsilon}{Dt}=\underbrace{-2\nu\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}+\overline{\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}}\right)}_{\text{(i)}}\underbrace{-2\nu\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}}_{\text{(ii)}}$$

$$\underbrace{-2\overline{\left[\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_l}\right]^2}}_{\text{(iii)}}\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_j\epsilon'}}_{\text{(iv)}}\underbrace{-\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\left[\frac{\partial p}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right]}}_{\text{(v)}} \tag{7.8}$$

假设有关生成项（i）表示为

$$2\nu\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}+\overline{\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}}\right)=c_{\epsilon 1}\frac{\epsilon\overline{u_i u_j}}{q}+\widetilde{c}_{\epsilon 1}\delta_{ij} \tag{7.9}$$

式中 $c_{\epsilon 1}$ 和 $\widetilde{c}_{\epsilon 1}$ 为常数．实际上当（7.9）乘以 $\partial U_i/\partial x_j$，则含 $\widetilde{c}_{\epsilon 1}$ 之项消失．

当 Reynolds 数相当大而惯性次区存在时，则代表涡量脉动生成率的项（ii）与代表由于粘性作用引起的耗散率衰变的项（iii）之和应由从低波数向高波数传递能量的串级过程所控制，从而由量纲分析有（$c_{\epsilon 2}$ 为实验常数）

$$2\left[\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}+\overline{\left(\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_l}\right)^2}\right]=c_{\epsilon 2}\,\epsilon^2/q \tag{7.10}$$

第（iv）项估计速度脉动引起的扩散，可由 $\overline{\epsilon' u_j}$ 的方程中略去小项而推得（c_ϵ 为实验常数）

$$\overline{\epsilon' u_j}=-c_\epsilon\frac{q}{\epsilon}\overline{u_j u_l}\frac{\partial\epsilon}{\partial x_l} \tag{7.11}$$

第（v）项系压力脉动引起的关于 ϵ 的扩散传递．$\overline{(\partial p/\partial x_l)(\partial u_i/\partial x_l)}$ 的表达式可类似(1.2)而准确地给出．它包括平均运动流场与脉动运动流场的相互作用项和脉动运动的自相互作用项，但二者均包括比（1.2）中所含阶数要高的平均速度或脉动速度的高阶导数项．因此作为与 Reynolds 应力方程中关于这些压力能扩散项的封闭水平一致起见，而把第（v）项忽略，

于是 ϵ 的方程最后写成

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = -c_{\epsilon 1}\frac{\epsilon\overline{u_i u_j}}{q}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c_{\epsilon 2}\frac{\epsilon^2}{q} + c_\epsilon \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q}{\epsilon}\overline{u_j u_l}\frac{\partial \epsilon}{\partial x_l}\right) \tag{7.12}$$

Hanjalic 与 Launder[21] 按照（7.7），（7.12）用数值计算方法同时采用实验常数值

$$c_{\phi 1}=2.8,\ c_{\phi 2}=0.45,\ c_s=0.08,\ c_{\epsilon 1}=1.45,\ c_{\epsilon 2}=2,\ c_\epsilon=0.13$$

计算了非对称槽道流动，对称环形套筒（小半径比）流动，具有均匀压力的平壁边界层，平面墙壁射流，平面混合层等流动中有关平均速度、剪应力与湍能等的分布，以及湍能平衡等，并且都与测量结果[22,23-27]比较符合。

其后 Launder，Reece 与 Rodi[28]考虑了壁面对压力-应变项的影响。同时把压力-应变式中的四阶张量写成更为普遍的形式。稍后，Hanjalic 与 Launder[29] 讨论了小 Reynolds 数湍流的 Reynolds 应力方程封闭问题。其他均近似地采用以前大 Reynolds 数情形的处理，而其耗散项则考虑了粘性的影响。基于大 Reynolds 数情形的耗散关系式（2.1）及对于 Reynolds 数趋于零时，湍流运动的含能区域与耗散区域重叠，而耗散率通常表为

$$\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}} = \frac{\overline{u_i u_k}}{q}\epsilon \tag{7.13}$$

的两种极限情形，把一般耗散关系式写作

$$\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}} = \frac{2}{3}\epsilon\left[(1-f_s)\delta_{ik} + \frac{\overline{u_i u_k}}{2q/3}f_s\right] \tag{7.14}$$

此处 f_s 是湍流 Reynolds 数 $R_T^*(=q^2/\nu\epsilon)$ 的函数。数值计算表明

$$f_s = [1+(1/10)R_T^*]^{-1} \tag{7.15}$$

Ⅷ. 我们最近的工作（1985，1986）

近来我们发展了一个普通剪切湍流二阶封闭理论[30]。为了避免上述其他作者处理压力能扩散项时的矛盾，在描述 Reynolds 应力方程时，我们仍然采用[1]中（1.6）的原来形式

$$\frac{D\overline{u_i u_k}}{Dt} + \overline{u_k u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j}\frac{\partial U_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_k u_j} - \frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i\frac{\partial p}{\partial x_k}} + \overline{u_k\frac{\partial p}{\partial x_i}}\right)$$

$$+\nu\nabla^2\overline{u_i u_k} - 2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}} \tag{8.1}$$

根据[1]由速度脉动方程取散度所得压力脉动所满足的 Poisson 方程得到

$$\frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i\frac{\partial p}{\partial x_k}} + \overline{u_k\frac{\partial p}{\partial x_i}}\right) = -\alpha_{ik} - \beta_{ik} - \gamma_{ik} \tag{8.2}$$

此处 α_{ik} 表示平均流场与湍流脉动流场之间的相互作用对速度-压力相关所作的贡献；β_{ik} 表示各个脉动速度之间的相互作用；γ_{ik} 表示壁面效应。

在笔者的论文[31]的基础上，由张量的对称性以及量纲考虑，我们假设

$$\alpha_{ik} = c_1\left(\overline{u_k u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right) \tag{8.3}$$

$$\beta_{ik} = (c_2/T^*)\overline{u_i u_k} \tag{8.4}$$

式中 T^* 表示时间尺度．同样，对于考虑壁面影响的面积分项，我们建议采用

$$\gamma_{ik}=c_3\left(D_{ik}-\frac{2}{3}G\delta_{ik}\right)+c_4q\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) \tag{8.5}$$

此处

$$D_{ik}=-\overline{u_iu_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}-\overline{u_ku_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_i},\quad G=-\overline{u_lu_j}\frac{\partial U_l}{\partial x_j}$$

于是由（8.2）—（8.5），可得普通剪切湍流流动的速度脉动与压力脉动梯度的相关模式

$$\frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i\frac{\partial p}{\partial x_k}}+\overline{u_k\frac{\partial p}{\partial x_i}}\right)=-c_1\left(\overline{u_ku_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\overline{u_iu_j}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right)-\frac{c_2}{T^*}\overline{u_iu_k}$$
$$-c_3\left(D_{ik}-\frac{2}{3}G\delta_{ik}\right)-c_4q\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) \tag{8.6}$$

其次，关于三元速度相关项，从与粘性扩散项 $\nu\nabla^2\overline{u_iu_k}$ 类比出发，假设下面的简单形式

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_iu_ku_j}=-c_\phi L\sqrt{q}\,\nabla^2\overline{u_iu_k} \tag{8.7}$$

在以上各式中，c_1，c_2，c_3，c_4，c_ϕ 是经验常数．至于湍流耗散项，我们采用了上述 Rotta 经验性假设（1.9），该假设可由[1]中基于张量的数学对称性而得到的

$$\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}}=-\frac{2\nu}{3\lambda^2}(k-5)q\delta_{ik}+\frac{\nu k}{\lambda^2}\overline{u_iu_k} \tag{8.8}$$

（k 是常数）以及笔者[32]（基于速度脉动与压力脉动的相似性条件，由速度脉动方程所得到的，对于平面与轴对称情形均适用）的下列湍流长度尺度

$$L\propto\nu/\sqrt{q} \tag{8.9}$$

得到比较严格的证明．于是由（8.1），（8.6），（8.7）以及（1.9）即得所论普遍剪切湍流二阶封闭理论的模型方程

$$\frac{D\overline{u_iu_k}}{Dt}+(1-c_1)\overline{u_ku_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+(1-c_1)\overline{u_iu_j}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}-\frac{c_2}{T^*}\overline{u_iu_k}-c_3\left(D_{ik}-\frac{2}{3}G\delta_{ik}\right)$$
$$-c_4q\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)-(c_5L\sqrt{q}+\nu)\nabla^2\overline{u_iu_k}+2\nu\left(K\frac{\overline{u_iu_k}}{2L^2}+\delta_{ik}\kappa\frac{q^{3/2}}{3\nu L}\right)=0 \tag{8.10}$$

根据（8.10），并令

$$T^*=1\Big/\frac{dU_1}{dx_2} \tag{8.11}$$

分析了平面槽道中间（槽中心与壁面之间）大部分流场的湍流脉动特性．当采用经验常数

$$c_1=1.2,\quad c_2=0.3,\quad c_3=0.29,\quad c_4=0.312$$

时，我们的理论结果与实验数据[28]符合得相当好．

同时，由平面槽道中心附近的幂级数解，得出下列湍能抛物线律

$$q/U_\tau^2=0.9532+4.887(1-\eta^2) \tag{8.12}$$

与槽道中间大部分流场的湍能线性律

$$q/U_\tau^2 = 4.331(1-\eta) \quad (8.13)$$

互相衔接（此处U_τ是摩擦速度；$\eta = x_2/H$，x_2是离壁面的距离，H是平面槽道半厚度）；而为 Comte-Bellot[19] 的实验所证实。

至于涉及具有剪应力的普通湍流流动速度相关结构的实验研究方面，除上面已引文献外，至目前为止，值得提到的比较典型的测量结果还有 Townsend 关于圆柱后尾迹的$\overline{u_1^2}$，$\overline{u_2^2}$，$\overline{u_3^2}$，$\overline{u_1u_2}$，$\overline{u_1^2u_2}$，$\overline{u_2^3}$，$\overline{u_3^2u_2}$分布[33]以及湍能平衡[34]与湍能耗散[35]，Corrsin 与 Uberoi[36,37]关于圆形自由射流的湍流速度脉动强度分布，Wygnanski与Fiedler[38]的圆形自由射流中的剪应力、脉动速度分布以及湍能平衡，Antonia与Satyaprakash[39]关于平面与圆形自由射流的平均耗散率分布，Corrsin与Kistler[40]的湍流边界层脉动速度分布，Townsend[35]关于湍流边界层的湍能平衡，Eckelmann[41]关于粘性底层的纵向速度脉动分布，以及 Antonia 与 Van Atta[42] 关于湍流边界层的湍流应力等。

参 考 文 献

1 Chou PY (周培源). *Q. Appl. Math.*, **3** (1945): 38—54
2 Rotta JC. *Zeit. fur Phys.*, **129** (1951): 547—572
3 Prandtl L. Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl (1945): 6—19; Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen 2 (1961): 874—887
4 Batchelor GK, Townsend AA. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A**194** (1948): 527
5 Dryden HL, et al. NACA Rep. No. 581 (1937)
6 Simmons LFG, Salter C. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A**165** (1938): 73
7 Taylor GI. Proc. Roy. Soc. Lond., A**157** (1936): 537
8 Laufer J. NACA TN 2123 (1950); NACA Rep. No. 1053 (1951)
9 Rotta JC. *Zeit. fur Phys.*, **131** (1951): 51—77
10 Давыдов БИ. ДАН СССР, **127** (1959): 768—771
11 ——. *ibid*, **127** (1959): 980—982
12 ——. *ibid*, **136** (1961): 47—50
13 Laufer J. NACA Rep. No. 1174 (1954)
14 Глушко ГС. Изв. АН СССР, Механика, 4 (1965): 13—23
15 Klebanoff PS. NACA TN No. 3178 (1954)
16 Schubauer GB. *J. Appl. Phys.*, **25** (1954): 188
17 Donaldson CduP. *AIAA J.*, **7** (1969): 271—278
18 Daly BJ, Harlow FH. *Phys. Fluids*, **13** (1970): 2634—2649
19 Comte-Bellot G. Publications Scientifiques et Techniques du Ministere de l'Air No. 419, Paris (1965)
20 Kolovandin BA, Vatutin IA. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15** (1972): 2371—2383
21 Hanjalic K, Launder BE. *J. Fluid Mech.*, **52** (1972): 609—638
22 ——, ——. *ibid*, **51** (1972): 301
23 Townsend AA. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **47** (1951): 375
24 Tailland A, Mathieu J. *J. Mecan.*, **6** (1967): 103—131
25 Lawn CJ, Hamlin MJ. C. E. G. B. Rep. RD/B/N 1278 (1969)
26 ——. *ibid*, Rep. RD/B 1575 (1970)
27 Wygnanski I, Fiedler HE. *J. Fluid Mech.*, **41** (1970): 327—363
28 Launder BE, Reece GJ, Rodi W. *ibid*, **68** (1975): 537—566
29 Hanjalic K, Launder BE. *ibid*, **74** (1976): 593—610
30 谢象春. 模式理论与平面槽道湍流. 中国科学院力学研究所研究报告 (1986)
31 ——. 预混火焰与均匀各向同性湍流畸变. 同上 (1985)
32 ——. 力学学报, 3 (1980): 243—251
33 Townsend AA. *Australian J. Research*, 2A (1949): 451
34 ——. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A**197** (1949): 124
35 ——, The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge Univ. Press, London (1956, 1976)

36 Corrsin S. NACA WR No. 94 (1943)
37 ——, Uberoi MS. NACA TN No. 1865 (1949)
38 Wygnanski I, Fiedler H. *J. Fluid Mech.*, **38** (1969) : 577
39 Antonia RA, Satyaprakash BR. *Phys. Fluids*, **23** (1980) : 695—700
40 Corrsin S, Kistler AL. NACA TN No. 3133 (1954)
41 Eckelmann H. Mitteilungen Max-Planck-Inst. fur Stromungsforschung, Gottingen, No. 48 (1970)
42 Antonia RA, Van Atta CW. *AIAA J.*, **15** (1977) : 71—75

DEVELOPMENT CONCERNING A GENERAL THEORY OF TURBULENCE WITH SHEAR

Xie Xiang-chun (Shieh Sang-Chun)
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract The present paper relates the main status of development concerning turbulent model theories following the general theory of turbulence with shear proposed by P.Y.Chou in 1945.

Keywords *turbulence energy; dissipation of turbulence; length scale of turbulence*

第17届国际理论与应用力学大会(ICTAM)将于1988年8月在法国举行

会议由国际理论与应用力学联合会（IUTAM）主办，1988年8月21—27日于法国举行。内容包括力学学科各领域的理论与应用方面的研究成果。会议期间同时举行三个小型讨论会：①材料大变形和损伤力学（法 J.Lemaitre）；②二相流力学（英 G.K.Batchelor)；③地壳力学（美 D.L.Turcotte)。作分组综述报告的有：法 P.De Gennes；美 J.Collub；法 P.Hopfinger；美 J.Hutchinson；澳 G.Milton；加拿大 S.Savage；英 F.T.Smith；波兰 K.Sobczyk；瑞典 B.Storakers；芬兰 J.H.J.Vandermeulen；中国 Wang Ren（王仁)。现正在公开征稿，要求简短提要(Brief Abstract)100—150个英文词，详细摘要(Summary) 500个英文词。稿件各一式六份必须于**1988年2月8日**前寄到大会组织委员会。欲投稿者可向各省市力学学会索取ICTAM的正式通知。

中国力学学会办公室供稿