

柔韧构件研究的新进展*

叶开沅

(兰州大学)

摘要 本文在[1]的基础上,总结和评述了我们近几年来在柔韧构件的研究方面所取得的一系列新的突破性工作。

关键词 柔韧构件;板;壳

1. 引言

薄板和薄壳的非线性大变形问题已越来越引起人们的重视。即将于1988年在法国召开的第17届国际理论与应用力学大会(ICTAM),将大变形问题定为该次会议三大重点方向之首,就足见其重要性。我们知道,柔韧构件的研究是在近代工业发展的推动下进行的。如在航天、航空、仪表元件、建筑和海洋工程等领域均广泛采用了柔韧构件,而描述这类问题的非线性方程^[2,3],其求解工作在数学上困难很大。因此,如何求解这些方程,就成为决定这类问题的关键。多年来,人们采用了各种方法,试图找出精度较好的解。我国力学工作者在这方面做了大量的工作,其中有的已在国际上居领先地位。[1]对中国学者在此领域的主要贡献,总结了下列八点:

1. 钱伟长^[4,5]的两篇文章奠定了中国研究柔韧板和柔韧壳的基础,使合理求解这类问题的非线性方程成为可能。[4]在国际上称为钱伟长法。[5]是奇异摄动法边界层理论的先驱。

2. 在理论联系实际方面,我国力学工作者在研究柔韧构件的基本理论的同时,注意了解决生产实际中的大量有用的问题,提供了可供生产直接应用的公式和图表,理论给生产以很大的指导。这些问题便是Вольмир^[36]在他的书《柔韧板和柔韧壳》中所提出的“迫切需要解决的问题”。

3. 叶开沅和刘人怀^[6]提出的修正迭代法,改进了摄动法的计算程序。其计算简单,经过多次检验,与实验和精确解比较,可以肯定是正确的,并且效果良好。

4. 叶开沅和顾淑贤^[7]将解析解和电子计算机计算相结合提出了解析电算法,解决了求解高次修正迭代解及摄动解的计算困难,实现了在人工推演下无法得到的高阶解的求解。

* 中国科学院国家科学基金资助课题。

只要计算机有足够的容量, 所得结果的精度可以满足人们所希冀的。

5. 陈山林和光积昌^[8] 对如何选择圆板大挠度问题的摄动参数, 提供了一个全面的总结, 并指出在各种摄动参数中, 仍以中心挠度为最好, 从而澄清了有关这方面的学术争论。

6. 黄黔^[9] 在讨论复合载荷圆薄板大挠度问题时, 用平均挠角作为摄动参数, 处理了胡海昌提出的中心挠度在某种复合载荷情况下不能作为摄动参数这一问题。

7. 摄动法和修正迭代法的收敛性问题, 是人们长期以来希望解决而难以解决的问题。陈山林^[10] 提出了 n 次摄动解的一般表达式, 对摄动解的渐近性进行了讨论。

8. 刘人怀^[11,12] 成功地解决了双层金属中心开孔扁壳的非线性热稳定问题。这是热敏弹性元件的重要问题。

下面简要介绍我们兰州大学近年来一系列新的柔韧构件研究的成果。

II. 关于集中载荷下圆板大挠度问题的精确解及其收敛性

对于 Karman 方程的求解, 常用的解析方法有: 幂级数法, 摄动法和修正迭代法等。然而, 这些方法的收敛性如何, 虽一直为人们所注意, 但因其难度大而很少进展。[13]曾讨论过圆板受均布载荷作用时, Karman 方程以载荷为参数的逐次迭代法的收敛性, 为该文进行差分迭代求解提供了理论保证。长期以来, 用于求解板壳非线性问题中仅有的一类级数解——Way^[14] 提出的幂级数解, 虽然一直被认为是精确解, 但其收敛性迄今未能从理论上明确给出。

叶开沅、郑晓静和周又和^[15] 得到了中心受集中载荷圆板大挠度问题的精确解的解析式和收敛性的证明。其方法是先将无量纲的 Karman 方程用格林函数法化为如下的积分方程:

$$\varphi(y) = - \int_0^1 K(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \varphi(\xi) S(\xi) d\xi + \varphi_1(y) \quad (2.1a)$$

$$S(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 G(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \varphi^2(\xi) d\xi, \quad y \in [0, 1] \quad (2.1b)$$

其中 $\varphi_1(y)$ 为相应问题的线性解。对集中载荷有

$$\varphi_1(y) = p(y \ln y - \lambda y) \quad (2.1c)$$

λ 为与边界条件有关的参量, $K(y, \xi)$, $G(y, \xi)$ 为核函数。

文中引入一个解空间 $A = \{y^\alpha f(y) \mid \alpha > 1/2, f(y) \in C_0[0, 1]\}$ 。于是, 证明了当 $\varphi(y) \in A$, $S(y) \in A$ 时, (2.1) 与 Karman 方程的边值问题等价。在取迭代格式

$$\varphi_{n+1}(y) = - \int_0^1 K(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \varphi_n(\xi) S_n(\xi) d\xi + \varphi_1(y) \quad (2.2a)$$

$$S_n(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 G(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \varphi_n^2(\xi) d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2b)$$

后, 得到关于迭代函数序列 $\{\varphi_n(y)\}$ 和 $\{S_n(y)\}$ 的结论如下:

1. 对于任意正整数 n , 其迭代解的函数结构为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(y) &= \sum_{i=1}^{3^{n-1}} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(n)} y^i \ln^j y \\ S_n(y) &= \sum_{i=1}^{2 \times 3^{n-1}} \sum_{j=0}^i B_{ij}^{(n)} y^i \ln^j y \end{aligned} \right\} y \in [0, 1] \quad (2.3a)$$

$$(2.3b)$$

显然, (2.3) 在 $[0, 1]$ 上连续且属于 A . 这里, $A_i^{(n)}$, $B_i^{(n)}$ 可由 $\varphi_1(y)$ 的系数递推得到.

2. 对于任意的 n , 当 $p < p_{\min} = \min_{y \in [0, 1]} \left| \frac{y \ln y - \lambda y}{E(y)} \right|^{1/2}$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(y) \leq \varphi_n(y) \leq 0 \\ 0 \leq S_n(y) \leq S_1(y) \end{aligned} \right\}, y \in [0, 1]. \quad (2.4a)$$

$$(2.4b)$$

这里

$$E(y) = \int_0^1 K(y, \xi) - \frac{1}{\xi^2} \varphi_1^*(\xi) S_1^*(\xi) d\xi$$

$$\varphi_1^*(y) = \frac{1}{p} \varphi(y) = y \ln y - \lambda y, \quad S_1^*(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 G(y, \xi) - \frac{1}{\xi^2} \varphi_1^*(\xi) d\xi$$

取最大值范数后, 有

3. 设

$$M = \left\| \int_0^1 K(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} [\varphi_1^*(\xi)] \int_0^1 G(\xi, \eta) \frac{1}{\eta^2} \varphi_1^*(\eta) d\eta + S_1^*(\xi) \right\| d\xi$$

当 $p < \min(p_{\min}, 1/\sqrt{M})$ 时, 有函数序列 $\{\varphi_n(y)\}$ 和 $\{S_n(y)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 且极限函数属于 A .

于是, 得到中心受集中载荷作用的圆薄板非线性弯曲问题的精确解的解析式为

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i A_{i,j} y^i \ln^j y \quad (2.5a)$$

$$S(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i B_{i,j} y^i \ln^j y \quad (2.5b)$$

它们在 $[0, 1]$ 上一致收敛、连续且属于 A , 因而, 解满足原边值问题.

叶开沅、郑晓静和王新志^[10] 利用 (2.5) 的精确解形式, 计算了这一问题. 将 (2.5) 代入原边值问题后, 可以得到确定系数的递推公式为

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= p, \quad B_{11} = 0 \\ A_{ij} &= \frac{1}{i(i-1)} \left[\sum_{l=1}^{i-1} \sum_{k=0}^j A_{i-l, j-k} B_{lk} - (j+1)(2i-1) - (j+1)(j+2) A_{i, j+2} \right] \\ B_{ij} &= \frac{1}{i(i-1)} \left[-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{k=0}^j A_{i-l, j-k} A_{lk} - (j+1)(2i-1) B_{i, j+1} - (j+1)(j+2) B_{i, j+2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

显然, 只有 A_{10}, B_{10} 为独立待定常数. 由 $y=1$ 的边界条件有

$$\sum_{i=1}^{\infty} [A_{i0}(\lambda - 1 - i\lambda A_{i1})] = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} [B_{i0}(\mu - 1 - \mu i) - \mu B_{i-1}] = 0 \quad (2.7)$$

其中 μ 为另一与边界条件有关的参数. 由 (2.6), (2.7) 即可确定 A_{10}, B_{10} . 而 $y=0$ 处的边界条件已由解 (2.5) 自动满足. 于是, 用牛顿法求解 (2.7), 可得到在给定的 p 下的 A_{10}, B_{10} . 然后由 (2.6) 就可得到全部待定系数, 从而, 可得到问题的精确解的全部所需的计算结果. 这些结果不仅可直接用于生产实际, 而且也为研究各种近似方法的渐近性提供了

依据。

附带指出,对于均布载荷情形,与[15]类似,在构造出迭代解的函数结构式后,再由[13]的收敛性证明,便可得到 Way 幂级数解在 $[0,1]$ 上一致收敛且连续。从而保证了 Way 幂级数解展开的合理性。

III. 关于摄动法及修正迭代法的收敛性问题

摄动法和修正迭代法,在板壳大挠度理论中已是广为使用的有效方法,然而在讨论结果的可靠程度时,却往往根据有限的几次低阶近似解的渐近性来判断。同时,也需耗费大量的人工推演时间(尤其是求高阶解时)。因而,难以满足理论研究的需要。[17]讨论过环形板受均布载荷下的非线性弯曲问题的以载荷为参数的小参数法的适用范围。但这范围的确定依赖于预先人为选取的优函数。[10]用权余法讨论过钱氏解的渐近特性。

叶开沅、周又和^[18]得到了受集中载荷圆薄板的 Karman 方程任意阶摄动解的解析函数结构为

$$\varphi_n(y) = \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(n)} y^i \ln^j y, \quad S_n(y) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^i B_{ij}^{(n)} y^i \ln^j y$$

其系数递推工作可由计算机完成。这样,可由计算机求解高阶摄动解,大大减轻了繁冗的人工推演。从各次高阶摄动解出发,就可研究摄动解的收敛域和渐近特性。文中给出了钱氏解的第 21 阶摄动解,详细讨论了钱氏解的收敛域和渐近特性后,得到:当 $W_m \leq 2.7$ 时,钱氏解收敛;而 $W_m \geq 3.6$ 时,可得关于计算无量纲化的载荷 p 的两个子序列,它们分别朝两个相反方向增加而发散,故解在此域内不收敛。且这时由计算得到的第 21 阶钱氏解出现中心下凹现象。这表明解出现下凹,是由于钱氏解此时不收敛所致,并非问题本身所具有。

郑晓静、周又和^[19]将解析电算法用于求解中心受集中载荷作用的圆板大挠度问题的迭代解,给出了从积分方程出发求解系数的递推公式的计算程序。与原来的解析电算法相比,其计算中少一层嵌套的求和号。从而可节省很多计算时间,同时文中给出了该算法的收敛上界,这有助于减少计算的盲目性。

周又和、郑晓静在[20],[21]中分别论证了圆薄板 Vincent 摄动解和钱氏摄动解同逐次迭代解及修正迭代解之间的关系,给出了求解高阶迭代解(含修正迭代解)的特征关系解析式的计算方法。这样,可减少重复计算。同时,得到了摄动解与对应的迭代解的收敛域是一致的。从而由逐次迭代解的收敛性和收敛上界,可得到 Vincent 摄动解的收敛性和收敛上界。如对于集中载荷情形,在 $\nu=0.3$ 时,由[19]得到固定夹紧圆板的逐次迭代解和 Vincent 摄动解的收敛上界为 $p_{max}=2.87$ 。而由[18]得,钱氏摄动解在 $W_m \leq 2.7$, 此时有 $p \leq 5.56$ 。显然,由上述结论得:钱氏摄动解和修正迭代解在此域内收敛。因而钱氏摄动解和修正迭代解的收敛域较 Vincent 解和逐次迭代解为大。从而可见钱氏解和修正迭代解较之后二者收敛快。同时,由钱氏解和修正迭代解的关系得到了任一 n 阶的摄动解总是对应阶次的修正迭代解的部分和,而两者的极限函数是殊途同归,故得到修正迭代解收敛较钱氏解快。

IV. 复合载荷下的圆板大挠度问题

受均布和中心集中载荷作用的圆薄板大挠度问题,不仅具有很强的工程背景,如:仪表

工业中的弹性元件——膜盒，特别是力平衡式仪表，均可抽象成这一问题；同时它又是一个典型的理论问题，即以中心挠度为参数的钱氏摄动解在中心挠度为零时失效。胡海昌^[22]最早提出这个问题，并用双载荷和双位移为摄动参数分别求解这一问题。前者结果不理想，后者计算太繁而未能给出具体结果。黄黔^[9]后来引入单一载荷参数后，用平均挠角为摄动参数求解了这一问题。郑晓静、周又和^[23]求得了该问题的精确解的解析式及其收敛式的证明。此时由于线性解 $\varphi_1^*(y)$ 在 $[0, 1]$ 上已不恒小于或等于零。即有

$$\varphi_1^*(y) = \left[-\frac{\bar{\beta}}{2}(\lambda+1) + \bar{\alpha}\lambda \right] y - \bar{\alpha}y \ln y + \frac{\bar{\beta}}{2}y^2 \quad (4.1)$$

其中 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 为相应于集中载荷和均布载荷的参量。在取 (2.2) 的迭代格式后，可得类似于 (2.3) 的函数序列的解析式。而此时因 (4.1) 在 $[0, 1]$ 内不满足 $\varphi_1^*(y) \leq 0$ 。故不再有 (2.4) 不等式，故第二节中关于收敛性的证明方式需作改进，得出以下的结论：

当 $p < p_{max} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C}{3}} / \|\Phi_1^*\|$ 时，有

1. 对任意 n ，有 $\|\Phi_n\| < \sqrt{1/3C}$ 成立。
2. 函数序列 $\{\varphi_n(y)\}$ 和 $\{S_n(y)\}$ 在 $[0, 1]$ 内一致收敛、连续且属于 A 。这里有

$$\Phi_n(y) = y^\alpha \varphi_n(y), \quad n = 1, 2, \dots, 1/2 < \alpha < 1$$

$$C = \left\| \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\mu-1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha-1} \right) \left(\frac{\lambda-1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha} \right) + \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha-1} \right) \left(\frac{\lambda-1}{3\alpha} + \frac{1}{3\alpha-1} \right) \right] y^{1-\alpha} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha-1} \right) \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha} \right) y + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha-1} \right) \left(\frac{1}{3\alpha} - \frac{1}{3\alpha-1} \right) y^{2\alpha} \right\|$$

于是，得到精确解的解析式为

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i A_{ij} y^i \ln^j y, \quad S(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i B_{ij} y^i \ln^j y$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛、连续且属于 A 。将上式代入原边值问题中可得确定系数的递推公式

$$A_{11} = -Q\bar{\alpha}; \quad B_{11} = 0; \quad A_{22} = 0; \quad A_{21} = \frac{1}{2}A_{10}B_{10}$$

$$A_{20} = \frac{1}{2}A_{10}B_{10} + \frac{1}{2}Q\bar{\beta} - \frac{3}{2}A_{21}; \quad B_{22} = -\frac{1}{4}A_{11}^2$$

$$B_{21} = -\frac{1}{2}A_{11}A_{10} - 3B_{22}; \quad B_{20} = -\frac{1}{4}A_{10}^2 - \frac{3}{2}B_{21} - B_{22}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{i(i-1)} \left[\sum_{l=1}^{i-1} \sum_{k=0}^j A_{i-l, j-k} B_{lk} - (j+1)(2i-1)A_{i, j+1} - (j+1)(j+2)A_{i, j+2} \right]$$

$$B_{ij} = \frac{1}{i(i-1)} \left[-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{k=0}^j A_{i-l, j-k} A_{lk} - (j+1)(2i-1)B_{i, j+1} - (j+1)(j+2)A_{i, j+2} \right]$$

$$(i = 3, 4, \dots; j = 0, 1, \dots, i)$$

其中 A_{10} 和 B_{10} 为独立常数。由 $y=1$ 处的边界条件有

$$\sum_{i=1}^{\infty} [A_{i0}(\lambda-1-i\lambda) - \lambda A_{i1}] = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} [B_{i0}(\mu-1-i\mu) - \mu_{i1}] = 0$$

同样，用牛顿法可求出 A_{10}, B_{10} ，从而得到在给定载荷时，问题的精确解的结果。

该文对中心挠度为零的情形进行了具体计算，采用了具有与实际物理意义相联系的割线法，求出中心挠度为零时对应的中心支座约束反力（即未知的集中力），从而可节省计算机时。文中结果表明：以平均挠度为摄动参数的摄动解在 $p \leq 8.5$ 时，其相对误差不超过 5%，此时，对应的 ϵ （即摄动参数）满足 $\epsilon \leq 0.25$ 。此后，随着载荷值的增大，关于摄动解的相对误差随之增大。

V. 弹性基础上的圆板大挠度问题

关于弹性地基圆板的大挠度问题，已有很多文章研究。其中不少作者认为：由于 Karman 方程的非线性和耦合性使问题难于求解，因而往往是从 Berger 方程出发讨论这一问题^[24]。[25,26] 认为 Karman 方程难以获得精确解，而用 Bessel 函数或 Chebyshev 多项式近似求解。郑晓静、原又和^[27] 得到了弹性基础上受集中载荷作用的圆板大挠度问题的精确解。其边值问题可化为如下无量纲化的积分方程：

$$y \frac{dW}{dy} = - \int_0^1 K(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} S(\xi) \frac{dW}{d\xi} d\xi + \int_0^1 K(y, \xi) \phi(\xi) d\xi + \varphi_1(y)$$

$$S(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 G(y, \xi) \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 d\xi, \quad y \in [0, 1]$$

这里

$$\phi(y) = \frac{\bar{k}}{y} \int_0^y W(x) dx$$

\bar{k} 为 Winkler 型弹性地基的无量纲化弹性常数。对集中载荷，有

$$\varphi_1(y) = py(\ln y - \lambda)$$

取类似于 (2.2) 的迭代格式后，得到：

1. 对于任意的 n ，迭代函数序列 $\{W_n(y)\}$ 和 $\{S_n(y)\}$ 的函数结构为

$$W_n(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(n)} y^i \ln^j y, \quad S_n(y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^{n-1} B_{ij}^{(n)} y^i \ln^j y$$

在 $y \in [0, 1]$ 上连续，且属于 A 。

2. 当 $\bar{k} < \frac{36}{12\lambda + 7}$ 和 $p \leq p_1 = \min_{0 \leq y \leq 1} \sqrt{\frac{-[F^*(y) + \varphi_1^*(y)]}{A^*(y)}}$ 时，有

$$\varphi_1(y) \leq y(dW_n/dy) \leq 0; \quad 0 \leq S_n(y) \leq S_1(y); \quad 0 \leq W_n(y) \leq W_1(y)$$

成立。这里

$$F^*(y) = \bar{k} \int_0^1 K(y, \xi) \frac{1}{\xi} \int_0^\xi W_1^*(x) dx d\xi, \quad \varphi_1^*(y) = y \frac{dW_1^*}{dy}$$

$$A^*(y) = - \int_0^1 K(y, \xi) \frac{1}{\xi} S_1^*(\xi) \frac{dW_1^*}{d\xi} d\xi$$

3. 当 $\|p^2 H^*(y) + k I^*(y)\| < 1$ 和第 2 条中条件成立时, 有函数序列 $\{q_n(y)\}$ 和 $\{S_n(y)\}$ 在 $[0, 1]$ 内一致收敛. 且极限函数在 $[0, 1]$ 上连续且属于 A .

于是, 得到问题的精确解的解析式为

$$W(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i A_{i,j} y^i \ln^j y, \quad S(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i B_{i,j} y^i \ln^j y$$

这里的 $H^*(y)$ 和 $I^*(y)$ 是预先取定的函数. 同理, 将上式代入原边值问题中, 便可得到确定系数的代数方程. 文中采用了牛顿法和割线法, 求解了 $k = 1.5$ 情形的大挠度解, 并讨论了级数的收敛速度等, 其结果可用于工程实际.

VI. 轴对称扁球壳大挠度问题解的解析结构

[28], [29] 分别给出了受任意载荷作用的圆底扁球壳和中心开孔圆底扁球壳的轴对称大挠度问题的 Karman 方程逐次迭代解的收敛性. 在 [29] 中, 通过构造逐次迭代解的函数结构后, 得到了一些常见载荷作用下问题的精确解. 归纳为以下几种:

1. 圆底扁球壳 (或圆板) 受多项式载荷 (包含均布载荷)、或外边缘均布弯矩以及这些载荷的联合作用时, 其精确解的解析式为

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i y^i, \quad S(y) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i y^i, \quad y \in [0, 1]$$

2. 圆底扁球壳 (或圆板) 在中心受有集中力或其与第 1 条中载荷联合作用时, 其精确解的函数结构式为

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i A_{i,j} y^i \ln^j y, \quad S(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i B_{i,j} y^i \ln^j y, \quad y \in [0, 1]$$

3. 环板或中心开孔的圆底扁球壳, 其解的形式为

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{i,j} y^i \ln^j y, \quad S(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} B_{i,j} y^i \ln^j y, \quad y \in [0, 1]$$

4. 不连续载荷 (如板内某一部分受均布载荷、线布载荷等) 作用下的圆底扁球壳 (或圆板), 设在 $y = \alpha$ 处, 载荷跳跃, 则得: 在 $[0, \alpha]$ 内得到圆板或圆底扁球壳部分受对应载荷作用下的解的函数结构; 在 $[\alpha, 1]$ 内则得环板或中心开孔的圆底扁球壳的解的函数结构.

上述所有解在区域内一致收敛且连续. 从而解决了这些级数的收敛性证明和各种情形下的解应具有函数结构式. 澄清了一些关于函数结构形式的猜测. 如 Schmidt^[30] 曾认为均布载荷的圆板, 其解的结构为 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i y^i$, 中心受集中载荷作用时, 则为 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{i,j} y^i \ln^j y$, 而环板则为 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \ln^i y$. 显然, 后两者是不准确的.

VII. 旋转扁壳的轴对称非线性弯曲和稳定性

薄壳的非线性分析是板壳弹性理论中的一个重要课题, 多年来有大量工作对其进行研究和探讨. 宋卫平在叶开沅指导下完成的博士论文中提出了寻求非线性问题渐近解析解的一种

简便有效的新方法:牛顿-样条函数法。这个方法不仅能求解强非线性问题和弱非线性问题,而且收敛速度快,收敛范围大。这个方法首先将含两个基本未知函数的耦合非线性微分方程边值问题,化为只含一个基本未知函数的非线性积分方程。然后对非线性积分算子实施牛顿过程,寻求一个逐次求解的 Fredholm 第二种积分方程序列。接着用多结点基样条函数逼近这些积分方程的核,得到具退化核的 Fredholm 第二种积分方程。于是问题最后归结为求解线性代数方程组。逐次求解这样的线性代数方程组,我们即获得问题的一般渐近解析解。再由这个解通过简单的积分和微分运算,即获得其他所需的位移和应力。利用这个方法,我们对圆平板、浅正弦波纹圆板、圆底扁球壳和圆底扁锥壳,在多种轴对称横向载荷和不同边界条件下的轴对称非线性弯曲和稳定性进行了详细的研究。现将该文的主要结果叙述如下:

1. 均布压力作用下边缘固定夹紧的圆底扁球壳的轴对称失稳有许多文章进行过研究,

但由于所用的方法的局限性,它们只对几何参数 $\lambda (= \sqrt{\sqrt{12(1-\nu^2)}2H/h}$, H 为扁壳拱高, h 为壳体厚度) 较小(不超过 20) 的扁球壳,求得了较准确的临界载荷。对于所谓大 λ 值问题,以往未能求得较准确的数值结果。Budiansky^[31] 经过分析后推测,当 λ 趋近于无穷大时,非线性临界压力与经典线性临界压力的比值 $q_{c,r}/q_{c,r,L}$ 趋近于 1。我们在 λ 小于、等于 50 的范围内求得了临界载荷(图 1),随着 λ 增大,比值 $q_{c,r}/q_{c,r,L}$ 就振荡地趋近于 1。这些结果证实了 Budiansky 等人的分析推测,它表明 λ 比较大时,用线性理论得到的临界载荷与非线性理论的结果是基本一致的。

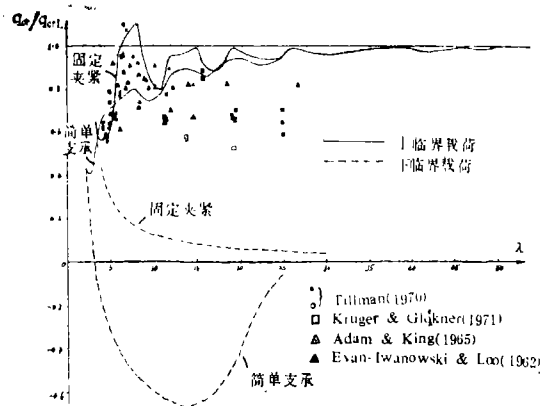


图1 固定夹紧和简单支承条件下的临界载荷

2. 1939年Karman和钱学森用Karman-Donnell大挠度方程对轴压圆柱壳及球壳受外压的问题,首先指出了载荷-位移的非线性关系在薄壳稳定性理论中的重要作用。1940年,Karman在美国航空科学年会上作报告指出:“现在力学的最大缺陷是仅仅停留在线性化的基础上,而工程实际需要非线性理论。”同时当年的实验指出:圆柱壳受轴压临界载荷的实验值仅有线性理论预测值的1/5到1/2。自此以后,出现了许多理论,如非对称理论、缺陷理论、局部理论等,企

图人为地将理论临界载荷值降低以使符合实验值。但是到了今天,由于实验技术的进步,前述的1/5—1/2的框框已经打破,实验临界载荷的数值大大提高(见图1),非线性效应在壳体稳定性问题中并不是无条件的,只在某一狭窄的范围内要考虑,而在宽广的范围内,线性理论仍是有用的。我们在本文仍坚持用对称理论,只要计算达到需要的精度,完全可以得到与实验相符合的结果。

3. 在临界载荷- λ 关系中, $d(q_{c,r}/q_{c,r,L})/d\lambda$ 或 $dq_{c,r}/d\lambda$ 改变符号或发生跳跃的地方对应于扁球壳屈曲模式发生改变。对均布压力作用下的圆底扁球壳,在 λ 的某些范围内(比如 $4 < \lambda < 5$) 简单支承条件下的临界载荷反而高于固定夹紧条件下的临界载荷(见图1),Weinitschke^[32] 等人也曾发现这个结果,并认为它是一个难以解释的奇怪现象,我们的研

究表明, 这种现象正是由于壳体屈曲模式的改变造成的。对中心部分受均布压力或环布线载荷作用的圆底扁球壳, [33, 34] 的研究发现, 当载荷作用半径从零开始逐渐增加到某一位置时, 临界载荷突然急剧下降, 我们的研究表明, 这也是壳体屈曲模式突然改变造成的。

4. [35—40] 曾经用不同方法获得了浅正弦波纹圆板在均布压力作用下的大挠度特征关系。其中 [40] 的理论值与实验结果符合得最好, 但它的结果是半经验性的, 不便推广。我们用牛顿-样条函数方法对浅正弦波纹圆板的大挠度问题进行了研究, 获得了精度较高的弹性特征, 同时还分析了波纹板的应力分布和失稳现象, 其结果与实验观察的现象是一致的。图 2 给出了集中力作用下浅正弦波纹圆板的弹性特征, 其中序号 I, II, III 和 IV 分别代表简单支承, 铰链支承, 固定夹紧和可移夹紧边界条件, 实线和虚线分表表示载荷按正方向和相反方向作用于波纹板。由图 2 可见, 当载荷按不同方向作用于波纹板时其弹性特征是不同的。图 2 中的极值点对应于波纹板失稳临界载荷, 其中简单支承条件下的实线出现两个极大值和两个极小值, 它们分别对应于波纹板的第一次跳跃和第二次跳跃。波纹数愈多, 跳跃次数也愈多。

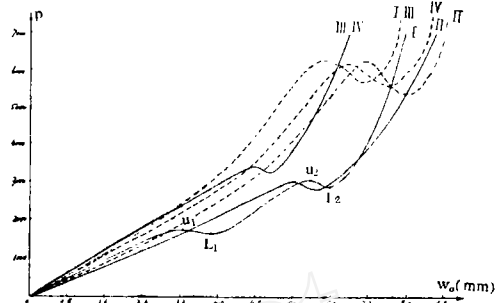


图 2 不同边界条件和不同方向集中力作用的特征曲线

这篇博士论文在生产上的意义为, 以往波纹板只是用来作为敏感元件, 现除敏感元件效能外, 尚可应用作为控制元件, 即为敏感-控制元件。

参 考 文 献

- 1 叶开沅, 柔物物件在中国的进展, 力学进展, 13, 2 (1983): 125—134.
- 2 Karman Th., The Festigkeit Problem in Maschinebau, Enzyklopadis der Mathematischen, Wissenschaften, Bd. IV, art 27 (1910).
- 3 —, Tsien Shue-shen (钱学森), The buckling of spherical shells by external pressure, *J. Aeronaut. Sci.*, 1 (1939), 43—50.
- 4 Ghien Wei-zang (钱伟长), Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure, 中国物理学报, 7, 2 (1947): 102—113.
- 5 —, Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection, 清华大学理科报告, 5, 1 (1948): 1—24.
- 6 叶开沅, 刘人怀, 李思来, 平庆元, 在对称线布载荷下的圆底扁薄球壳的非线性稳定问题, 兰州大学学报, 18, 2 (1965): 10—33.
- 7 —, 顾淑贤, 均布载荷作用下圆底扁薄球壳的非线性稳定性, 1980年全国计算力学会议文集, 北京大学出版社 (1981): 280—287.
- 8 陈山林, 光积昌, 圆薄板大挠度问题的摄动参数, 应用数学和力学, 2, 1 (1981): 131—144.
- 9 黄黔, 复合载荷下圆薄板的大挠度问题, 同上, 4, 5 (1983): 711—720.
- 10 陈山林, 圆板大挠度的钱伟长解及其渐近特性, 同上, 3, 4 (1982): 513—518.
- 11 刘人怀, 双层金属截头扁锥壳的热稳定性, 力学学报特刊, 1 (1981): 172—181.
- 12 —, 双层金属中心开孔扁球壳的非线性热稳定问题, 中国科学技术大学学报, 11, 1 (1981): 84—99.
- 13 Keller H. B., Reiss E. L., Iterative solution of the nonlinear bending of circular plates, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 11 (1958): 273—292.
- 14 Way S., Bending of circular plate with large deflection, *ASME Trans. Appl. Mech.*, 56 (1934): 627—636.
- 15 叶开沅, 郑晓静, 周又和, An analytical formula of exact solution to Karman's equations of circular plate under a concentrated load, Proc. ICNM (Shanghai), Science Press, Beijing, China (1985): 386—391.

- 16 —, —, 王新志, On some properties and calculation of the exact solution to Karman's equations of circular plate under a concentrated load, *ibid* (1985): 379—385.
- 17 Kayuk Ya. F., Alekseeva, Small parameter method in problem of the bending of elastic plates and shells, *Prsk. Mekh.*, **15**, 8 (1979): 63—68.
- 18 叶开沅, 周又和, 关于钱氏摄动法的高阶解的计算机求解和收敛性研究, *应用数学和力学*, **7**, 4 (1986): 285—293.
- 19 郑晓静, 周又和, 关于集中载荷下圆板非线性弯曲问题的解析电算求解, 待发表.
- 20 周又和, 郑晓静, Vincent 解的收敛上界, 待发表.
- 21 —, —, 关于修正迭代解与钱氏摄动解的关系, 待发表.
- 22 胡海昌, 在均布及中心集中载荷作用下圆板大挠度问题, *物理学报*, **10** (1954): 383—394.
- 23 郑晓静, 周又和, 复合载荷下圆薄板大挠度问题的精确解, *中国科学A辑*, **10** (1986): 1045—1056.
- 24 Datta S., Large deflection of a circular plate on elastic foundation under a concentrated load at the centre, *J. Appl. Mech. Trans. ASME, E.*, **42**, 2 (1975): 503—504.
- 25 Bolton, Richard, Stresses in circular plates on elastic foundations, *J. Engin. Mech., Div. P. ASCE*, **98**, EM3 (1972): 629—640.
- 26 Nath Y., Large amplitude response of circular plates on elastic foundations, *Int. J. Nonlinear Mech.*, **17**, 4 (1982): 285—296.
- 27 郑晓静, 周又和, 集中载荷下弹性地基圆板大挠度问题的精确解, 待发表.
- 28 —, —, 中心受集中载荷的固定夹支圆板和圆底扁球壳的卡门方程的精确解, 待发表.
- 29 —, —, 轴对称扁壳的几何非线性方程解的解析结构, 待发表.
- 30 Schmidt R., *J. Eng. Mech., Div. Proc. ASCE*, **94**, EM6 (1968): 1603.
- 31 Budiansky B., Buckling of clamped shallow spherical shells, *Proc. of the I.U.T.A.M. Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells* (1959): 64—94.
- 32 Weinitschke H. J., On the symmetrical buckling of shallow spherical shells, *J. Math. Phys.*, **44** (1965): 141—163.
- 33 Stephens W. B., Fulton R. E., Axisymmetric static and dynamic buckling of spherical caps due to centrally distributed pressures, *AIAA J.*, **7**, 11 (1969): 2120—2126.
- 34 Mescal J. F., Large deflections of spherical shells under concentrated, distributed and ring loadings, *Proc. of Southeastern Conf. on Theory and Appl. Mech.* (1968): 183—197.
- 35 费奥多谢夫 B. H., 精密仪器弹性元件的理论及计算, 科学出版社 (1963).
- 36 沃耳密尔 A. C., 柔韧板和柔韧壳, 科学出版社 (1959).
- 37 刘人怀, 波纹圆板的特征关系式, *力学学报*, **1** (1978).
- 38 —, 具有光滑中心的波纹圆板的特征关系式, *中国科学技术大学学报*, **9**, 2 (1979): 75—86.
- 39 —, 波纹环形板的非线性弯曲, *中国科学A*, **3** (1984): 247—253.
- 40 陈山林, 浅正弦波纹圆板在均布载荷下的大挠度弹性特征, *应用数学和力学*, **1**, 2 (1980): 261—272.

NEW DEVELOPMENT IN THE INVESTIGATION OF FLEXIBLE STRUCTURAL ELEMENTS

Ye Kai-yuan (Yeh Kai-yuan)
(Lanzhou University)

Abstract This paper is the continuation of [1] to review a series of new, breakthrough works, recently obtained by the Department of Mechanics of Lanzhou University, on the investigation of flexible structural elements (plates and shells).

Keywords flexible structural elements, plates, shells