

# Koiter 稳定理论及其应用

黄宝宗

任文敏

(东北工学院)

(清华大学)

**提要** 本文介绍了 Koiter 稳定理论的特点、基本内容、应用和发展情况, 讨论了这一理论在结构屈曲研究中的重要意义和应用前景。

**关键词** Koiter 理论; 初始后屈曲

## 1. 引言

在工程结构中常以杆、薄板和薄壳作为构件, 为了充分发挥材料的承载能力, 往往使这些构件主要承受轴向力或薄膜应力, 因此屈曲成为必须考虑的问题。特别是在航空、航天、船艇、薄壁容器、大型桁架等结构中, 以稳定性控制设计的零部件常常占有很大比重, 所以能否恰当地解决稳定问题, 直接影响结构的安全、性能和经济性。屈曲的发生一般是突然的, 屈曲以后结构的承载能力大大下降, 变形急剧增加, 导致破坏, 甚至造成灾难性的后果。在很多情况下, 屈曲载荷在相当大的范围内变动, 这种随机性质, 使结构的可靠性变差, 有些被认为是安全的结构, 实际上并没有完全排除发生屈曲的危险, 因此屈曲成为设计人员必须十分注意的隐患。大型昂贵结构由于屈曲导致破坏和造成严重损失的例子时有发生, 文[1]中介绍了许多实例。所以, 对于结构屈曲的研究, 吸引了许多力学工作者和设计人员的注意力, 稳定理论及其应用成为近代力学的一个重要分支。

近20年来, 稳定理论取得了很大进展。Bushnell<sup>[1]</sup>把屈曲的最新进展归纳为三个方面: 1. 渐近屈曲理论(Koiter 理论或初始后屈曲理论)的发展, 及其应用于诸如板、壳和壁板这类简单结构; 2. 通用计算程序的发展, 这些程序可用于计算大挠度、大变形和材料非线性及动力问题; 3. 专用计算程序的发展, 这些程序可用于轴对称结构的极值点和分支点计算。

通用非线性分析程序是从70年代初开始发展的, 直至现在, 它们的理论基础是连续介质力学, 方法是连续结构离散化为有限元, 最后归结为解非线性代数方程组。专用计算程序是为更特殊的结构建立的, 也是采用离散化和非线性分析方法。由于计算对象有限, 因而更加简单、灵活, 便于工程师和设计人员使用。有关计算程序方面的文献见综述[1]和[2]。

渐近屈曲理论是 Koiter<sup>[3]</sup> (1945) 建立的, 60年代起受到重视, 并得到进一步发展和

广泛应用。本文的主要目的是简要介绍 Koiter 理论的基本概念, 以及它的某些发展和应用情况。

为了说明 Koiter 理论的特点, 首先简单回顾屈曲理论的发展过程, 详细的叙述见 [1, 4—8]。

30年代以前, 在经典临界载荷的研究方面, 已经取得了很多有价值的结果。但是当人们把经典临界载荷与实验测得的破坏载荷比较时, 发现平板的破坏载荷远高于经典临界载荷, 而壳体的破坏载荷却低于经典临界载荷。在圆柱壳轴压屈曲时, 前者通常只是后者的  $1/2$ — $1/5$ 。这促使人们从理论和实验上进一步研究板和壳的后屈曲行为。

在平板后屈曲研究中, 建立了轴压屈曲时等效宽度的概念, 剪切屈曲时张力场的概念。近来又研究了矩形平板在轴压下的二次屈曲问题<sup>[9,10]</sup>, 确定在第一个分支点以后, 非线性路径上出现的新的分支点, 讨论第二个分支点的稳定性和二次后屈曲行为。

对于薄壳后屈曲较早的研究, 是 Donnell (1934) 进行的。Karman 和钱学森 (1941) 第一次得到圆柱壳轴压后屈曲路径, 证明在低于经典临界载荷时, 还有其他的平衡状态存在, 初步解释了实验结果低的原因。后来又有很多人, 沿用非线性分析途径进行了大量工作, 企图找到后屈曲平衡路径上的最低载荷 (“下临界载荷”)。文[4] (1960) 已指出, 这种下临界载荷的存在是可疑的, 并认为它没有多少实践价值。Hoff 等 (1966) 对轴压圆柱壳进行了更完善的分析, 证明随着挠度函数中所用三角级数的项数的增加, 最小平衡载荷趋于零, 并且只有无限薄的壳体才有精确解。可见后屈曲平衡路径上的最小平衡载荷与最小屈曲载荷之间, 几乎没有任何联系。这期间, Donnell 等 (1950) 的理论分析和大量实验, 都肯定影响薄壳屈曲的主要因素是实际壳体存在缺陷。60年代初, 在圆柱壳轴压实验中, 采用新的技术制造出接近于理想完善情况的试验模型, 实验结果大大提高。同时, Stein 等 (1962) 提出的前屈曲一致理论, 更合理地考虑了屈曲前壳体的实际状态, 考虑了边界条件和非线性的影响, 从而使临界载荷的理论值有所降低, 最后理论和实验结果基本一致。考虑非线性后屈曲和指出缺陷的重要影响, 是60年代初以前, 壳体屈曲理论的两个重大进展。

结构屈曲有分支点和极值点两种形式, 其中极值点屈曲 (或跳跃屈曲) 最常见。后屈曲分析的基本方法是借助于非线性大挠度理论。但是计算奇异点很多的屈曲路径和讨论稳定性, 是非常复杂和困难的。因此在工程结构中, 特别是在复杂结构中的实际应用, 受到很大限制。在一般情况下, 人们最关心的是屈曲何时发生。所以分支点的确定是很有意义的, 而且计算比较简单。但是单纯的分支分析不能讨论后屈曲行为和缺陷影响, 有时不能给出满意的结果。Koiter 稳定理论, 则兼有非线性大挠度分析和分支理论的优点, 又弥补了两者的弱点和不足。这是该理论在 1945 年发表以后经过 20 来年终于受到重视和得到发展的原因。

Koiter 把分支点附近足够小的邻域作为研究对象, 根据能量原理和稳定性的能量准则, 利用摄动法讨论了下列问题: 1. 对于完善结构的已知前屈曲状态 (基本状态), 决定分支点和屈曲形态; 2. 确定分支点附近平衡状态的渐近解; 3. 用能量准则讨论基本状态、分支点本身及邻近后屈曲平衡状态的稳定性; 4. 研究小初始缺陷对结构后屈曲行为的影响。作为渐近理论, 它的局限性在于只在分支点附近适用, 不能分析大范围内的后屈曲和较大缺陷的影响, 而且限于保守系的研究。

## II. Koiter 弹性稳定一般理论

Koiter 一般理论的叙述可以在 Koiter 本人或其他作者的很多文献中找到, 例如 [11—15]. Budiansky [14] 更多地利用了泛函分析的方法, 并给出能量法和虚功法两种形式; Thompson [15] 讨论了离散系统的渐近屈曲理论. 这些叙述本质上是相同的.

Koiter 讨论的是弹性静力保守系统. 假设载荷依赖于唯一的参数  $\lambda$ , 系统存在已知的平衡状态  $u_0(\lambda)$ , 称为基本状态 (I), 位移  $u$  是  $u_0$  的运动许可邻近状态 (II),  $\eta$  是附加位移. 状态 I 和 II 的位能差为

$$\Delta p[\lambda; \eta] = p[\lambda; u_0 + \eta] - p[\lambda; u_0]$$

位能极值原理给出状态 II 的平衡条件

$$\delta(\Delta p[\lambda; \eta]) = 0 \quad (1)$$

按能量准则, 基本状态和分支点 ( $\eta = 0$ ) 稳定性的充要条件是: 对于一切运动许可的邻近状态 ( $\eta$  的模足够小)

$$\Delta p[\lambda; \eta] \geq 0 \quad (2)$$

由于  $\eta$  很小, 将泛函  $\Delta p[\lambda; \eta]$  对  $\eta$  展开:

$$\Delta p[\lambda; \eta] = p_2[\lambda; \eta] + p_3[\lambda; \eta] + p_4[\lambda; \eta] + \dots \quad (3)$$

$p_m$  表示  $\eta$  的  $m$  次泛函,  $p_1[\lambda; \eta] = 0$  是因为基本状态 ( $\eta = 0$ ) 是平衡的, 即

$$\delta(\Delta p[\lambda; \eta])|_{\eta=0} = (p_1[\lambda; \delta\eta] + \dots)|_{\eta=0} = p_1[\lambda; \delta\eta] = 0$$

基本状态分支点的条件是  $p_2[\lambda; \eta]$  半正定,

$$\min p_2[\lambda; \eta] = 0 \text{ 或 } \delta p_2[\lambda; \eta] = 0 \quad (4)$$

使  $p_2 = 0$  的非零  $\eta$  及对应的载荷因子  $\lambda_c$  称为屈曲形态和临界载荷. 一般说来, 屈曲形态可能有  $n$  个, 记作  $u_i (i = 1, \dots, n)$ . 显然, 线性组合  $\sum a_i u_i$  也是屈曲形态.  $n = 1$  称为单模态,  $n > 1$  称为多模态.

如果限于研究  $\lambda_c$  附近的后屈曲行为,  $(\lambda - \lambda_c)$  是小量, 可以预料, 后屈曲平衡状态应该与某一些屈曲形态接近. 令

$$\eta = a_i u_i + v \quad (5)$$

其中系数  $a_i$  是小量,  $v$  是高阶小量, 重复指标表示求和. 要求  $v$  与  $u_i$  正交, 即内积

$$T_{11}[u_i, v] = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6)$$

泛函  $T_{11}$  可以任选, 但要求二次泛函  $T_{11}[v, v] = T_2[v] > 0$ , 通常可取线弹性应变能形式, 则

$$T_2[\eta] = U_2[\eta] = U_2[a_i u_i] + 2U_{11}[a_i u_i, v] + U_2[v] = U_2[a_i u_i] + U_2[v]$$

上式表示正交条件使  $v$  对线弹性应变能的影响最小.

在一次近似下, 可以取

$$v = a_j a_j u_j \quad (7)$$

函数  $u_j$  和幅度  $a_j$  是待定的. 为了利用  $(\lambda - \lambda_c)$  是小量的条件, 将 (3) 各项对  $\lambda$  在  $\lambda_c$  处展开, 把 (7), (5) 代入, 略去高阶小量, 求  $u_j$  归结为线性边值问题, 泛函  $\Delta p[\lambda; \eta]$  归结为多元函数  $p(\lambda; a_i)$ , 求  $a_i$  归结为解方程组

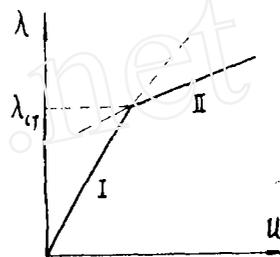


图 1

$$2(\lambda - \lambda_c) A'_{ij} a_j + \begin{cases} 3A_{ijkl} a_j a_k & \text{当 } A_{ijk} \text{不全为零时 (三次结构)} \\ 4A_{ijkl} a_j a_k a_l & \text{当 } A_{ijk} \text{全为零时 (四次结构)} \end{cases} = 0 \quad (8)$$

其中  $A'_{ij}$ ,  $A_{ijkl}$ ,  $A_{ijk}$  是与  $u_i$ ,  $u_{ij}$  有关的系数。上式阶数很低, 不难解出  $a_i(\lambda)$ 。在  $n$  维空间中,  $a_i$  代表一个向量, 称为屈曲方向, 或记作  $a_i = \xi l_i$ ,  $l_i$  是沿屈曲方向的单位向量。对每一屈曲方向  $l$ , 可以得到幅度  $\xi$  与  $\lambda$  的关系 (图 2,  $\bar{\xi} = 0$ )

$$\lambda - \lambda_c = \begin{cases} \lambda_1(l) \bar{\xi} & \text{三次结构} \\ \lambda_2(l) \bar{\xi}^2 & \text{四次结构} \end{cases} \quad (9)$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2$  是与  $l$  有关的系数。

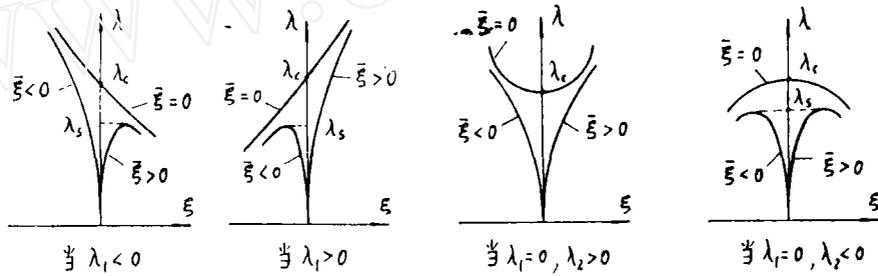


图 2

稳定性决定于平衡状态是否使多元函数  $p(\lambda; a_i)$  取极小值。Koiter 证明: 1.  $\lambda > \lambda_c$  时基本状态是不稳定的; 2. 三次结构的分支点是不稳定的; 四次结构分支点稳定性的必要条件是四次型  $A_{ijkl} a_i a_j a_k a_l$  非负, 充分条件是正定; 3. 三次结构在  $\lambda_c$  以上和以下都有后屈曲路径, 下降路径是不稳定的, 上升路径可能稳定也可能不稳定; 分支点稳定的四次结构, 后屈曲路径在  $\lambda_c$  以上, 至少有一条稳定路径; 分支点不稳定的四次结构, 后屈曲路径在  $\lambda_c$  以下, 都是不稳定的。可见后屈曲行为决定于分支点本身的稳定性。

如果结构有小几何缺陷  $u^0$ :

$$u^0 = \bar{a}_i u_i = \bar{\xi} l_i u_i \quad (10)$$

则这种缺陷也可以用  $n$  维空间的向量  $\bar{a}_i$  表示。如果  $\bar{l}_i = l_i$ , 即与屈曲方向一致, 则 (8) 变为

$$2(\lambda - \lambda_c) A'_{ij} a_j + \begin{cases} 3A_{ijkl} a_j a_k \\ 4A_{ijkl} a_j a_k a_l \end{cases} + 2\lambda A'_{ij} \bar{a}_i = 0 \quad (11)$$

(11) 的解  $a_i(\lambda)$  也与屈曲方向  $l_i$  一致。当完善结构有下降路径时, 缺陷引起的极值点  $\lambda_s$  为

$$\begin{aligned} \lambda_s / \lambda_c &= 1 - 2 \left( - \frac{\lambda_1(l)}{\lambda_c} \frac{\bar{\xi}}{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} && \text{三次结构 (当 } \lambda_1(l) \bar{\xi} < 0 \text{ 时)} \\ \lambda_s / \lambda_c &= 1 - 3 \left( - \frac{\lambda_2(l)}{\lambda_c} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\bar{\xi}}{2} \right)^{\frac{2}{3}} && \text{四次结构 (当 } \lambda_2(l) < 0 \text{ 时)} \end{aligned} \quad (12)$$

(12) 表明真实结构的极值点  $\lambda_s$  随缺陷幅度  $\bar{\xi}$  的加大而减小。当  $\bar{\xi} \rightarrow 0$  时,  $\lambda_s$  的降低速度  $d\lambda_s / d\bar{\xi}$  趋于无穷大 (图 3)。分支点不稳定的结构, 对缺陷非常敏感。

当结构有任意缺陷时, 分析比较复杂。Ho<sup>[16]</sup> 证明: 对于三次结构, 在缺陷幅度相同的情况下, 当缺陷方向  $\bar{l}_i$  与完善结构后屈曲方向中有最陡下降斜率的方向一致时, 对应于最低

的极值点。关于四次结构的类似定理,由于可能给出过于保守的估计,因而不太重要。结构的缺陷是随机函数,所以实际屈曲载荷也是随机的。Ho 的证明指出了影响最严重的缺陷形状,这一点在实际应用中特别重要。

Budiansky<sup>[14]</sup>等基于能量原理和虚功原理,给出渐近稳定理论的两种等价叙述,采用了更一般的泛函分析记号,使理论适用于更广泛的情况。例如除位能原理外,可以用其他极值原理,有时用混合型变分原理,以应力函数和法向位移为独立变量,分析板壳后屈曲更加方便。用虚功原理时则不要求找到问题所对应的泛函。Sewell<sup>[17]</sup>对于有限维系统,讨论了基本状态的高阶分支点接近最低分支点时的收敛性。证明渐近理论的正确范围不超过邻近的高阶分支点。

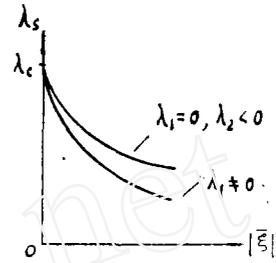


图 3

Koiter 渐近屈曲理论使复杂的后屈曲分析大大简化,尤其便于分析小初始缺陷的影响。所给出的结果,在渐近的意义上是精确的,它的适用范围一般不大,但对于研究缺陷敏感结构小初始缺陷的影响,可以给出很好的精度。

### III. 应用和发展

60年代初以来,包括 Koiter 在内的许多作者在渐近稳定理论方面做了大量工作。一方面是使理论更加完善,另一方面是推广和应用。下面着重讨论推广和应用方面的一些进展。

1. 典型结构的初始后屈曲分析 渐近理论首先用于一些典型结构,例如圆柱壳的轴压屈曲(Koiter 1945, 1963),圆柱曲板轴压屈曲(Koiter 1956),整球壳外压屈曲(Thompson 1964, Koiter 1969),圆柱壳侧压屈曲(Budiansky 等 1969)和扭转屈曲(Budiansky 1969)等等。这些分析往往只讨论屈曲前是薄膜状态及典型边界条件情况,一般采用解析法,着重分析缺陷影响。所得到的结果进一步验证了渐近理论的正确性和优点。

70年代以来,人们更感兴趣的是研究一些比较复杂的壳体和结构的后屈曲问题,例如考虑壳体非线性前屈曲状态和边界条件的影响,加筋结构屈曲模态的相互作用,复杂结构的承载能力等。涉及复杂问题时,渐近理论和有限元相结合的方法得到了发展。

2. 极值点屈曲的近似计算 当前屈曲状态必须考虑非线性时,出现极值点是可能的,这时前面介绍的渐近理论不再适用。在实际结构中,由于加强元件的限制作用,前屈曲状态的非线性一般并不十分严重,常常属于“中等非线性”情况。Haftka 等<sup>[18]</sup>把 Koiter 理论推广到有中等非线性前屈曲状态的极值点屈曲问题,这对于扩大渐近理论的应用范围是很有意义的。

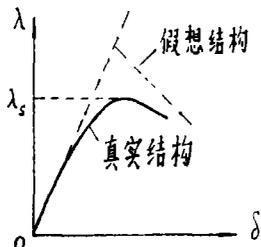


图 4

[18]认为,如果前屈曲非线性并不十分严重,那么屈曲行为应该比较接近某一个有线性前屈曲状态的假想结构的分支屈曲。因此实际结构的泛函  $\Pi$  应该与假想结构的泛函  $\bar{\Pi}$  相差不多,不难找到这样的假想结构泛函,并由  $\delta\bar{\Pi} = 0$  给出线性基本状态  $\lambda U_0$ ,而泛函差  $Q_1[U] = \Pi[U] - \bar{\Pi}[U]$  是小量。可以用渐近理论分析假想结构的后屈曲行为。因为  $\Pi = \bar{\Pi} + Q_1$ ,  $Q_1$  相当于假想结构的“缺陷”,称为固有缺陷。所以真实结

构相当于带固有缺陷的假想结构，很容易确定它的极值点 $\lambda_s$ 。

3. 屈曲形态的相互作用 某些结构（例如圆柱壳的轴压屈曲）在同一临界载荷下存在多个屈曲形态是不可避免的，另一些结构（如加筋结构），为了减轻重量，常常人为地使局部屈曲载荷与总体屈曲载荷相等或接近，因此多模态屈曲是常见的。多模态屈曲时，模态相互作用使结构缺陷敏感度增加，实际承载能力下降，在屈曲优化分析中是应该注意的问题。近10多年来，对模态相互作用进行了许多研究。

在同一临界载荷下考虑多模态的相互作用，其实就是一般理论在多模态屈曲问题中的具体应用。当高阶分支点接近第一分支点时，必须考虑高阶屈曲形态的影响，一般理论需要加以修正，(11)应改成

$$2(\lambda - \lambda_{(i)})A'_{i,j}a_j + \frac{3}{4} \frac{A_{i,j}a_j a_k}{A_{i,j}a_j a_k a_l} + 2\lambda A'_{i,j}\bar{a}_j = 0 \quad (13)$$

式中 $\lambda_{(i)}$ 是第 $i$ 个临界载荷， $(i)$ 表示非求和指标。

Neut<sup>[19]</sup>第一次分析了受轴压筒化薄壁支柱的总体和局部屈曲模态的相互作用，指出尽管单独的局部屈曲和总体屈曲都是稳定平衡，但当两者同时发生或接近同时发生时变为不稳定平衡，结构变得对缺陷敏感。Thompson等<sup>[20]</sup>指出，优化条件要求局部屈曲载荷高于总体屈曲载荷。

此后，对于加筋板壳的模态相互作用问题，一直受到重视<sup>[21-24]</sup>。[24]研究了纵向加筋圆柱壳轴压总体屈曲和局部屈曲的相互作用，方程(13)为

$$\left. \begin{aligned} (1 - \lambda/\lambda_{(1)})a_1 + b_{11}a_1^2 + b_{12}a_1a_2 &= \bar{a}_1(\lambda/\lambda_{(1)}) \\ (1 - \lambda/\lambda_{(2)})a_2 + b_{21}a_1a_2 + b_{22}a_2^2 &= \bar{a}_2(\lambda/\lambda_{(2)}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

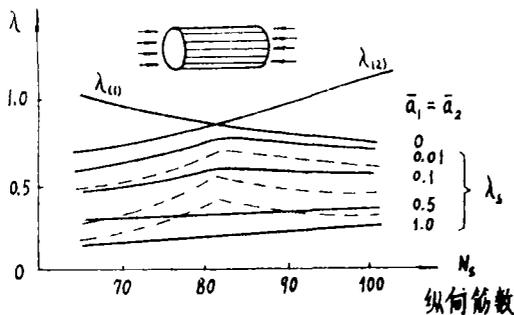


图 5

式中 $a_1, a_2, \lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$ 是总体和局部屈曲的幅度和临界载荷， $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ 是形状同总体和局部屈曲形态相同的缺陷幅度， $b_{ij}$ 是已知系数。 $b_{11}$ 和 $b_{22}$ 分别只同总体和局部屈曲有关， $b_{12}$ 和 $b_{21}$ 同时与两者有关，反映了两种屈曲形态的相互作用。

图5是一组典型结果。实线考虑了相互作用，虚线未考虑相互作用。可见相互作用使缺陷的影响加大，极值点 $\lambda_s$ 降低，在 $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)}$ 附近下降最多，但两者相等仍不偏离最佳。

4. 渐近理论的有限元法 为了用渐近理论分析比较复杂的问题，许多文献采用有限元法。例如Lang<sup>[25]</sup>，Mau和Gallagher<sup>[26]</sup>以及Carnoy<sup>[27]</sup>等等。

[27]利用了Haftka的概念，可以研究非线性前屈曲状态的分支点和极值点，在近似位能表达式中保留了更多小项，还考虑了高阶屈曲形态的影响，用迭代步骤合理地选择所考虑的屈曲形态，用位能的主要余项作为误差来控制结果的可靠性。算例表明，屈曲形态的相互作用，对结构后屈曲行为的影响极大。Haftka的近似方法对于中等非线性前屈曲状态，可以给出比较精确的极值点或分支点，临界点以后路径的可靠性，受所选择的模态影响，利用

余项控制误差可以给出比较满意的结果。与一般非线性数值计算（例如增量法）相比，这种方法的突出优点是可以大大节省机时，尤其便于讨论缺陷影响，既经济又比较有效。因此，把渐近理论和有限元结合起来分析复杂结构的后屈曲行为是合适的，但目前这方面工作还很不充分。

5. 弹塑性后屈曲的渐近理论 上面讨论的 Koiter 理论，只适用于弹性系统。Hutchinson<sup>[28,29]</sup> 把渐近理论推广到弹塑性初始后屈曲。塑性屈曲和弹性屈曲有很多本质区别。Shanley 在研究压杆塑性屈曲时指出，分支点与屈曲引起的卸载区有关，在一定范围内变化，整个截面只有中性加载点（无卸载区）时对应于最低分支点。Hill 把这种全面加载的概念用于三维弹性体，建立了塑性屈曲分支准则。塑性屈曲发生后，开始时载荷稍有升高，平衡是稳定的，但很快达到极值点，接着载荷下降，变为不稳定平衡。Hutchinson 认为，由于后屈曲路径的极值点与分支点比较接近，在分支点处的摄动分析，有可能讨论塑性后屈曲分支上极值点处的行为和缺陷影响。[28] 从 Hill 规定的分支点出发，利用与 Koiter 相似的方法，分析了塑性初始后屈曲行为，对于完善结构给出

$$\lambda = \lambda_c + \lambda_1 \xi + \lambda_2 \xi^{1+\beta} + \dots \quad (15)$$

其中  $\xi (>0)$  是位移幅度，系数  $\lambda_1 > 0$ ， $\lambda_2 < 0$ ， $0 < \beta < 1$ 。

图 6 给出完善结构和有缺陷结构的平衡路径。分析表明，在分支点处卸载区的增长速度是无限大，以后逐渐减小，从而使后屈曲路径开始时上升以后下降。目前在塑性屈曲研究中，还有许多问题有待进一步解决。

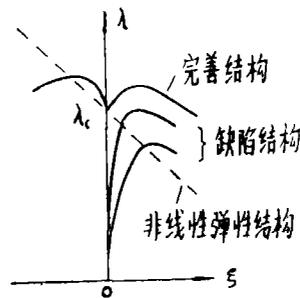


图 6

Budiansky 和 Hutchinson<sup>[30]</sup> 还把 Koiter 理论推广到动力屈曲。

#### IV. 结束语

近 20 年来，在结构屈曲研究中，无论是 Koiter 渐近理论还是一般非线性理论以及它们的应用，都取得了重要进展。但是应该看到，理论研究的进展与工程应用之间还有一定距离。目前在结构设计中，包括象飞机这样的轻结构设计中，与强度分析相比较，稳定性分析还比较落后，有效的稳定分析程序远不如应力分析程序那样普及，因此加强工程应用研究是很需要的。在屈曲理论的实际应用中，还有许多问题应该进一步研究，为了解决这些问题，Koiter 理论是很重要的。例如，

1. 缺陷影响问题<sup>[8]</sup> 已经肯定缺陷是影响屈曲的主要因素，但实际结构的缺陷无论大小还是形状都是随机的，合理的方法可能是通过对缺陷的统计分析，确定结构在工作载荷下的破坏概率。可惜这方面研究的进展很慢。然而，精确测量实际结构的缺陷是很困难的，而且未必有必要这样做。有时还会在使用中产生新的缺陷，而且有任意缺陷的结构后屈曲，分析很复杂。看来，目前在实际应用中比较有效的方法，仍然是考虑与屈曲形态一致的缺陷，给出偏于保守的结果。如前所述，利用 Koiter 理论讨论这种缺陷的影响是特别方便的。

2. 复杂结构的弹性后屈曲 在结构设计中，特别是复杂薄壁结构设计中，弹性后屈曲（包括模态的相互作用）常常是必须考虑的问题。现在已经出现一些大型通用非线性分析程

序,但用于复杂结构时,由于花费太大往往受到限制。特别是在初步设计阶段,简单、迅速又有一定精度的方法是受欢迎的。这正是 Koiter 理论的优点。所以,在复杂结构后屈曲分析中,应用各种简化方法,包括 Koiter 理论在内,是有意义的。为了缩小计算规模,常把结构化为部件来计算,因此确定边界条件和连接方式对屈曲的影响很重要,这种影响通常十分显著。

3. 确定承载能力 某些结构的最低分支点是稳定平衡,屈曲以后仍有很大承载能力,有的发生二次屈曲。确定承载能力是设计人员关心的问题,但是很复杂,常常必须讨论塑性屈曲,而塑性屈曲还没有完全搞清楚。如果屈曲后仍然在弹性范围内,可以用精确的一次后屈曲路径作为基本状态,用 Koiter 理论研究二次后屈曲<sup>[10]</sup>。在大型桁架的后屈曲分析中,[31]利用杆件的后屈曲特性,确定整个结构的承载能力,这是一种比较简单的方法。

### 参 考 文 献

- 1 Bushnell D., Buckling of shells-pitfall for designers, *AIAA J.*, **19**, 9 (1981): 1183-1226.
- 2 Bessling J. F., Postbuckling and nonlinear analysis by the finite element method as a supplement to a linear analysis, *ZAMM*, **55**, 4 (1975): T3-T16.
- 3 Koiter W. T., On the stability of elastic equilibrium, Dissertation, Delft, Holland (1945) (亦见 NASA TT F-10, 833 (1967))。
- 4 Fung Y. C., Sechler E. E., Instability of thin elastic shells, *Structural Mechanics, Proc. 1st Symp. Naval Structural Mech.*, edited by J. N. Goodier and N. J. Hoff, Pergamon Press (1960): 115 (亦见力学译丛, 2 (1964))。
- 5 Hutchinson, J. W., Koiter, W. T., Postbuckling theory, *Appl. Mech. Rev.*, **23**, 12 (1970): 1353-1366.
- 6 周承嗣, 薄壳弹塑性稳定理论, 国防工业出版社 (1979)。
- 7 中国科学院力学研究所固体力学研究室板壳组, 加筋圆柱曲板与圆柱壳, 科学出版社 (1983)。
- 8 黄玉盈, 金梦石, 雷国瓌, 弹性后屈曲理论及其发展趋势, *固体力学学报*, 3 (1981): 397-408.
- 9 Uemura M., Byon O., Secondary buckling of flat plate under uniaxial compression, Part I: Theoretical analysis of simply supported flat plate, *Int. J. Non-linear Mech.*, **12**, 6 (1977): 355-370. Part II: Analysis of clamped plate by F. E. M. and comparison with experiments, *ibid*, **13**, 1 (1978): 1-14.
- 10 Nakamura T., Uetani K., The secondary buckling and post-secondary-buckling behaviours of rectangular plates, *Int. J. Mech. Sci.*, **21**, 5 (1979): 265-286.
- 11 Koiter W.T., Elastic stability and post-buckling behaviour, *Proc. Symp. on Non-linear Problems, April 30-May 2, 1962, Univ. of Wisconsin, Madison (Madison, Wisc. U.S.A., (1963))*: 257-275.
- 12 —, Current trends in the theory of buckling, *Proc. IUTAM Symp. on Buckling of Structures, June 17-21, 1974. Buckling of Structures*, edited by B. Budiansky (1976): 1-16.
- 13 —, General theory of shell stability, *Thin Shell Theory: New Trends and Applications*, edited by W. Olszak (1980): 65-87.
- 14 Budiansky B., Theory of buckling and post-buckling behaviour of elastic structures, *Adv. in Appl. Mech.*, **14** (1974): 1-65.
- 15 Thompson J. M. T., A general theory for the equilibrium and stability of discrete conservative systems, *ZAMP*, **20** (1969): 797-846.
- 16 Ho D., Buckling load of non-linear systems with multiple eigenvalues, *Int. J. Solids Structures*, **10** (1974): 1315-1330.
- 17 Sewell M. J., A method of post-buckling analysis, *J. Mech. Phys. Solids*, **17** (1969): 219-233.
- 18 Haftka R. T., Mallett R. H., Nachfar W., Adaption of Koiter's method to finite element analysis of snap-through buckling behaviour, *Int. J. Solids Structures*, **7** (1971): 1427-1445.
- 19 Van der Neut A., The interaction of local buckling and column failure of thin-walled compression members, *Proc. XII Int. Cong. Appl. Mech., Stanford, Berlin, Heidelberg, New York, Springer (1968)*,

- 20 Thompson J. M. T., Lewis G. M., On the optimum design of thin-walled compression members, *J. Mech. Phys. Solids*, **20** (1972): 101—109.
- 21 Van der Neut A., Mode interaction with stiffened panels, Proc. IUTAM Symposium on Buckling of Structures. June 17—21, 1974. *Buckling of Structures*, edited by B. Budiansky, (1976): 117.
- 22 Koiter W. T., Pignataro M., An alternative approach to the interaction between local and overall buckling in stiffened panels, *ibid*: 133—148.
- 23 Thompson J. M. T., Tulk J. D., Walker A. C., An experimental study of imperfection-sensitivity in the interactive buckling of stiffened plates, *ibid*: 149—159.
- 24 Byskov E., Hutchinson J. W., Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells, *AAAJ*, **15**, 7 (1977): 941—948.
- 25 Lang T. E., Post-buckling response of structures using the finite element method. Ph.D. Thesis, Univ. of Washington, Seattle, Washington (1969).
- 26 Mau S. T., Gallagher R. H., A finite element procedure for non-linear prebuckling and initial post-buckling analysis, NASA CR-1936 (Jan. 1972).
- 27 Carnoy E., Postbuckling analysis of elastic structures by the finite element method, *Computer Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, **23** (1980): 143—174.
- 28 Hutchinson J. W., Post-buckling behaviour in the plastic range, *J. Mech. Phys. Solids*, **21** (1973): 163—190.
- 29 —, Imperfection-sensitivity in the plastic range, *ibid*, **21** (1973): 191—204.
- 30 Budiansky B., Hutchinson J. W., Dynamic buckling of imperfection-sensitive structures, Proc. XI Int. Cong. Appl. Mech., Munich, 1964, Springer-Verlag, Berlin (1966): 636—651.
- 31 Schmidt L. C., Gregg B. M., A method for space truss analysis in the post-buckling range, *Int. J. Numer. Meth. in Eng.*, **15**, 2 (1980): 237—247.

## THE KOITER'S STABILITY THEORY AND ITS APPLICATION

Huang Bao-zong

Ren Wen-ming

(Northeastern Institute of Technology)

(Qinghua University)

**Abstract** This paper introduces the Koiter's stability theory, its basic features, applications and its development. The importance and prospect of this theory in the study of structure buckling are also discussed.

**Keywords** *Koiter's stability theory; initial post-buckling*

(上接第 109 页)

线性 Voigt 模型的微分方程, 从而可以用初等振动理论教科书的普通方法来处理。相应地, 方程 (7) 化为粘性阻尼的单自由度系统的频率-响应曲线, 而方程 (16) 和 (17) 则化为同样系统的熟悉的对数递减函数。

为了利用公式 (7)~(25) 来设计整件货物底层中的装运箱并保护农产品不受瞬态冲击输入和持续不断振动的作用, 设计人员必须知道现有系统的恢复参数  $K_0$  和  $r$ , 耗散参数  $D$  和  $\alpha$ 。理论上, 应当在整件货物的实际装运和装卸环境中的装运箱上安装一些仪器来收集数据, 以获得上述这些参数。很可惜, 现有的这种数据还非常之少。利用另外的一些方法, 可以使用 Peleg (1981, 1984b) 所述的实验室试验来获得恢复参数和耗散参数的估计值。

(未完待续)

董务民 钱民全译自; *J. Biomechanics*, **18**, 11 (1985); 843—862,