

计算地球物理流体力学中的非线性 不稳定问题 (续)

季 仲 贞

(中国科学院大气物理研究所)

四、算子差分方程和谱方法的非线性稳定问题

§ 10 计算稳定性和能量守恒性与算子非负性的关系 本节引进算子方程, 并推广§6和§8的一些结果. 对于非定常流体力学方程, 往往都可以化为如下形式的“发展方程”:

$$\partial F / \partial t + \mathcal{A} F = 0 \quad (10.1)$$

其中 $F = F(x, t)$ 是待求函数, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(F, x, t)$ 是一个非线性算子, $X = X(x_1, \dots, x_k)$ 是空间坐标, k 是空间维数, t 是时间坐标. 例如, 对于正压原始方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - f v &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + f u &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

二维无辐散涡度方程 (8.1) 和一维非线性平流方程 (1.1) 在化为 (10.1) 形式后, 分别有

$$F = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} & -f & \frac{\partial}{\partial x} \\ f & u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \phi \frac{\partial}{\partial x} & \phi \frac{\partial}{\partial y} & u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$F = \zeta, \quad \mathcal{A} = u \partial / \partial x + v \partial / \partial y$$

$$F = u, \quad \mathcal{A} = u \partial / \partial x$$

在 (x, t) 空间布网 (x_m, t_n) , $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $X_m = (m_i h)$, m_i 为整数, $i = 1, 2, \dots, k$. 记函数 F 在 t_n 时刻的值为 F^n , 在点 (x_m, t_n) 的值为 F_m^n , 于是与 (10.1) 相应

的差分方程可写为

$$(F^{n+1} - F^n)/\tau + A_0(F^*)[\alpha F^{n+1} + (1-\alpha)F^n] = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (10.3)$$

其中 A_0 是与 \mathcal{A} 相应的差分算子, F^* 为 F 的某种光滑值. 定义两个网格函数 F, G 的内积为

$$(G, F) = \sum_m F_m G_m \Delta_m \quad (10.4)$$

在一维情形 $\Delta_m = h$, 在二维情形时 $\Delta_m = h^2$, 而范数则取为

$$\|F\| = (F, F)^{1/2} \quad (10.5)$$

定义 如果算子 A 满足

$$(AF, F) \geq 0 \quad (10.6)$$

则称 A 为非负的, 而当等号成立时, 则称为反对称的.

如果差分格式 (10.3) 的解 F 满足

$$\|F^n\| \leq C \quad (10.7)$$

则称格式 (10.3) 是计算稳定的, 其中 C 为常数. 显然, 若 $\|F^{n+1}\| \leq \|F^n\|$, 则必定是计算稳定的.

于是, 我们可以证明如下定理:

定理 6 若 A 为非负算子, 则格式 (10.3) 当 $\alpha \geq 1/2$ 时无条件稳定; 若 A 为反对称的, 且 $0 \leq \alpha < 1/2$ 时, 则格式 (10.3) 绝对不稳定.

证明 易证

$$(F^{n+1} - F^n, F^n) = (1/2)[\|F^{n+1}\|^2 - \|F^n\|^2 - \tau^2 \|(F^{n+1} - F^n)/\tau\|^2] \quad (10.8)$$

$$(F^{n+1} - F^n, F^{n+1}) = (1/2)[\|F^{n+1}\|^2 - \|F^n\|^2 + \tau^2 \|(F^{n+1} - F^n)/\tau\|^2] \quad (10.9)$$

用 $(1-\alpha)$ 和 α 分别乘 (10.8) 和 (10.9), 并相加之得

$$(F^{n+1} - F^n, \alpha F^{n+1} + (1-\alpha)F^n) = \|F^{n+1}\|^2 - \|F^n\|^2 + \tau^2(\alpha - 1/2)\|(F^{n+1} - F^n)/\tau\|^2 \quad (10.10)$$

用 $\alpha F^{n+1} + (1-\alpha)F^n$ 与 (10.3) 作内积, 并利用 (10.10) 可得

$$\|F^{n+1}\|^2 - \|F^n\|^2 + \tau^2(\alpha - 1/2)\|(F^{n+1} - F^n)/\tau\|^2 + (A_0(F^*)[\alpha F^{n+1} + (1-\alpha)F^n], [\alpha F^{n+1} + (1-\alpha)F^n]) = 0 \quad (10.11)$$

若 A 为非负的, 且 $\alpha \geq 1/2$, 则有

$$\|F^{n+1}\|^2 \leq \|F^n\|^2 \quad (\alpha = 1/2 \text{ 时取等号}) \quad (10.12)$$

即格式 (10.3) 计算稳定.

若 $(AF, F) = 0$ 且 $\alpha < 1/2$, 则有

$$\|F^{n+1}\|^2 > \|F^n\|^2 \quad (10.13)$$

定理 6 证毕.

定理 7 若 $(AF, F) = 0$, 且 $\alpha = 1/2$, 则格式 (10.3) 有如下守恒性:

$$\textcircled{1} \text{ 能量守恒: } \|F^{n+1}\|^2 = \|F^n\|^2 = \|F^0\|^2 \quad (10.14)$$

$$\textcircled{2} \text{ 广义能量守恒: } \|F^{n+1}\|^2 + (\tau^2/4)\|AF^{n+1}\|^2 = \|F^n\|^2 + (\tau^2/4)\|AF^n\|^2 \quad (10.15)$$

$$\textcircled{3} \text{ “平均尺度” 守恒: } \|F^{n+1}\|^2 / \|AF^{n+1}\| = \|F^n\|^2 / \|AF^n\| \quad (10.16)$$

证明 用 $F^{n+1} + F^n$ 与 (10.3) 作内积, 即得 (10.14). 把 (10.3) 改写为

$$F^{n+1} + \alpha \tau A_0(F^*)F^{n+1} = F^n - (1-\alpha)\tau A_0(F^*)F^n \quad (10.17)$$

两边取范数, 并注意 $\alpha=1/2$ 和 $(AF, F)=0$, 即得 (10.15). 有了 (10.14) 和 (10.15) 以后, (10.16) 是显然的, 定理 7 证毕.

附注 如果以 Crank-Nicholson 格式

$$(F^{n+1} - F^n)/\tau + \alpha A(F^{n+1})F^{n+1} + (1-\alpha)A(F^n)F^n = 0 \quad (10.18)$$

代替 (10.3), 在定理 7 的条件下只能得到上述守恒性 (10.15). 但得不到其余两个守恒性, 不过守恒性 (10.15) 也同时限制了总能量和平均尺度, 使得 $\|F\|^2$ 和 $\|AF\|^2$ 永远为有界量.

上述的守恒性不但能保证狭义的计算稳定性 (即函数有界), 还可以在一定程度上抑制寄生波, 使得计算场保持平滑, 由此可见满足 $(AF, F)=0$ 的守恒型格式的优越性, 其中 (10.3) 又比 (10.18) 更好.

§ 11 Galerkin 有限元近似的非线性计算稳定性问题 为了提高计算精度, 描写复杂的边界条件以及处理不规则格点分布等问题, 近十余年来有限元法发展较快, 对于非定常问题, 其有限元方程可以用 Galerkin 方法来建立, 通常称之为 Galerkin 有限元. Galerkin 方法只适用于空间方向, 而不适用于时间方向, 故时间方向一般仍需采用有限差分. 本节讨论的就是时间差分空间有限元的近似格式的计算稳定性问题. 首先进一步推广上一节的结果, 考虑更一般形式的发展方程

$$\partial F / \partial t + \mathcal{A}F = G \quad (11.1)$$

$$\lim_{t=0} F = F^0(x) \quad (11.2)$$

其中 $G = G(x, t)$ 和 $F^0(x)$ 为已知函数, 其余符号同前. 在 (x, t) 空间布网, 取 τ 为时间步长, m 为空间网点的标号. 设 ϕ_h 是基底函数, F_h 是 F 的 Galerkin 近似, 即

$$(\partial F_h / \partial t, \phi_h) + (\mathcal{A}F_h, \phi_h) = (G_h, \phi_h) \quad (11.3)$$

今先讨论 (11.3) 取时间单向差的局地近似, 于是与 (11.1) 和 (11.2) 相应的 Galerkin 有限元近似可写为

$$B\left(\frac{F_h^{n+1} - F_h^n}{\tau}\right) + A_h(F_h^*)[\alpha F_h^{n+1} + (1-\alpha)F_h^n] = G_h^{(n+1, n)}, \quad F_h^0 = F_h(0) \quad (11.4)$$

其中 B 为不依赖于 t 的线性算子, $0 \leq \alpha \leq 1$, A_h 是与 \mathcal{A} 对应的近似算子, F_h^* 是 F_h 的某种线性组合或光滑值, $G_h^{(n+1, n)}$ 为与 G 相应的右端项, 一般取为 n 和 $n+1$ 时刻的线性组合. 另外函数 F_h 在节点 m 和 $n\tau$ 时刻的值, 可记为 $(F_h)_m^n$. 为简便计, 在以下书写中省略下标 h , 将 A_h, F_h, G_h 等仍简写为 A, F, G 等. 定义两个近似函数的内积为

$$(G, F) = \sum_m F_m G_m \quad (11.5)$$

而函数 F 的范数则取为

$$\|F\| = (BF, F)^{1/2} \quad (11.6)$$

如果算子 A 满足 $(AF, F) \geq 0$, 则称 A 为非负的, 当等号成立时, 则称 A 为反对称的, 如果关系式 $(BF, G) = (F, BG)$ 成立, 则称算子为实对称的.

定义 若当 τ 充分小时, 由局地 Galerkin 有限元近似算得的解满足

$$(1/2)(\|F^{n+1}\|^2 - \|F^n\|^2) \leq \tau(G^{(n+1, n)}, F^{(n+1, n)}) \quad (11.7)$$

则称格式 (12.4) 为计算稳定的, 其中

$$G^{(n+1,n)} = \alpha G^{n+1} + (1-\alpha)G^n, \quad F^{(n+1,n)} = \alpha F^{n+1} + (1-\alpha)F^n$$

于是有如下定理:

定理 8 若 B 为对称算子, A 为非负算子, 则格式 (11.4) 在 $1 \geq \alpha \geq 1/2$ 时无条件计算稳定.

定理 9 若 $G \equiv 0$, A 为非负算子, B 为不依赖于 t 的对称算子, 则近似格式 (11.4) 当 $1 \geq \alpha \geq 1/2$ 时无条件稳定; 若 $(AF, F) = 0$, 且 $0 \leq \alpha < 1/2$, 则格式 (11.4) 绝对不稳定.

上述两定理与上节定理 6 的证明方法类似. 此外, 我们还需指出, 如果在 Galerkin 有限元近似中, 其时间偏导数项用中央差代替, 采用类似前面 § 5 和 § 9 的做法, 同样可以证明一维平流方程局地 Galerkin 有限元近似和二维涡度方程 Galerkin 有限元近似存在非线性计算不稳定的例子, 详见 [16].

§ 12 一维谱展开法的非线性计算不稳定的例子 谱展开法是一种有效的近似求解方法, 它比有限差分法更易于构造出保持能量守恒的计算方案. 但是这种能量守恒性一般都是在时间导数项不离散化的条件下才能保持的, 如果在时间方向取 leap-frog 型差分近似, 那末在谱展开法中同样存在非线性计算不稳定.

先考虑一维非线性平流方程 (1.1). 对 $u(x, t)$ 作三角函数展开

$$u(x, t) = \sum_m C_m(t) e^{imx} \quad (12.1)$$

于是有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_m \frac{dC_m}{dt} e^{imx} \quad (12.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_m C_m i m e^{imx} \quad (12.3)$$

为了便于看到波的非线性相互作用, 用 h, l 分别代替 (12.2) 和 (12.3) 中的 m 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_h \frac{dC_h}{dt} e^{ihx} \quad (12.2)'$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_l C_l i l e^{ilx} \quad (12.3)'$$

把 (12.1), (12.2)' 和 (12.3)' 代入 (1.1), 并比较两端系数可得

$$-\frac{dC_h}{dt} = \sum_l i l C_l C_{h-l} \quad (12.4)$$

为简单起见, 仅限于讨论 h, l 均取 $1, 0, -1$ 的波分量, 于是由 (12.4) 得

$$\frac{dC_1}{dt} = i C_1 C_0, \quad \frac{dC_0}{dt} = 0, \quad \frac{dC_{-1}}{dt} = -i C_0 C_{-1} \quad (12.5)$$

把 (12.5) 取 leap-frog 型时间离散化后可得

$$\left. \begin{aligned} C_1^{n+1} - C_1^{n-1} &= i 2 \Delta t C_1^n C_0^n \\ C_0^{n+1} - C_0^{n-1} &= 0 \\ C_{-1}^{n+1} - C_{-1}^{n-1} &= -i 2 \Delta t C_0^n C_{-1}^n \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

由 (12.6) 可得

$$C_{i+2}^n - 2\mu C_i^n + C_{i-2}^n = 0 \quad (12.7)$$

其中 $\mu = 1 - (1/2)(2\Delta t)^2 AB$, 而 A 和 B 是 C_0^n 在奇偶时间步上的两个常数值, 对 C_{-1} 有类似的方程. 不难求得, 若 $|\mu| < 1$, 则 C_i^n, C_{i-1}^n 有界, 即 u^n 计算稳定; 若 $|\mu| > 1$, 则 C_i^n, C_{i-1}^n 出现指数增长, 这表明其稳定性判据是 $|\mu| < 1$, 即相当于 $1 > \Delta t^2 AB > 0$. 因此, 若 A, B 同号且 $1 > \Delta t^2 AB$ 时, 则计算是稳定的; 若 A, B 同号且 $1 < \Delta t^2 AB$ 时, 则出现线性计算不稳定; 若 A, B 反号时, 则出现非线性计算不稳定.

§ 13 二维谱展开法的非线性计算不稳定的例子 现在考虑正压无辐散涡度方程(8.1), 引进流函数 ϕ 后, 它可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi = -\mathbf{k} \cdot \nabla \phi \times \nabla (\nabla^2 \phi) \quad (13.1)$$

按[32]中的办法, 取如下最简化的涡度和流函数的谱展开:

$$\nabla^2 \phi = A \cos ly + F \cos kx + 2G \sin ly \sin kx \quad (13.2)$$

$$\phi = -\frac{A}{l^2} \cos ly - \frac{F}{k^2} \cos kx - \frac{2G}{k^2 + l^2} \sin ly \sin kx \quad (13.3)$$

把 (13.2), (13.3) 代入 (13.1), 并比较谱展开的同类项, 最后可得其系数所满足的方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + l^2}\right)klFG \\ \frac{dF}{dt} &= \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{k^2 + l^2}\right)klAG \\ \frac{dG}{dt} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{k^2}\right)klAF \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

正如[32]中所指出的, 上方程组对平均动能 $E = \frac{1}{4}\left(\frac{A^2}{l^2} + \frac{F^2}{k^2} + \frac{2G^2}{k^2 + l^2}\right)$ 和平均平方涡度

$V = (1/2)(A^2 + F^2 + 2G^2)$ 是守恒的, 因此 $\nabla^2 \phi$ 和 ϕ 均有界, 即计算是稳定的. 但是, 如果对 (13.4) 取 leap-frog 型时间离散化可得方程组

$$\left. \begin{aligned} A^{n+1} &= A^{n-1} - 2\Delta t \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + l^2}\right)klF^n G^n \\ F^{n+1} &= F^{n-1} + 2\Delta t \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{k^2 + l^2}\right)klA^n G^n \\ G^{n+1} &= G^{n-1} - \Delta t \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{k^2}\right)klA^n F^n \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

不难看到方程组 (13.5) 有特解

$$\left\{ \begin{array}{l} A^n = 0 \\ F^n = 0 \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \text{当 } n \text{ 为偶} \\ \text{当 } n \text{ 为奇} \end{array} \right) \quad \text{或} \quad \left\{ \begin{array}{l} A^n = 0 \\ F^n = 0 \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \text{当 } n \text{ 为奇} \\ \text{当 } n \text{ 为偶} \end{array} \right)$$

于是今考虑 (13.5) 的特殊情形

$$\left. \begin{aligned} A^{n+1} &= A^{n-1} - 2\Delta t \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + l^2} \right) k l F^n G^n \\ F^{n+1} &= F^{n-1} + 2\Delta t \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{k^2 + l^2} \right) k l A^n G^n \\ G^{n+1} &= G^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

由 (13.6) 第三式可知 G^n 必循环交替地取两个常数, 不妨设为 A 和 B , 记 $\sigma = 2\Delta t k l / (k^2 + l^2)$ 。由 (13.6) 前两式可得

$$A^{n+2} - 2\mu A^n + A^{n-2} = 0, \quad F^{n+2} - 2\mu F^n + F^{n-2} = 0$$

其中 $\mu = 1 + (1/2)\sigma^2 AB$ 。与前一节一维情形类似, 可知当 $|\mu| < 1$ 时 A^n, F^n 有界; 若 $|\mu| > 1$ 时, A^n, F^n 指数增长。这表明这时的稳定性判据是 $|\mu| < 1$, 它相当于 $-4 < \sigma^2 AB < 0$ 。由此可知, 当 A, B 反号且 $-4 < \sigma^2 AB < 0$ 时, 计算是稳定的; 若 A, B 反号且 $\sigma^2 AB < -4$ 时, 则出现线性计算不稳定; 而当 A 和 B 同号时, 将出现非线性计算不稳定。

五、有关非线性计算不稳定的几个问题

§ 14 对产生非线性计算不稳定的机理的讨论 为什么会产生非线性计算不稳定, 这是至今尚未完全弄清楚的问题, 但已有如下一些看法:

1. 混淆误差 Phillips 等认为由于网格系统不能分解成比 2 倍格距更短的波, 当波产生非线性相互作用时, 网格系统不能正确地表示它们, 从而造成 2 倍格距波的增长, 导致非线性计算不稳定出现。Orszag 等则认为推断混淆误差总引起非线性计算不稳定是不确切的, 例如, 在保持总能量守恒的差分格式中, 尽管仍存在混淆误差, 但并不会出现非线性计算不稳定。

2. 能量守恒性 Arakawa, 曾庆存等都很强调差分格式保持微分方程物理特性, 特别是能量守恒性的重要性。曾庆存^[29]指出, 非线性计算不稳定的产生都有一个共同的特点, 就是没有明显的能量守恒性, 或者是能量范数预估式的时空差分格式提供了虚假的能量, 而由格式所决定的虚假的能谱转移过程使得某些特殊类型的扰动很快地发展起来, 这些特殊类型的扰动的共同特点是波长和空间差分步长同量级, 而且振幅足够大, 使得网格函数变号。他还进一步指出, 对于非线性方程来说, 一般只能求得广义解或弱解, 可是对于弱解来说, 能量守恒性是不一定存在的。

3. 网格函数变号 Robert 等分析了一些具体例子后指出, 非线性不稳定的出现与网格函数变号有关, 只要网格函数始终保持相同的符号, 就不会出现非线性计算不稳定。而我们的分析和数值试验表明, 网格函数在时间方向和空间方向变号都易于出现非线性计算不稳定。

4. 初值状态 我们通过定性分析和数值试验还发现, 非线性计算不稳定的出现与否与函数初值状态有密切的关系。譬如在 § 7 中看到的, 当 $\theta = 1/2$ 时, $V^0 = V^1$ 时不会出现非线性计算不稳定, 而当 $V^0 = -V^1$ 时必出现非线性不稳定; 而当 $V \equiv 0$ 时, 在 $U^0 = U^1$ 时必出现非线性不稳定, 而 $U^0 = -U^1$ 时则不会出现非线性不稳定。

§ 15 克服非线性计算不稳定的措施 既然在非线性方程的差分求解中, 非线性计算不

稳定是经常存在的。如何才能避免这种不稳定呢？这是一个很现实的问题。

[22]中已作了较详细的阐述。一般非线性不稳定在初始时表现为局部的小尺度的不规则性，也就是高频扰动，在一定时间后，就出现突变性的指数增长现象。这种高频扰动可以用如下几种方法中的一种来消除或减弱：①空间或时间平滑；②在变量 F 的预报方程中引入形式为 $\nu \nabla^2 F$ 的扩散项；③构造具有隐式平滑或某种选择性衰减作用的差分格式，如 Euler 后差等；④构造总能量守恒的格式；⑤截谱近似。前面三种办法虽然在实际工作中经常使用，并且对克服非线性计算不稳定确实有一定的效果，但是这些办法的采用，在抑制虚假的高频扰动的同时，把许多有意义的小波动也抹去了。因此这些措施长时间大量地使用是不适宜的。第五种办法意味着使用谱展开法，虽然近年来也在迅速发展，但涉及波谱的非线性相互作用，在理论上还有许多问题需要深入地研究。看来还是第四种措施更值得提倡，特别在地球流体力学问题的计算中可以采用。然而，以前所发展的时间差分意义下的完全能量守恒的格式几乎都是隐式的，它们一般都较费时，相速误差也较大，近年来人们在使用过程中把隐式格式与分解算法结合起来，曾庆存等更是发展了参数可调的灵活性替代格式，这些都大大弥补了隐式格式的某些不足之处。更可喜的是最近已出现了构造显式的完全能量守恒的差分格式的趋势，当然要想在实际工作中使用，还需作更多的努力。

§ 16 耗散与计算稳定性 如前所述，在方程中加耗散是抑制非线性计算不稳定的主要措施之一。但是耗散如何加法？加多大量才合适？这是需要慎重对待的。本节分析一下耗散量对计算稳定性的影响。

在一维非线性平流方程上加上形如 $\nu \delta^2 u / \delta x^2$ 的耗散项，就得到著名的 Burger 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (16.1)$$

引进参数 θ ，方程 (16.1) 可推广为

$$\frac{\nu}{\theta} \frac{\partial u}{\partial t} + (1-\theta)u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\theta}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (16.2)$$

与其相应的差分格式可写为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + (1-\theta)u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\theta}{2} \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{2\Delta x} = \nu \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} \quad (16.3)$$

今取 (16.3) 的形如 (1.3) 的特解，或改写为

$$u_j^n = \sum_{n=0, \pm 1/2, \pm 1} C_m^n e^{i(x/L)^m j \Delta x} \quad (16.4)$$

其中 $L = 1 = J\Delta x$ ， $J = 1/\Delta x$ ，且

$$C_0^n = V^n, \quad C_{\pm 1/2}^n = (1/2)(C^n \mp iS^n), \quad C_{\pm 1}^n = (1/2)U^n \quad (16.5)$$

把 (16.4) 代入 (16.3) 并化简，可得其展开系数 C_m^n 所满足的常差分方程组

$$\left. \begin{aligned}
C_0^{n+1} - C_0^{n-1} &= 0 \\
C_{j/2}^{n+1} - C_{j/2}^{n-1} + \frac{i2\Delta t}{\Delta x} \left[C_0^n C_{j/2}^n + (2\theta - 1)(C_j^n + C_{-j}^n) C_{j/2}^n \right] &= -\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_{j/2}^{n-1} \\
C_{-j/2}^{n+1} - C_{-j/2}^{n-1} - \frac{i2\Delta t}{\Delta x} \left[C_0^n C_{-j/2}^n + (2\theta - 1)(C_j^n + C_{-j}^n) C_{-j/2}^n \right] &= -\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_{-j/2}^{n-1} \\
C_j^{n+1} - C_j^{n-1} + \frac{i2\Delta t}{\Delta x} (1 - \theta) (C_{j/2}^n)^2 &= -\frac{8\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_j^{n-1} \\
C_{-j}^{n+1} - C_{-j}^{n-1} - \frac{i2\Delta t}{\Delta x} (1 - \theta) (C_{-j/2}^n)^2 &= -\frac{8\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_{-j}^{n-1}
\end{aligned} \right\} (16.6)$$

把 (16.5) 代入 (16.6), 并按虚实部分开可得

$$\left. \begin{aligned}
V^{n+1} - V^{n-1} &= 0 \\
C^{n+1} - C^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\Delta x} S^n \left[V^n + (1 - 2\theta)U^n \right] &= -\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} C^{n-1} \\
S^{n+1} - S^{n-1} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} C^n \left[V^n - (1 - 2\theta)U^n \right] &= -\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} S^{n-1} \\
U^{n+1} - U^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\Delta x} C^n S^n (1 - \theta) &= -\frac{8\Delta t\nu}{\Delta x^2} U^{n-1}
\end{aligned} \right\} (16.7)$$

若在 (16.6) 中取 $\theta = 1/2$, 可得

$$\left. \begin{aligned}
C_0^{n+1} - C_0^{n-1} &= 0 \\
C_{j/2}^{n+1} - C_{j/2}^{n-1} + i\frac{2\Delta t}{\Delta x} C_0^n C_{j/2}^n &= -\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_{j/2}^{n-1} \\
C_{-j/2}^{n+1} - C_{-j/2}^{n-1} - i\frac{2\Delta t}{\Delta x} C_0^n C_{-j/2}^n &= -\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_{-j/2}^{n-1} \\
C_j^{n+1} - C_j^{n-1} + i\frac{\Delta t}{\Delta x} (C_{j/2}^n)^2 &= -\frac{8\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_j^{n-1} \\
C_{-j}^{n+1} - C_{-j}^{n-1} - i\frac{\Delta t}{\Delta x} (C_{-j/2}^n)^2 &= -\frac{8\Delta t\nu}{\Delta x^2} C_{-j}^{n-1}
\end{aligned} \right\} (16.8)$$

由 (16.8) 前两式可得

$$C_{j/2}^{n+1} - 2 \left[1 - 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) AB - \frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} \right] C_{j/2}^n + \left[1 - \frac{8\Delta t\nu}{\Delta x^2} + \left(\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} \right)^2 \right] C_{j/2}^{n-1} = 0 \quad (16.9)$$

其中 A, B 是 C_0^n 所取的两个常数. (16.9) 的特征方程为

$$K^4 - 2 \left[1 - 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 AB - \frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} \right] K^2 + \left[1 - \frac{8\Delta t\nu}{\Delta x^2} + \left(\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} \right)^2 \right] = 0 \quad (16.10)$$

于是可得

$$K^2 = \left[1 - 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 AB - \frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} \right] \pm \sqrt{M} \quad (16.11)$$

其中 $M = 4 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 AB \left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 AB - 1 + 4\nu \frac{\Delta t}{\Delta x} \right]$. 下面分两种情况讨论.

①若 $M < 0$, 则 K^2 为复根, 于是

$$|K^2|^2 = \left[1 - \frac{8\Delta t\nu}{\Delta x^2} + \left(\frac{4\Delta t\nu}{\Delta x^2} \right)^2 \right] \quad (16.12)$$

若要格式计算稳定,则必须 $|K^2|^2 \leq 1$, 化简之为 $2\Delta t\nu/\Delta x^2 < 1$, 反之,若 $2\Delta t\nu/\Delta x^2 > 1$, 则格式计算不稳定。可见,对于固定的 Δt 和 Δx , 耗散系数 ν 不能取得太大,否则将造成计算不稳定。

②若 $M > 0$, 则 K^2 为实根,当 $K^2 > 1$ 和 $K^2 < -1$ 时将出现计算不稳定。经详细分析,可得当 $M > 0$ 时格式 (16.9) 的稳定性如表 1 所示。

此外,我们还利用方程组 (16.7) 进行数值计算,选取 $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.004$, $C^0 = S^0 = U^0 = V^0 = 1$, $C^1 = S^1 = -U^1 = -V^1 = 1$, 而 ν 分别取为 1.5, 1, 0.1, 0.01, 0.001。所得总能量 E 的变化如表 2 所示。

由表 2 可见, ν 太大和 ν 过小都会出现计算不稳定,而当 $\nu = 0.1$ 和 $\nu = 0.01$ 时计算才是稳定的,可见对耗散量的选择必须十分慎重。

表 1 格式 (16.9) 当 $M > 0$ 时的稳定性状况

			$\nu + \Delta t AB > 0$	非线性不稳定
		$\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} > 2\nu + \Delta t AB$	$\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} > -(2\nu + \Delta t AB)$	非线性不稳定
		$2\nu + \Delta t AB < 0$	$\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} < -(2\nu + \Delta t AB)$	线性不稳定
	在 (16.11) 中取 $+\sqrt{M}$	$\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} < 2\nu + \Delta t AB$ 且 $1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \nu - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 > -\frac{\sqrt{M}}{2}$		稳定
		$1 - 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \nu - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB < -\frac{\sqrt{M}}{2}$		线性不稳定
		$-\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} > 2\nu + \Delta t AB$		线性不稳定
	在 (16.11) 中取 $-\sqrt{M}$	$\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \sqrt{M} < 2\nu + \Delta t AB$ 且 $1 - 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \nu - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB > \frac{\sqrt{M}}{2}$		稳定
		$1 - 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \nu - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 AB < \frac{\sqrt{M}}{2}$		线性不稳定
$M > 0$				

表 2 格式 (16.7) 的计算稳定性状况

E	ν	ν				
		$\nu = 1.5$	$\nu = 1$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.001$
5		0.3×10^4	0.12×10^3	0.16×10^1	0.30×10^1	0.33×10^1
	10	0.61×10^6	0.26×10^4	0.11×10^1	0.24×10^1	0.29×10^1
	15	0.19×10^{10}	0.31×10^6	0.11×10^1	0.30×10^1	0.37×10^1
	20	0.38×10^{12}	0.69×10^7	0.10×10^1	0.25×10^1	0.37×10^1
25			0.83×10^9	0.10×10^1	0.26×10^1	0.35×10^1
	30		0.19×10^{11}	0.10×10^1	0.29×10^1	0.53×10^1
	35		0.22×10^{13}	0.10×10^1	0.19×10^1	0.27×10^1
	40		0.49×10^{14}	0.10×10^1	0.31×10^1	0.69×10^1
45				0.16×10^1	0.13×10^1	0.17×10^1
	50			0.16×10^1	0.30×10^1	0.79×10^1
	100			0.10×10^1	0.15×10^1	0.94×10^1
	150			0.16×10^1	0.13×10^1	0.13×10^2
200				0.10×10^1	0.11×10^1	0.19×10^2
	250			0.10×10^1	0.10×10^1	0.19×10^2
	300			0.10×10^1	0.10×10^1	0.23×10^2

六、平方守恒型差分格式的构造和应用

§ 17 平方守恒型差分格式的构造 如前所说, 能量守恒的格式对于长时间计算稳定是十分有利的, 在 § 11 中又进一步看到能量守恒性与算子非负性有着十分密切的关系。从某种意义上说, 构造计算稳定的差分格式的问题已转化为构造非负算子的问题。如何才能构造出具有非负算子的差分格式呢? 下面介绍一些具体的方法。

为了书写的方便, 先引进一些记号和关系式。在 (x, y, t) 空间布网, 分别取空间和时
间步长为 $\Delta x = \Delta y = h, \Delta t = \tau$ 。设 F, G 为任二个网格函数, 记

$$\left. \begin{aligned} \bar{F} &= \frac{F^{n+1} + F^n}{2}, \quad F_{+t} = \frac{F^{n+1} - F^n}{\tau}, \quad \bar{F}_t = \frac{F^{n+1} - F^{n-1}}{2\tau} \\ \bar{F}_x &= \frac{F_{j+(1/2),k} + F_{j-(1/2),k}}{2}, \quad \bar{F}_y = \frac{F_{j,k+(1/2)} + F_{j,k-(1/2)}}{2}, \quad F_x = \frac{F_{j+(1/2),k} - F_{j-(1/2),k}}{h} \\ F_y &= \frac{F_{j,k+(1/2)} - F_{j,k-(1/2)}}{h}, \quad F_{+x} = \frac{F_{j,k} - F_{j-1,k}}{h}, \quad F_{-y} = \frac{F_{j,k} - F_{j,k-1}}{h} \end{aligned} \right\} (17.1)$$

显然有
$$\frac{F_{+x} + F_{-x}}{2} = \bar{F}_x^x, \quad \frac{F_{+y} + F_{-y}}{2} = \bar{F}_y^y$$

方法 1. (Arakawa 方法) (略, 可参见 [6,29]).

方法 2. 散变积分法 (略, 可参见 [23,24]).

方法 3. 共轭内积法.

定义两个网格函数 F, G 的内积为

$$(F, G) = \sum_j \sum_k F_{j,k} G_{j,k} h^2 \quad (17.2)$$

在周期边界条件下, 容易验证如下关系式成立:

$$(F, G_{+x}) + (G, F_{-x}) = 0 \quad (17.3)$$

在 (17.3) 中以 $\xi\eta$ 代 F , 以 ξ 代 G 得 $(\xi\eta, \xi_{+x}) + (\xi, (\xi\eta)_{-x}) = 0$, 可改写为

$$(\xi, \eta\xi_{+x} + (\xi\eta)_{-x}) = 0 \quad (17.4)_1$$

在 (17.3) 中以 $\xi\eta$ 代 G , 以 ξ 代 F 得 $(\xi, (\xi\eta)_{+x}) + (\xi\eta, \xi_{+x}) = 0$, 可改写为

$$(\xi, \eta\xi_{-x} + (\xi\eta)_{+x}) = 0 \quad (17.4)_2$$

把 (17.4)₁ 与 (17.4)₂ 相加, 并除以 2 得

$$(\xi, \eta\bar{\xi}_x^x + (\bar{\xi}\eta)_x^x) = 0 \quad (17.4)_3$$

同理可得

$$(\xi, \eta\bar{\xi}_{+y}^y + (\bar{\xi}\eta)_{-y}^y) = 0, \quad (\xi, \eta\bar{\xi}_{-y}^y + (\bar{\xi}\eta)_{+y}^y) = 0, \quad (\xi, \eta\bar{\xi}_y^y + (\bar{\xi}\eta)_y^y) = 0 \quad (17.5)_{1,2,3}$$

在 (17.4) 中以 ζ^* 代 ξ , 以 u^{**} 代 η , 在 (17.5) 中以 ζ^* 代 ξ , 以 v^{**} 代 η , 并把所得结果两两相加并除以 2, 共可得 $C_3^1 \cdot C_3^1 = 9$ 个关系式, 譬如有

$$(\zeta^*, u^{**}\zeta_{+x}^* + (u^{**}\zeta^*)_{-x} + v^{**}\zeta_{+y}^* + (v^{**}\zeta^*)_{-y}) = 0 \quad (17.6)_1$$

$$(\zeta^*, u^{**}\zeta_{-x}^* + (u^{**}\zeta^*)_{+x} + v^{**}\zeta_{-y}^* + (v^{**}\zeta^*)_{+y}) = 0 \quad (17.6)_2$$

$$(\zeta^*, u^{**}\bar{\zeta}_{+x}^x + (\bar{u}^{**}\zeta^*)_x^x + v^{**}\bar{\zeta}_{+y}^y + (\bar{v}^{**}\zeta^*)_y^y) = 0 \quad (17.6)_3$$

其中 u^{**}, v^{**} 分别为 u, v 的某种光滑值, ζ^* 为 ζ 的某种线性组合, 例如可取 $\zeta^* = \bar{\zeta}$, 或 ζ 等.

关系式 (17.6) 表明, 如下的格式具有瞬时平方守恒性:

$$\zeta_{+t} + \frac{1}{2} \left[u^{**}\zeta_{+x}^* + (u^{**}\zeta^*)_{-x} + v^{**}\zeta_{+y}^* + (v^{**}\zeta^*)_{-y} \right] = 0 \quad (17.7)_1$$

$$\zeta_{+t} + \frac{1}{2} \left[u^{**}\zeta_{-x}^* + (u^{**}\zeta^*)_{+x} + v^{**}\zeta_{-y}^* + (v^{**}\zeta^*)_{+y} \right] = 0 \quad (17.7)_2$$

$$\zeta_{+t} + \frac{1}{2} \left[u^{**}\bar{\zeta}_x^x + (\bar{u}^{**}\zeta^*)_x^x + v^{**}\bar{\zeta}_y^y + (\bar{v}^{**}\zeta^*)_y^y \right] = 0 \quad (17.7)_3$$

如果取 $\zeta^* = \bar{\zeta}$, 还可以证明以上这些格式具有完全的平方守恒性, 而与 u^{**} 和 v^{**} 的取法无关.

格式 (17.7)₃ 就是我们在 [28,30,31] 中构造的格式在二维涡度上的体现.

方法4. 直接差分法(略, 参见[23]).

方法4. Galerkin 有限元法(略, 见[33, 34, 16]).

§ 18 完全能量守恒的格式在海流数值模拟中的应用 海流数值模拟是一项有着重要意义的工作, 能否使其取得满意的结果, 计算格式的稳定性问题是一个关键性问题, 下面我们扼要介绍一个表层流计算模式, 以说明平方守恒格式的重要实用意义. 考虑二维全流方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} + f v + k_1 \Delta u - k_2 u + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} - f u + k_1 \Delta v - k_2 v + F_y \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u h}{\partial x} + \frac{\partial v h}{\partial y} = k_3 \Delta h \end{aligned} \right\} \quad (18.1)$$

其中 $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, u, v 为海流流速的两个分量, h 为水层厚度, $\phi = g(h + h_s)$ 为自由面位势, h_s 为海底地形高度, k_1 为侧向摩擦系数, k_2 为海底摩擦系数, k_3 为分子迁移系数. F_x 和 F_y 为风应力的两个分量:

$$F_x = (\rho_{\text{气}}/h_{\text{水}}\rho_{\text{水}})C_D |v_a| u_a, \quad F_y = (\rho_{\text{气}}/h_{\text{水}}\rho_{\text{水}})C_D |v_a| v_a$$

v_a 为海表面风速, u_a, v_a 为其两个分量.

作变数变换, 令 $\sqrt{gh}u = U, \sqrt{gh}v = V, \sqrt{gh} = \Phi = \sqrt{\phi - gh_s}$, 于是可将(18.1)变换为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u U}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial v U}{\partial y} \right) = f V - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_1 \Phi \Delta \left(\frac{U}{\Phi} \right) - k_2 U + \Phi F_x \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u V}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial v V}{\partial y} \right) = -f U - \Phi \frac{\partial \phi}{\partial y} + k_1 \Phi \Delta \left(\frac{V}{\Phi} \right) - k_2 V + \Phi F_y \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial U \Phi}{\partial x} + \frac{\partial V \Phi}{\partial y} = k_3 \Phi \Delta \Phi \end{aligned} \right\} \quad (18.2)$$

不难验证(18.2)满足如下能量关系:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{1}{2} (U^2 + V^2 + \phi^2) dx dy = \iint \left\{ k_1 \Phi \left[U \Delta \left(\frac{U}{\Phi} \right) + V \Delta \left(\frac{V}{\Phi} \right) \right] - k_2 (U^2 + V^2) \right. \\ \left. + k_3 \Phi \Delta \Phi + \Phi (U F_x + V F_y) \right\} dx dy \end{aligned} \quad (18.3)$$

如果忽略耗散强迫力项, 则有能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint [V^2 + U^2 + \phi^2] dx dy = 0 \quad (18.4)$$

今在 (x, y) 空间布网, 变量分布有如图3所示的跳点分布.

为了节省计算时间, 我们采用分解算法进行计算. 具体的, 就是把与(18.2)相对应的差分方程分解为如下三个过程逐次进行计算:

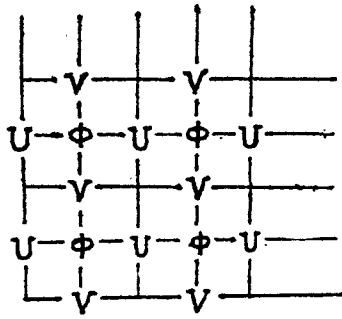


图3 变量分布图

1. 地转适应过程

$$\left. \begin{aligned}
 U_{2i+1,2j}^I &= U_{2i+1,2j}^n + \Delta t_1 \left([fV]_{2i+1,2j}^I - \left(\Phi \frac{\delta \phi}{\delta x} \right)_{2i+1,2j}^I \right) \\
 V_{2i,2j+1}^I &= V_{2i,2j+1}^n + \Delta t_1 \left([-fU]_{2i,2j+1}^I - \left(\Phi \frac{\delta \phi}{\delta y} \right)_{2i,2j+1}^I \right) \\
 \phi_{2i,2j}^I &= \phi_{2i,2j}^n - \Delta t_1 \left(\left(\frac{\delta U \phi}{\delta x} \right)_{2i,2j}^I + \left(\frac{\delta V \phi}{\delta y} \right)_{2i,2j}^I \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

2. 演变过程

$$\left. \begin{aligned}
 U_{2i+1,2j}^{II} &= U_{2i+1,2j}^I - \Delta t_2 \left[\frac{1}{2} \left(u \frac{\delta U}{\delta x} + \frac{\delta u U}{\delta x} \right) + \frac{1}{2} \left(v \frac{\delta U}{\delta y} + \frac{\delta v U}{\delta y} \right) \right]_{2i+1,2j}^{II} \\
 V_{2i,2j+1}^{II} &= V_{2i,2j+1}^I - \Delta t_2 \left[\frac{1}{2} \left(u \frac{\delta V}{\delta x} + \frac{\delta u V}{\delta x} \right) + \frac{1}{2} \left(v \frac{\delta V}{\delta y} + \frac{\delta v V}{\delta y} \right) \right]_{2i,2j+1}^{II} \\
 \phi_{2i,2j}^{II} &= \phi_{2i,2j}^I
 \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

3. 耗散过程

$$\left. \begin{aligned}
 U_{2i+1,2j}^{n+1} &= U_{2i+1,2j}^{II} + \Delta t_3 [k_1(\Delta^*U) - k_2U + \Phi F_x]_{2i+1,2j}^{II} \\
 V_{2i,2j+1}^{n+1} &= V_{2i,2j+1}^{II} + \Delta t_3 [k_1(\Delta^*V) - k_2V + \Phi F_y]_{2i,2j+1}^{II} \\
 \phi_{2i,2j}^{n+1} &= \phi_{2i,2j}^{II} + \Delta t_3 [k_3\Phi\Delta^*\phi]_{2i,2j}^{II}
 \end{aligned} \right\} \quad (18.7)$$

其中 Δ^* 是与 Laplace 算子 $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 对应的差分算子, (18.5)–(18.7) 中的各项的具体差分法从略 (可参见 [25])。不难看到上述方程组 (18.5) 和 (18.6) 是隐式的, 而 (18.7) 是显式的。我们可以证明这套差分格式完全保持了与 (18.3) 和 (18.4) 所相应的能量关系, 因此这套格式有较好的计算稳定性。

在计算中我们取 $\Delta t_1 = 4$ 分钟, $\Delta t_2 = \Delta t_3 = 20$ 分钟。我们已分别作了如下的数值试验: ①渤海 6 月份平均流计算 (取 $\Delta x = \Delta y = 12$ 公里); ②南海 1 月和 7 月平均流计算 (取 $\Delta x = \Delta y = 50$ 公里); ③南海定常台风下的海流计算 (取 $\Delta x = \Delta y = 50$ 和 25 公里)。

图 4 是实测的渤海 6 月表层流, 图 5 是考虑了渤海外流影响的计算风吹流。对比两张图, 不难看到主要的边界流系吻合得很好, 对于中心区的几个涡流, 由于缺少相应地区的实测资料, 所以难以论定。表 3 至表 6 是计算南海 7 月平均流时所得的一些数据。表 3 是每

表 3 能量变化表 (单位: cm^4/sec^4)

时 间 (hr)	总 能 量 $(U^2+V^2+\phi^2)/2$	总 动 能 $(U^2+V^2)/2$
0	$0.18618586 \times 10^{20}$	0
24	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.50983037×10^9
48	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.40762128×10^9
72	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.38819006×10^9
96	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.38354961×10^9
120	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.38219418×10^9
144	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.38173165×10^9
168	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.38155908×10^9
192	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.38149192×10^9
216	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.38146529×10^9
240	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.38145464×10^9
264	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.38145036×10^9
288	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.38144863×10^9
312	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.38144721×10^9
336	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.38144763×10^9
360	$0.18618586 \times 10^{20}$	0.38144750×10^9

表 4 海流 u 分量变化表

时 间 (hr)	u_{\max} (cm/s)	所在位置		时 间 (hr)	u_{\min} (cm/s)	所在位置	
		I	J			I	J
0							
24	0.48113289×10^1	27	10	24	-0.9167950×10^1	0	38
48	0.39611041×10^1	27	10	48	-0.91230252×10^1	0	38
72	0.36112973×10^1	27	10	72	-0.90883817×10^1	0	38
96	0.34708033×10^1	27	10	96	-0.90745203×10^1	0	38
120	0.34143832×10^1	27	10	120	-0.90689596×10^1	0	38
144	0.33917276×10^1	27	10	144	-0.90667265×10^1	0	38
168	0.33826298×10^1	27	10	168	-0.90658269×10^1	0	38
192	0.33789768×10^1	27	10	192	-0.90654637×10^1	0	38
216	0.33775098×10^1	27	10	216	-0.90653149×10^1	0	38
240	0.33769206×10^1	27	10	240	-0.90652527×10^1	0	38
264	0.33766848×10^1	27	10	264	-0.90652254×10^1	0	38
288	0.33765900×10^1	27	10	288	-0.90652126×10^1	0	38
312	0.33765515×10^1	27	10	312	-0.90652047×10^1	0	38
336	0.33765362×10^1	27	10	336	-0.90651987×10^1	0	38
360	0.33765296×10^1	27	10	360	-0.90651933×10^1	0	38

表 5 海流 v 分量变化表

时 间 (hr)	V_{\max} (cm/s)	所在位置		时 间 (hr)	V_{\min} (cm/s)	所在位置	
		I	J			I	J
0				0			
24	0.14521364×10^2	28	15	24	-0.72090838×10^0	0	9
48	0.14451132×10^2	28	15	48	-0.87321539×10^0	0	9
72	0.14424636×10^2	28	15	72	-0.92966032×10^0	0	9
96	0.14414083×10^2	28	15	96	-0.95263692×10^0	0	9
120	0.14409851×10^2	28	15	120	-0.96190137×10^0	0	9
144	0.14408152×10^2	28	15	144	-0.96562727×10^0	0	9
168	0.14407469×10^2	28	15	168	-0.96712451×10^0	0	9
192	0.14407194×10^2	28	15	192	-0.96772579×10^0	0	9
216	0.14407082×10^2	28	15	216	-0.96796704×10^0	0	9
240	0.14407037×10^2	28	15	240	-0.96806494×10^0	0	9
264	0.14407018×10^2	28	15	264	-0.96810289×10^0	0	9
288	0.14407010×10^2	28	15	288	-0.96811791×10^0	0	9
312	0.14407006×10^2	28	15	312	-0.96812427×10^0	0	9
336	0.14407004×10^2	28	15	336	-0.96812816×10^0	0	9
360	0.14407002×10^2	28	15	360	-0.96812786×10^0	0	9

表 6 海面起伏变化表

时 间 (hr)	H'_{\max} (cm)	所在位置		时 间 (hr)	H'_{\min} (cm)	所在位置	
		I	J			I	J
0				0			
24	0.81829653×10^1	18	36	24	-0.95424919×10^1	0	8
48	0.10220538×10^2	18	36	48	-0.13145503×10^2	0	8
72	0.10793577×10^2	18	36	72	-0.14607891×10^2	0	8
96	0.11011065×10^2	18	36	96	-0.15195572×10^2	0	8
120	0.11097876×10^2	18	36	120	-0.15431560×10^2	0	8
144	0.11132732×10^2	18	36	144	-0.15526298×10^2	0	8
168	0.11146752×10^2	18	36	168	-0.15564315×10^2	0	8
192	0.11152409×10^2	18	36	192	-0.15579554×10^2	0	8
216	0.11154706×10^2	18	36	216	-0.15585646×10^2	0	8
240	0.11155652×10^2	18	36	240	-0.15588067×10^2	0	8
264	0.11156058×10^2	18	36	264	-0.15589010×10^2	0	8
288	0.11156248×10^2	18	36	288	-0.15589359×10^2	0	8
312	0.11156350×10^2	18	36	312	-0.15589475×10^2	0	8
336	0.11156419×10^2	18	36	336	-0.15589498×10^2	0	8
360	0.11156473×10^2	18	36	360	-0.15589475×10^2	0	8

隔 24 小时一次的总能量及总动能。在所计算的 15 天中总能量几乎没有什么变化，而总动能却是十分缓慢地下降。表 4 至表 6 分别给出流速的两个分量和海面起伏的最大值、最小值以及它们所在位置，由表上可以看到它们的所在位置几乎没有变化，而其数值开始几天有所变化，大致到 240 小时左右也就变化很小了，也就是计算达定常状态了。总之这些计算结果表明我们所用的格式的确有非常好的计算稳定性，它是很适宜于做海流数值模拟使用的。

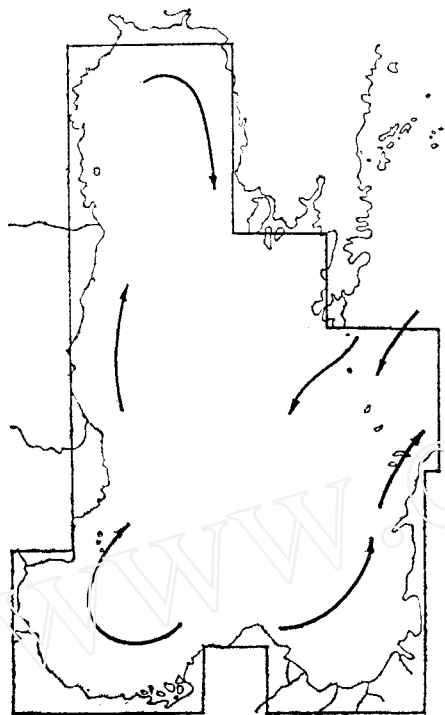


图 4 六月份表层海流 (实测)

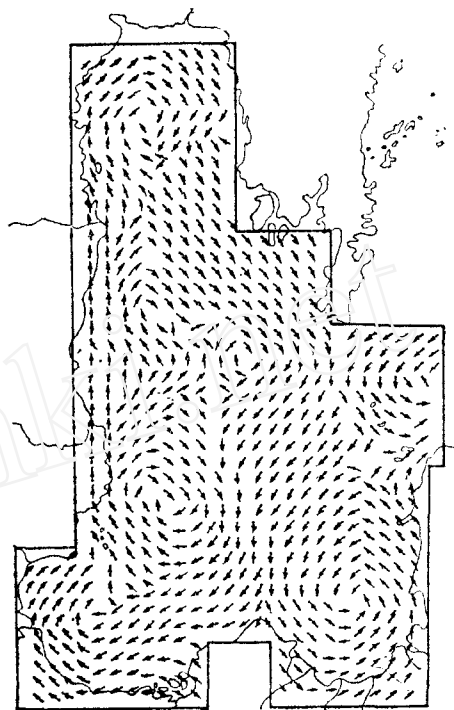


图 5 六月份风平均海流 (计算)

参 考 文 献

- 1 Phillips N. A., *The Atmosphere and the Sea in Motion*, Edited by B. Bolin, Rockefeller Institute, New York (1959): 501--504.
- 2 Richtmyer R. R., Morton K. W., *Difference Methods for Initial Value Problems*, Wiley Interscience (1969).
- 3 Shuman F. G., *Analysis and experiment in nonlinear computation stability*, NMC Office Note 94 (1974).
- 4 Kreiss H.-O., Oliger J., *Tellus*, **24** (1974): 199--215.
- 5 Orszag A., *J. Fluid Mech.*, **49** (1971): 75--112.
- 6 Arakawa A., *J. Comput. Phys.*, **1** (1966): 119--143.
- 7 Fornberg B., *Math. Comput.*, **27** (1973): 45--57.
- 8 Gary J., *Nonlinear instability*, GARP Publications Series No. 17, Numerical Methods Used in Atmospheric Models V. II (1979): 476--495.
- 9 李仲贞, 非线性计算不稳定的例子, *科学探索* (1981): 91--100.
- 10 —, 平流方程非线性计算稳定性分析, 第 1 届全国计算力学学术会议 (杭州) (1980).
- 11 曾庆存, 李仲贞, 发展方程的计算稳定性问题, *计算数学* (1981): 79--86.
- 12 李仲贞, 曾庆存, 发展方程差分格式的构造和应用, *大气科学* (1982): 88--94.
- 13 曾庆存, 李仲贞, 关于非线性计算稳定性的若干问题, *力学学报* (1981): 209--217.
- 14 李仲贞, 二维 Lilly 格式中非线性计算不稳定的例子, *科学通报* (1980): 890--892.

- 15 —, Arakawa 格式非线性计算不稳定的例子, 气象学报 (1981): 237—239.
- 16 —, Galerkin 有限元近似的非线性计算稳定性问题, 力学学报 (1984): 19—26.
- 17 —, 曾庆存, 谱展开法的非线性计算不稳定的例子, 科学通报 (1982): 1246—1248.
- 18 —, 耗散与计算稳定性 (I), 气象学报 (1985): 365—369.
- 19 —, 耗散与计算稳定性 (II), 大气科学 (1986): 68—67.
- 20 —, 非线性计算稳定性的比较分析, 大气科学 (1980): 344—354.
- 21 —, 非线性计算不稳定的分析和试验, 科学探索, 1 (1983): 64—74.
- 22 —, 非线性计算不稳定性, 大气科学 (1980): 111—119.
- 23 —, 平方守恒型差分格式的构造, 中期数值天气预报论文集, 姜达雍等编, 气象出版社 (1982): 77—86.
- 24 王宗皓, 预报方程差分格式的构造方法, 气象学报, 35, 4 (1965): 349—407.
- 25 曾庆存, 季仲贞, 李荣风, 袁重光, 刘兴泉, 渤海海流数值模拟, (主要内容于1984年全国地球流体力学学术会报告, 舟山).
- 26 季仲贞, 李荣风, 曾庆存, 徐学荣, 定常台风下南海海流的比较数值试验, 1984年南海石油开发环境报告会报告 (广州).
- 27 曾庆存, 季仲贞, 李荣风, 袁重光, 近岸海流数值计算研究, 大气物理所学术年会报告 (北京) (1984).
- 28 —, —, 袁重光, 原始方程差分格式的设计, 第2次全国数值天气预报会议论文集 (1980): 300—313.
- 29 —, 计算稳定性的若干问题, 大气科学 (1978): 181—191.
- 30 —, 季仲贞, 能量守恒律在差分格式构造中的应用, 地球物理所学术年会报告 (1965年2月).
- 31 —, 论原始方程差分格式的构造 (同上).
- 32 Lorenz E. N., *Tellus*, 12, 4 (1960): 364—373.
- 33 Jespersen D. C., *J. Comput. Phys.*, 16 (1974): 383—390.
- 34 Strang G, Fix G. J., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1973).

ON THE NONLINEAR COMPUTATIONAL INSTABILITY IN COMPUTATIONAL GEOPHYSICAL FLUID DYNAMICS

Ji Zhong-zhen

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

In past few years, several problems about nonlinear computational stability have been studied and discussed for the typical one-dimensional nonlinear advection equation $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, the two-dimensional vorticity equation

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \text{ and the nonlinear evolution equation } \frac{\partial F}{\partial t} + AF = G. \text{ In}$$

this paper, the following points are discussed:

1. More nonlinear computational instable examples of Richtmyer-type and of Fornberg-type are given.

2. The relations between the computational stability and the conservation property of energy are examined.

3. It is shown that nonlinear computational instability may occur even for "Lilly scheme" and "Arakawa scheme" of instantaneous energy conservation which are widely adopted in numerical weather prediction.

4. The problems of computational stability of those equations which arise in the Galerkin finite element method and the spectral method are discussed.

5. The effects of dissipation on computational stability are analysed.

6. The generation mechanism of nonlinear computational instability is discussed. Particularly, the effects of conservation property of energy and of initial value condition on the computational stability are emphasized.

7. Some methods for construction of the scheme of energy conservation are summarized.

8. The scheme of energy conservation is applied to the calculation of sea currents and satisfactory results of computation are obtained.

Keywords *computational geophysical fluid dynamics; geophysical fluid dynamics; nonlinear computational instability*

《中国科学院院刊》全国发行

本刊为中国科学院机关刊。主要任务是宣传党和政府关于发展科学技术事业的方针政策，评述科技发展趋势，增进社会各界对中国科学院的了解，沟通中国科学院与社会的联系，加强国际科技交流。所设栏目有：学科发展，工作研究，科学与社会，成果与应用，科学家，院所介绍，书刊评介，国际交流，档案库等。本刊为季刊(每季第二月的20日出刊)，科学出版社出版。1987年起由北京报刊发行局发行，全国各地邮局均可订阅。代号82-202。单价1.48元，全年5.92元。

《中国科学院院刊》编辑部供稿

《生物力学》杂志创刊

生物力学是多种学科相互渗透、相互结合产生的一门新兴边缘学科。它涉及生物、医学、工程、数学、力学、物理、化学等许多领域，在国内外发展异常迅速。为促进我国生物力学的发展，由上海科学技术大学等单位发起筹办了《生物力学》杂志，于1986年创刊，暂定每年两期，国内外公开发行。刊物主要登载创造性科研成果，强调生物力学的应用性，以骨科生物力学为其特色；同时刊登生物力学其余分支的文章，并开辟探索性研究、讲座、译文、文献索引、学术活动、消息报道等专栏。

《生物力学》杂志编辑部地址在上海嘉定上海科学技术大学，发行部地址在浙江杭州余杭镇余杭计量仪器厂。读者可分别向编辑部投稿和向发行部索取订单订阅。

屠冰