

## 均匀发热矩形物体的自然对流热传导

以自然对流方式冷却的铅垂等温平板的尾流问题是与电子设备的散热等现象相关联的。Yang<sup>[1]</sup> 曾用级数展开方法求解过这一问题，而 Hardwick<sup>[2]</sup> 等则用差分计算并用实验验证的方法处理过。他们都以有限高度不计厚度的平板为对象，另外，宫本等<sup>[3]</sup> 对 Grashof 数为  $2.7 \times 10^4$  以下有限厚的极短的铅垂平板的周围以及尾流区的自然对流进行了计算。本文给出了修正 Grashof 数为  $3.28 \times 10^4 - 1.22 \times 10^{10}$  的有限厚度铅垂平板（矩形体）尾流的数值解。

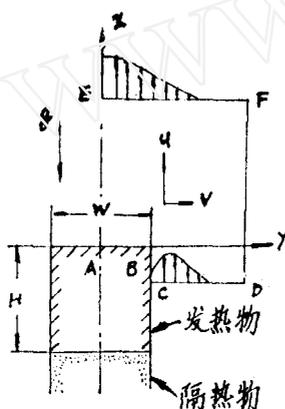


图 1 坐标系和计算范围

**1. 基本方程和数值解法** 考虑一截面为矩形的细长物体处于温度分布均匀的充分大流体空间中。长方体的一对侧边处于铅垂位置。设矩形体的铅垂侧面及上表面上的发热热通量  $q$  是均匀的，而下表面是绝热的。如图 1 所示，该物体的宽度为  $W$ ，高度为  $H$ ，取其上表面中央为原点，铅垂向上为  $x$  轴，与其垂直的轴为  $y$  轴。设流体的运动粘性系数  $\nu$ ，热导率  $\lambda$ ，平均体膨胀率  $\beta$  为常数，则流速  $u, v$ ，流函数  $\phi$ ，涡量  $\Omega$ ，温度  $T$  应该满足下列关系式：

$$-\omega = -\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + Gr_H^{*2/5} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{*2}} + Gr_H^{*2/5} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^{*2}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial(u^*\omega)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^*\omega)}{\partial y^*} = -Gr_H^{*2/5} \frac{\partial \theta}{\partial y^*} + \left(\frac{1}{Gr_H^*}\right)^{2/5} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^{*2}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(u^*\theta)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^*\theta)}{\partial y^*} = \frac{1}{Pr} \left[ \left(\frac{1}{Gr_H^*}\right)^{2/5} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \right] \quad (3)$$

这些无量纲方程中的无量纲量定义如下：

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x/H, & y^* &= Gr_H^{*1/5} y/H, & \psi &= \Psi/\nu Gr_H^{*1/5} \\ u^* &= \frac{u}{(\nu/H) \cdot Gr_H^{*2/5}} = \frac{\partial \psi}{\partial y^*}, & \omega &= \frac{\Omega}{(\nu/H^2) Gr_H^{*1/5}} \\ v^* &= \frac{v}{(\nu/H) \cdot Gr_H^{*1/5}} = -\frac{\partial \psi}{\partial x^*}, & \theta &= \frac{T - T_\infty}{(qH/\lambda) Gr_H^{*1/5}} \\ u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}, & v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, & \Omega &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ Gr_H^* &= g\beta q H^4 / \nu^2 \lambda, & Gr_W^* &= g\beta q W^4 / \nu^2 \lambda \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$g$  是重力加速度， $T_\infty$  是水平方向离物体充分远处的温度， $Gr_H^*$ ， $Gr_W^*$  分别是以物体高度  $H$  及宽度  $W$  为特征长度的修正 Grashof 数， $Pr$  为 Prandtl 数。

研究的现象在半无限空间,且对称于物体对称轴  $AE$ 。在铅垂面上,除物体拐角  $B$  附近外,可作为单独放置的铅垂平板考虑。我们对图 1 的  $ABCD FE$  范围内进行了数值计算,其边界条件如下:

$$\text{向上水平面 } AB: u^* = 0, v^* = 0, \psi = 0, \omega = -\partial^2 \psi / \partial x^{*2}, \partial \theta / \partial x^* = -Gr_H^{*1/5} \quad (5)$$

$$\text{铅垂平面 } BC: u^* = 0, v^* = 0, \psi = 0, \omega = -Gr_H^{*2/5} \partial^2 \psi / \partial y^{*2}, \partial \theta / \partial y^* = -1 \quad (6)$$

$$\text{对称轴 } AE: \partial u^* / \partial y^* = 0, v^* = 0, \psi = 0, \omega = 0, \partial \theta / \partial y^* = 0 \quad (7)$$

水平方向无限远处(边界层外缘)  $DF$ : 在水平方向吸进流体

$$u^* = 0, \partial v^* / \partial y^* = 0, \partial \psi / \partial y^* = 0, \omega = -\partial^2 \psi / \partial x^{*2}, \theta = 0 \quad (8)$$

铅垂向上远方  $EF$ : 认为形成边界层的流动

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= 0, \quad u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = \theta + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \\ u^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial y^*} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}}, \quad \psi = \int_0^{y^*} u^* dy^* \\ \omega &= \partial v^* / \partial x^* - Gr_H^{*2/5} \partial u^* / \partial y^* \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

但是,当  $y^* = 0$  时,  $\partial u^* / \partial y^* = v^* = \partial \theta / \partial y^* = 0$ ; 当  $y^* \rightarrow \infty$  时,  $u^* = \theta = 0$

水平流体流入面  $CD$ : 流动是边界层流动,并且不考虑下游流动对上游流动的影响,因此可以用从均匀发热的铅垂平板的相似解得到温度、流函数、涡量等结果。

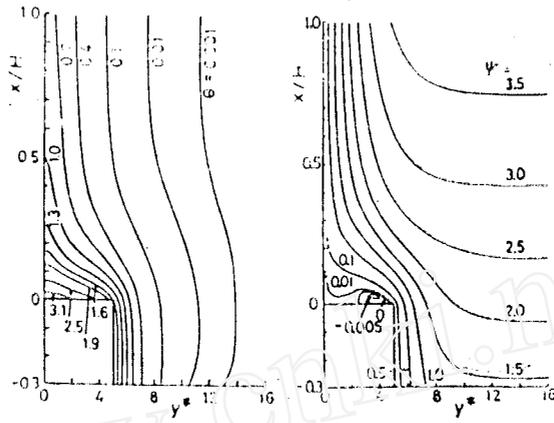
对以上式(1) — (9)进行差分近似分析和数值计算。在物体上表面( $x = 0$ )以及物体拐角( $y = W/2$ )附近用细的差分网格,愈靠近  $DF$ ,  $EF$  就用愈粗的不等间隔差分网格。另外,式(2)的惯性项以及式(3)的对流项上风差分,其它项用三点近似(中心差分)计算,对式(4)的速度  $u^*$ ,  $v^*$  以及物体表面温度计算,采用5点近似计算。在物体拐角  $B$  处,从  $x$  方向和  $y$  方向两个方向计算表面温度和涡量。本计算中取表面温度和涡量的算术平均值作为拐角  $B$  处的值。在数值计算过程中,依据通过任意高处水平截面的总热量应等于物体的全部发热量这一点进行热量校核,因此,必须验算下式两边是在何种程度上相等:

$$\int_0^{\infty} \left[ u^* \theta + \frac{1}{Gr_H^{*2/5} Pr} \left( -\frac{\partial \theta}{\partial x^*} \right) \right] dy^* = \frac{1}{2 Pr} \left( 2 + \frac{W}{H} \right) \quad (10)$$

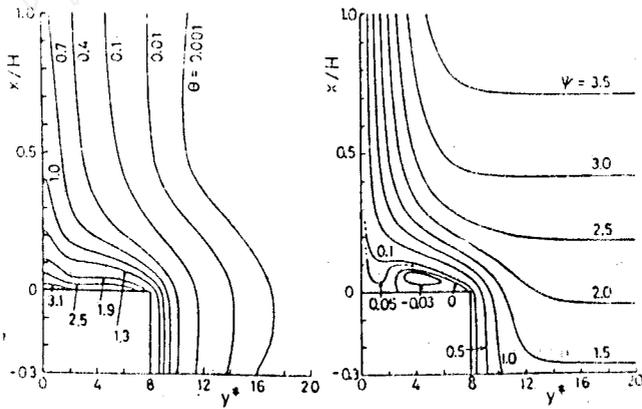
计算时用逐次松弛法,松弛系数在式(1), (3)中取0.6—1.0,在式(2)中取0.3—0.5进行反复计算,直到其中各自的相对误差收敛到0.01%以下为止。

**2. 数值计算结果与讨论** 按  $Pr = 0.7$ ,  $H/W = 1, 2, 4, 6$ ,  $Gr_H^* = 3.28 \times 10^4$ — $1.22 \times 10^{10}$  进行数值计算。计算范围是图1的  $CD$  面用  $x^* = -0.3$ ,  $EF$  面用  $x^* = 2$ ,  $DF$  面用  $y^* = y_{w/2}^* + (10-12)$ 。其中  $y_{w/2}^* = Gr_H^{*1/5} W/2H$  是相当于物体表面  $BC$  的无量纲长度。式(10)两边用  $x^* = 2$  时计算结果达到一致,其相对误差在3%以下。

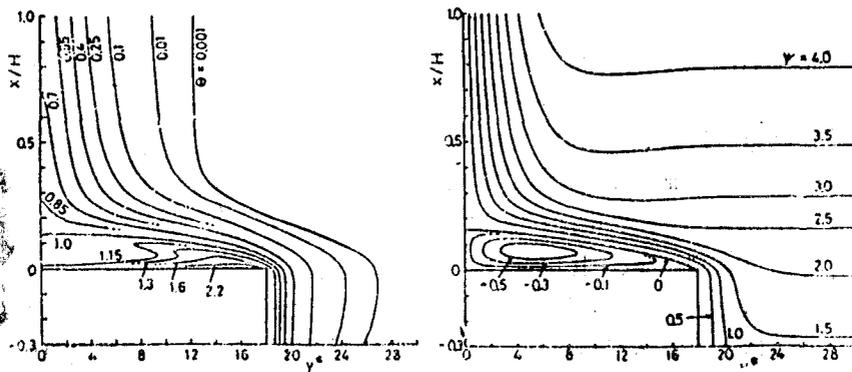
图2(a) — (c)表示出在各种  $H/W = 2$  的情况下,不同  $Gr_H^*$  的三个例子的等温线和流线。沿铅垂面流动的流体,在物体拐角  $B$  处分离,而且在物体上面形成涡旋。在物体上面边界产生的涡随  $Gr_H^*$  的增加而增强,并发展到覆盖整个物体上表面。因此,当沿铅垂面流动的流体绕流到上表面时,就形成了覆盖上表面的热流体,以致阻碍传热。如果  $Gr_H^*$  相等,涡的大小也大致相等,那么物体上表面是全部还是部分覆盖涡流,依物体形状  $H/W$  的不同而异。再则,象图2(c)那种情况,在产生强烈涡旋运动范围内,等温线则向流动方向畸变。



(a)  $H/W=2$ ,  $Gr_H^* = 3.20 \times 10^6$



(b)  $H/W=2$ ,  $Gr_H^* = 3.36 \times 10^7$



(c)  $H/W=2$ ,  $Gr_H^* = 1.93 \times 10^9$

图 2 等温线和流线

图 3 表示沿对称轴的温度分布和速度分布。点线表示与物体产生的全部发热量  $q(W +$

2H)等量的绕热源放置在物体上方中央(图1的A点)处的 Fujii<sup>[4]</sup>的分析结果。在物体表面附近,视涡旋运动状态和强度的不同,它们的分布形状也将不同。沿铅垂方向离物体愈远,物体的形状对浮力流动的影响就愈弱,就可以认为物体和集中热源有同等效果,这种情况下,本解析结果就趋向于线热源的结果。

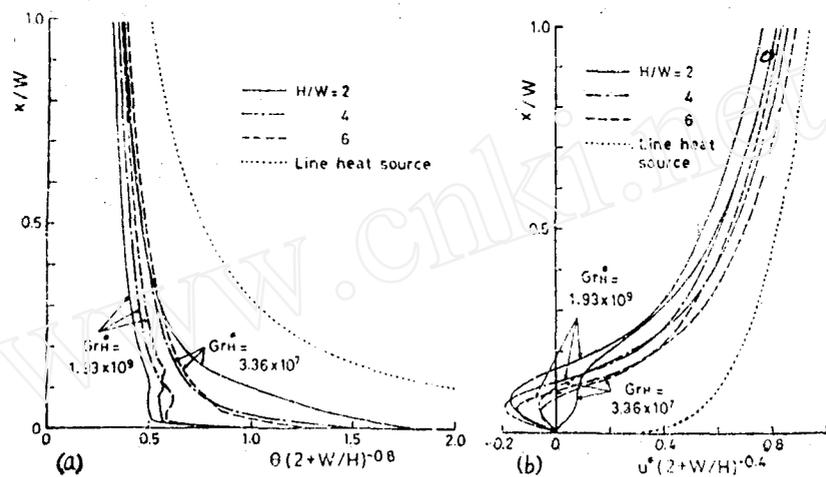


图3 沿对称轴的温度分布和速度分布  
(a) 温度分布 (b) 速度分布 .....线热源

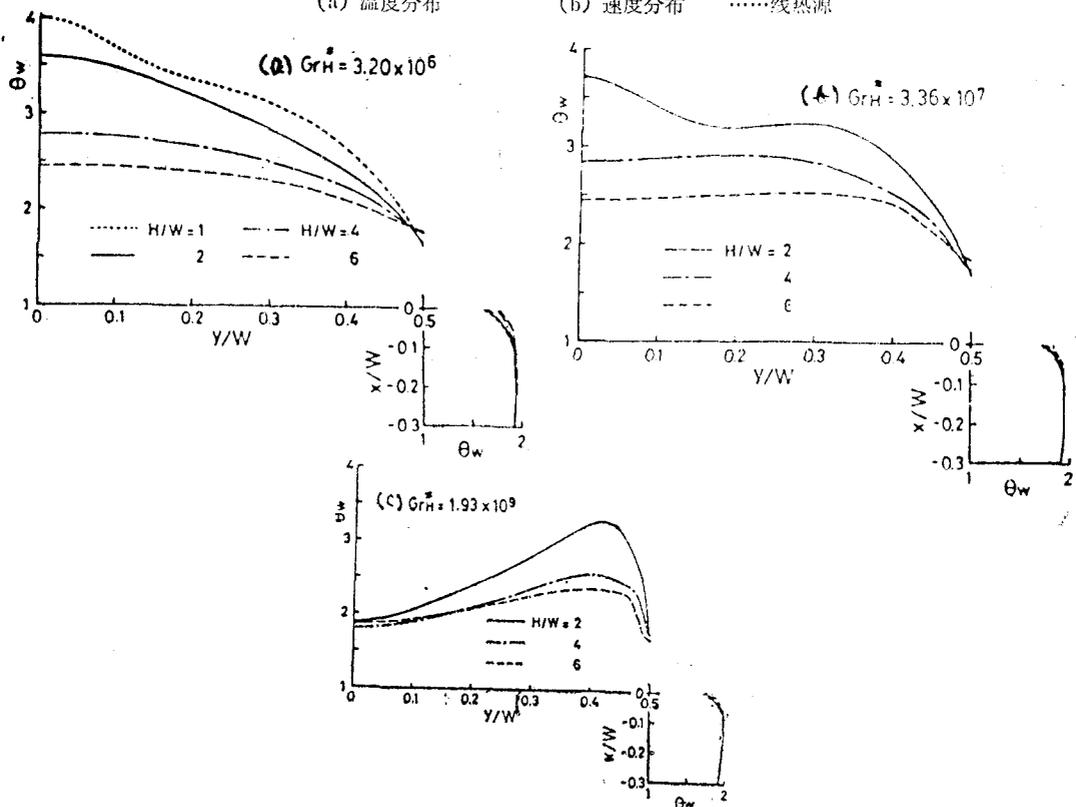


图4 物体表面的温度分布

图4表示物体无量纲表面温度 $\theta_w$ 的分布。在上端( $x/H > -0.15$ )附近,铅垂表面温度稍微小些,而在 $x = 0 \sim -H$ 附近,平均温度与单独的铅垂平板相比,变化程度仅为0.7—2%。上表面的温度分布根据上面涡旋的状态和强度有很大的差异。在 $Gr_H^* = 3.20 \times 10^6$ 情况下,涡旋运动较弱,只发生在上部靠边缘处。表面温度从物体边缘向中央单调增加,中央即为最高温度。在 $Gr_H^* = 3.36 \times 10^7$ 情况下,涡旋运动稍强,表面温度大致一样。在 $Gr_H^* = 1.93 \times 10^9$ 情况下,涡旋运动很强,由于涡旋运动将较冷的流体带进,因此中央附近表面温度降低,在表面上,被加热的了的暖流运动到端部使表面温度变高。产生表面温度最高的位置是随着 $Gr_H^*$ 增大而向物体边缘方向移动。

用物体上表面(向上的水平面)温度的平均值 $T_{wm}$ 和水平方向充分远处流体温度 $T_\infty$ 之间的温度差,我们定义平均传热系数 $\alpha_w = q / (T_{wm} - T_\infty)$ 。据此可以用下式计算平均Nusselt数 $Nu_w$ :

$$\left. \begin{aligned} Nu_w &= \frac{\alpha_w W}{\lambda} = \frac{1}{\theta_{wm}} \frac{W}{H} Gr_H^{*1/5} \\ \theta_{wm} &= \frac{1}{y_{w/2}^*} \int_0^{y_{w/2}^*} \theta(0, y^*) dy^* \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

在均匀发热的情况下,一面绝热的向上水平面的一部分宽 $W$ 上,其平均Nusselt数和最高的表面温度 $T_{wmax}$ 之间有如下关系式<sup>[6]</sup>:

$$Nu_w / Gr_w^{*0.188} = 0.60 \quad (Pr = 0.7) \quad (12)$$

$$(T_{wmax} - T_\infty) Gr_H^{*0.175} / (qW/\lambda) = 1.95 \quad (Pr = 0.7) \quad (13)$$

在象本文分析的矩形物体中,因为铅垂面存在的影响,物体上表面的平均热导率和最高的表面温度,随着 $Gr_H^*$ 的变化如图5和图6所示。一般地说,与仅仅一部分发热的水平平板相比,本分析中的平板上表面的平均热导率变小,最高的表面温度升高,在 $Gr_H^* \approx 2 \times 10^7$ 时,这种情况最为显著。

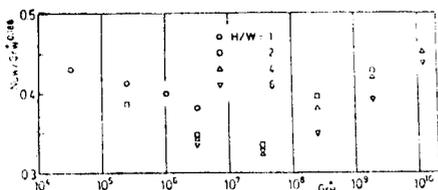


图5 平均Nusselt数

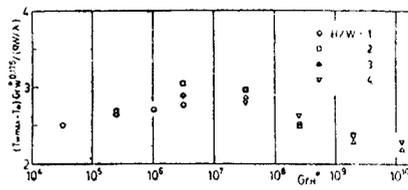


图6 表面的最高温度

#### 参考文献 (5篇, 略)

刘斌译自: 竹内正纪、部谷尚道、木村照夫、田中义树, 第20届日本传热学术会议论文集(1983): 91—93。(杨炳仁 魏庆鼎校)