

非线性振动系统周期运动及其 稳定性的数值研究*

凌复华

(上海交通大学工程力学系)

主题词 周期运动; 稳定性; 数值方法; 直接数值方法; 快速伽辽金法; 点映射法

§ 1 引言

确定型非线性振动系统的运动可分类如下:

1. 非定常运动; 2. 定常运动: (1) 周期运动, (2) 各态历经运动, (3) 浑沌运动。其中非定常运动是一暂态过程, 会随着时间的增长逐步衰减乃至实际上消失。定常运动中的各态历经运动, 指系统至少有两个互不通约(即其比值为无理数)的振动频率, 因此运动虽然局限于某个范围内, 却不能呈现精确的周期运动, 其相轨线在相空间的某一区域内稠密分布, 这种运动在文献中也常被称为概(准)周期(quasiperiodic, almost periodic)运动。Arnold/Avez (1968)对各态历经运动有深入的说明。浑沌运动则指系统的一种奇怪运动状态, 既无周期性, 又无各态历经性。这种运动状态最早在60年代后期引起人们的注意(Ueda/Hayashi 1973), 因它也在生态系统、社会系统和许多物理、化学系统中出现, 从70年代以来引起了广泛的兴趣, 有关的文献很多, 中文的也在迅速增加, 例如参看凌复华(1982b)、郝柏林(1983)和朱照宣(1984)的综述文章。注意二维常微分方程系统和线性系统中不存在浑沌运动。

研究最多, 也是在实践中最为常见的定常运动状态是周期运动。虽然上述另外两类定常运动状态日益引起人们的注意, 但至少对于弱非线性振动系统, 自激振动系统和参数激励振动系统, 周期运动具有头等重要性。对它的定量计算, 传统采用的是以种类繁多的摄动法为代表的近似分析方法, 其优点是: 通过少量计算即能得到有关解的性质及其与一些参数之间定量关系的一个概貌。但它有一个内在的缺点: 计算精度不可能很高。如果为了提高精度而在近似展开式中取较多的项, 则一是推导和计算工作量都会大大增加, 二是这样得到的解与参数之间的关系不再明白易见, 从而失去了分析方法的主要优点。除此之外, 分析方法的应用还受到以下几个实质性的限制:

* 第3届全国非线性振动学术交流会(1983年10月12—17日, 天津)大会报告, 略有补充和修改。

1. 非线性多半不能很强,因为这些方法的基础几乎总是在于对线性解作修正;
2. 非线性一般需用解析函数表达,因为用分析方法处理非解析函数总是困难的;
3. 对多自由度系统,用分析方法一般只能求一阶近似解,求高阶近似解的工作量太大。

随着电子计算机的广泛采用和计算数学的迅速发展,通用性强、精度高的数值方法有着极其广泛的前途。适用于非线性振动系统定常运动计算的数值方法主要有两类。一类基于把待求的解近似地展开为三角级数,以 Галёркин 法为代表。另一类基于常微分方程直接数值积分,又可以分为两种,一种在积分过程中不加干预,以点映射法为代表,其中的新发展是徐皆苏等 (Hsu 1980, 1981, 1982; Hsu/Guttalu 1980; Hsu/Guttalu/Zhu 1982; Hsu/Kim 1984; Kreuzer 1984) 的胞映射法和广义胞映射法;另一种采用打靶法技巧加速收敛到周期解,我们称之为直接数值方法 (Ling 1981)。以上这些数值方法的适用范围和计算效果见表 1。其中周期已知的情況为强迫振动,周期未知的情况为自由振动和自激振动。

表 1 几种数值方法及其适用范围

效 果 方 法	解的类型		周期解(包括高、分和高分周期解*)				各态历经解	浑沌解
			稳 定		不 稳 定			
			周 期 已 知	周 期 未 知	周 期 已 知	周 期 未 知		
	有 阻 尼	无 阻 尼						
Галёркин 法	低 精 度 时 较 好						简单时可用	不 适 用
点 映 射 法	较 差	不 适 用					适 用	
直 接 数 值 方 法	好						不 适 用	

* 设基本周期解(例如由激振力引起的)周期为 T , 又设 m, n 为互质的正整数, 则高周期解的周期为 nT , 也称为次谐波; 分周期解的周期为 T/n , 也称为超谐波; 高分周期解的周期为 mT/n , 也称为超次谐波。

由表 1 可见, 直接数值方法最适合用来研究周期解, 本文将重点予以介绍; 本文也将介绍 Галёркин 法, 它当求解精度较低时比较适用。点映射法不宜用来求周期解, 但适用于研究全局性态和浑沌性态。

§ 2 用直接数值方法求周期解

§ 2.1 概述 用直接数值积分来求解非线性振动方程虽是一种自然的途径, 但它的前提是计算机的应用。因此, 在较早的非线性振动专著中仅 Cunningsams (1958) 提及了初值问题的数值方法, 用以求非定常运动。在以后的文献中常沿用这种方法, 等待进入定常运动状态而得到周期解, 这也就是点映射法, 这样不仅效率低而且不能求得不稳定周期解。另一方面, 求周期解可以归结为求解常微分方程两点边值问题

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) - x(T) = 0 \quad (1)$$

其中 T 是振动周期, x 为 n 维向量。早在 50 年代, Urabc (1957) 就给出了求解非自治系统周期解的一种计算步骤, 这种步骤可以看作这里所述的直接数值方法的雏型, 但他并未作实

际数值计算。Urabe (1958, 1967) 和 Urabe et al (1959) 也给出了求自治系统周期解的数值步骤, 并对 Van der Pol 方程作了详细的计算。但他对待定周期 T 的处理方法不甚妥当, 因而计算十分繁复, 精度也低。近年来, Ruf (1978) 用直接数值方法计算了 Duffing 方程的共振曲线。凌复华 (1981) 较为全面地发展和论述了直接数值方法, 又见凌复华 (1982b, 1983b, 1984b)。Mayer (1981) 和凌复华 (1984a) 和凌复华/周鉴如/张超明 (1983) 还把直接数值方法用于求解分段线性非线性系统。

§ 2.2 一般非线性振动系统 两点边值问题 (1) 可用打靶法有效地解算。这时引入 m 维参数向量 s (常取 $m=n$), 取定 s 的值, 也就取定了相应的 $x(0)$ 值, 常微分方程就有了足够的初始条件而可作为初值问题计算。然后根据边界条件来迭代改进 s , 直到精度要求满足, 从而也就相应地得到了足够精度的 $x(0)$, 而可毫无困难地得到精确周期解的数值解。事实上, 振动周期 T 已知 (如强迫振动和参数振动) 的情况相应于固定边界而可选择 $s = x(0)$ 。否则 (如自由振动和自激振动) 是自由边界, 应把 T 包括在 s 之中, 上述迭代求解过程示意地在图 1 中给出。

把(1)改写成

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x; g(s)) \\ r(s) &= x(0; s) - x(T; s) = x^0 - x^T = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

向量函数 $g(s)$ 描述微分方程对参数向量的依赖性, 当 $m=n$ 时改进 s 可用例如 Newton 法

$$s^{i+1} = s^i - r'(s^i)^{-1} r(s^i) \quad (3)$$

其中上标记迭代序号, $r'(s^i)$ 是向量函数 $r(s)$ 的 Gateau 导数, 或称为函数矩阵:

$$r'(s) = \begin{pmatrix} \partial r_1 / \partial s_1 & \cdots & \partial r_1 / \partial s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial r_n / \partial s_1 & \cdots & \partial r_n / \partial s_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中下标指向量的分量序号。于是由 (2), Gateau 导数 (4) 可以写成

$$\frac{\partial r(s)}{\partial s} = \frac{\partial x^0}{\partial s} - \frac{\partial x^T}{\partial s} - \frac{\partial x^T}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial s} \quad (5)$$

(5) 中的最后一项反映了振动周期的可变化性。注意这种处理方法与通常的引入新变量以把自由边界化为固定边界的方法 (Stoer/Bulirsch 1978) 不同。通常的方法不但增加了变量个数而且提高了方程的非线性程度, 这对分段线性系统特别不利。

注意到 $\partial x^T / \partial T = \dot{x}(T) = f(T, x; s)$, (5) 可以改写成

$$\frac{\partial r(s)}{\partial s} = \frac{\partial x^0}{\partial s} - \frac{\partial x^T}{\partial s} - f(T, x; s) \frac{\partial T}{\partial s} \quad (6)$$

其中 $\partial x^0 / \partial s$ 可以根据 s 的意义写出, 例如取 $s = x^0$, 则 $\partial x^0 / \partial s = I$, 再如 s 中有 T 或 Ω 出

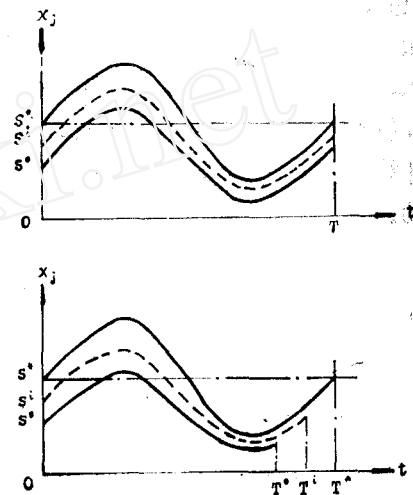


图1 打靶法求周期解示意图

现, 则 $\partial \mathbf{x}^0 / \partial \mathbf{s}$ 中相应的一列元素全部为零。另一方面, $\partial \mathbf{x}^T / \partial \mathbf{s}$ 是以下矩阵常微分方程:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} \right)^{\bullet} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{s}}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} \right)^{\bullet}_{t=0} = \frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial \mathbf{s}} \quad (7)$$

的解当 $t = T$ 时的值。矩阵方程 (7) 可以按列解算, 解算时需利用由边值问题 (1) 转化来的初值问题 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ 的解 (实际上常是同时解算的)。

根据问题的物理本质和求解的方便, 有时也取 $m > n$ 或 $m < n$, 这时由边界条件得到的 \mathbf{s} 的定值方程分别是亚定的或超定的, 即有无穷个解或无解。对 $m > n$ 的情况可求 \mathbf{s} 的迭代始值近旁的解, 而对 $m < n$ 的情况则可求最小二乘解, 可参看有关文献, 不在此赘述。

§ 2.3 例 考察 Duffing 方程

$$\ddot{x} + 2D \dot{x} + x + \alpha x^3 = P \cos \Omega t, \quad \Omega = 2\pi/T$$

把它写成状态方程的形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2Dx_2 - x_1 - \alpha x_1^3 + P \cos \Omega t \end{bmatrix}$$

而周期解需满足的边界条件是

$$x_1(0) - x_1(T) = 0, \quad x_2(0) - x_2(T) = 0$$

取参数向量为 $\mathbf{s} = [x_1(0) \ x_2(0) \ \Omega]^T = [x_1^0 \ x_2^0 \ \Omega]^T$, 则

$$\frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\pi a}{\Omega^2} \end{bmatrix}$$

于是 Gateau 导数 (6) 可以写成

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\partial x_1}{\partial x_1^0} \Big|_{t=T} & -\frac{\partial x_1}{\partial x_2^0} \Big|_{t=T} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial x_1^0} \Big|_{t=T} & 1 - \frac{\partial x_2}{\partial x_2^0} \Big|_{t=T} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial \Omega} \Big|_{t=T} + \frac{2\pi}{\Omega^2} x_2(T) \\ -\frac{\partial x_2}{\partial \Omega} \Big|_{t=T} - \frac{2\pi}{\Omega^2} (2Dx_2(T) + x_1(T) + \alpha x_1^3(T) - P) \end{bmatrix}$$

而确定

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial x_1^0 & \partial x_1 / \partial x_2^0 & \partial x_1 / \partial \Omega \\ \partial x_2 / \partial x_1^0 & \partial x_2 / \partial x_2^0 & \partial x_2 / \partial \Omega \end{bmatrix}$$

的矩阵微分方程初值问题 (7) 为

$$\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} \right]^{\bullet} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + 3\alpha x_1^2) & -2D \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Pt \sin \Omega t \end{bmatrix}$$

§ 2.4 附注 1. 当 Gateau 导数 (4) 的形式过于复杂时, 也可用差商

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \frac{r_1(s_1 + \Delta s_1) - r_1(s_1)}{\Delta s_1} & \dots & \frac{r_1(s_n + \Delta s_n) - r_1(s_n)}{\Delta s_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{r_n(s_1 + \Delta s_1) - r_n(s_1)}{\Delta s_1} & \dots & \frac{r_n(s_n + \Delta s_n) - r_n(s_n)}{\Delta s_n} \end{bmatrix}$$

近似地代替它,但这时 Δs_i 大小的选择很重要。 Δs_i 太大,则近似程度不好; Δs_i 太小,则因出现大数相减而同样影响精度。无论如何,这时 Newton 法的(局部)二次收敛性不再保持而常常只是(局部)一次收敛的。因此建议尽可能不要作这种近似。

2. 当周期 T 未知时,既可选 T 为 s 的一个分量。也可选 Ω 为 s 的一个分量,其差别只在二次小量。但由 Newton 方法的二次收敛性,此差别有时会造成很大影响。经验表明,计算自激振动时应取 T 为 s 的一个分量,而计算强迫振动时应取 Ω 为 s 的一个分量。

3. 计算自治系统的自激或自由振动时,一般取参数向量为

$$s = [T, x_2(0), x_3(0), \dots, x_n(0)]^T$$

即计算 $\partial r / \partial s$ 的相应初值问题的第一列,是在平凡初始条件下求解自治方程,这样得到的显然只是平凡解,因此可以根本不计算而直接得到这一列为

$$\partial r / \partial s_i = -[\dot{x}_1(T), \dot{x}_2(T), \dots, \dot{x}_n(T)]^T = -f(T, x(T))$$

4. 不稳定周期解 用打靶法很容易求得不稳定周期解,仅当解极不稳定而出现大数溢出时才失败。这时可采用双向打靶法,即若由 $t=0$ 向前积分,若在 $t=\alpha T (0 < \alpha < 1)$ 处发现某一 $x_i(\alpha T)$ 过大,则改由 $t=0$ 向后积分到 $t=(\alpha-1)T$ 处。这时(2)中的边界条件为

$$r(s) = x(\alpha T; s) - x((\alpha-1)T; s) = 0$$

相应地, Gateau 导数(6)为

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(s)}{\partial s} = & \frac{\partial x(\alpha T; s)}{\partial s} - \frac{\partial x((\alpha-1)T; s)}{\partial s} + [af(\alpha T; x(\alpha T, s)) \\ & - (a-1)f((\alpha-1)T; x((\alpha-1)T, s))] \frac{\partial T}{\partial s} \end{aligned}$$

§ 2.5 分段线性非线性系统 这里所谓的分段线性系统是指系统的方程是分段线性的,亦即在不同的位移和速度域中,线性方程的系数值有所不同。通常认为不同域交接处的位移连续但速度和加速度不一定连续。对这类系统当然也可以按上节所述的方法借助数值积分进行计算,但计算工作量较大,且在分段处由于不光滑性而增加了计算的困难。因此,比较好的方法是利用系统的分段线性特点,把每一段中的解用分析公式表示,再拼凑联结成待求的周期解。这种做法,编程序的工作量稍大,但计算工作量小得多,精度也得以保证。每一段中的线性系统常用模态分析方法处理,即把多自由度系统

$$M \ddot{x} + D \dot{x} + Kx = P \cos \Omega t$$

通过坐标变换 $y = \Phi x$ 解耦为若干个单自由度系统

$$m_i \ddot{y}_i + d_i \dot{y}_i + k_i y_i = P_i \cos \Omega t$$

然后再变换到原坐标 x 。当自由度数较大时,可以取前若干阶振型而大大简化计算,实际上不影响精度。注意每一段中的变换矩阵 Φ 是不同的,需由相应的特征值问题求出。

应当指出,线性系统可通过实变换解耦的充要条件是

$$DM^{-1}K = KM^{-1}D$$

若这一条件不能满足,则只能近似地解耦或直接根据耦合方程进行计算。还需注意的一点是当恢复力或阻尼力在分段处间断时, Gateau 导数也是间断的。例如恢复力如图 2 所示单自

由度系统的振动方程是

$$\ddot{x} + K_1 x [1 - \eta(x - \alpha)] + [K_2 x + \Delta F - (K_2 - K_1)\alpha] \cdot \eta(x - \alpha) = 0$$

其中 $\eta(x - \alpha)$ 是阶跃函数, 则 Gateau 导数满足的方程

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)'' + K_1 \frac{\partial x}{\partial q} [1 - \eta(x - \alpha)] - K_1 x \delta(x - \alpha) \frac{\partial x}{\partial q} \\ + K_2 \frac{\partial x}{\partial q} \eta(x - \alpha) + [K_2 x + \Delta F \\ - (K_2 - K_1)\alpha] \delta(x - \alpha) \frac{\partial x}{\partial q} = 0 \end{aligned}$$

$\delta(x - \alpha)$ 是脉冲函数。计算表明, 在 $x = \alpha$ 或 $t = t_a$ 处 $\partial x / \partial q$ 连续而 $(\partial x / \partial q) \cdot$ 间断, 跳跃量为

$$\Delta \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) \cdot \Big|_{t_a} = \Delta F \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) \cdot \Big|_{x(t_a)}$$

§ 2.6 其他

1. 所求得的周期解最好用 Fourier 级数表示, 以便看出各阶谐波分量的作用, 确定振幅和相位移也比较方便。求 Fourier 系数时需用数值方法计算定积分, 这时采用 Gauss 方法的效果比采用 Romberg 方法为好。

2. 有时可利用方程的某种对称性而大大简化计算, 例如对以下形式的方程:

$$\dot{x} + f(x) = g(t), \quad f(x) = -f(-x), \quad g\left(t + \frac{T}{2}\right) = -g(t)$$

容易证明它的周期为 T 的解有性质 $x_1(t + T/2) = -x_2(t)$, 从而往往只需在半个周期内求解。例如 Duffing 方程和 Van der Pol 方程都属此类。

3. 参数向量 s 的迭代始值, 可参考已有的解 (如线性解或小参数解) 给出。当求一系列周期解 (例如响应曲线) 时, 也可参考已求得的周期解用插值方法推算。经验表明, 择优选用线性或二次插值公式的效果最好。另外, 这时也应按需要变换自变量, 如图 3, 在响应曲线的平坦段 (ab), 应取频率 Ω 为自变量, 而在陡峭上升段 (cd), 应取振幅 A 为自变量。两点之间的间隔也应有所变动, 在曲率较大处间隔小而在曲率较小处间隔大, 也见图 3。

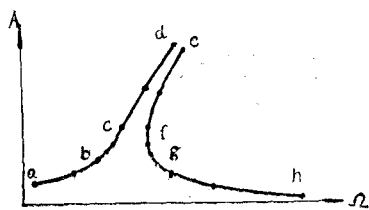


图 3 典型非线性振动响应曲线

4. 直接数值方法的误差主要是计算公式的截断误差以及计算机中的舍入误差, 可借助数值试验用半经验方法估计。

§ 2.7 算例 例 1 一个二自由度三次非线性振动系统自由振动的稳定性。

Rosenberg/Atkinson (1959) 曾对这个系统进行了近似计算和实验研究。在 13 个不同参数的振动系统中, 有 9 个系统的数值近似解和实验结果均相符合, 而在其余 4 个系统中, 仅数值解与实验解相符合, 见图 4, 实验只是对小振幅进行的, 否则极有可能揭示出图 4 所示的数值解多余不稳定段。

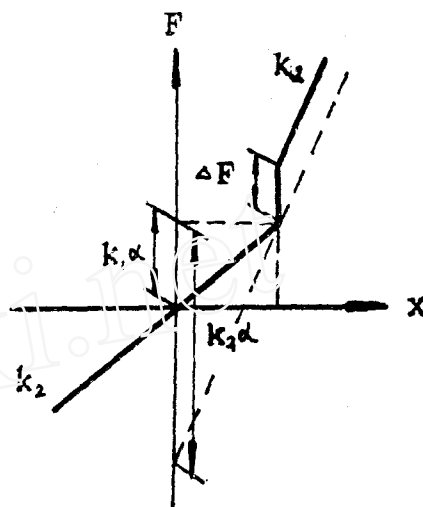


图 2 分段线性恢复力

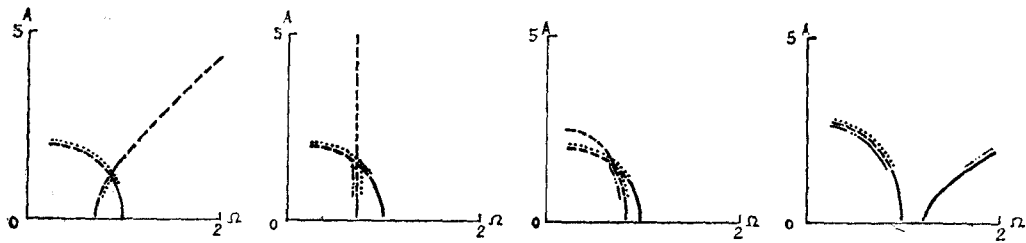


图4 二自由度Duffing 振子模式脊线

$$\begin{cases} \ddot{x}_i + a_1 x_i + a_3 x_i^3 = 0 \\ \ddot{x}_0 + (a_1 + 2A_1)x_0 + (a_3 + 8A_3)x_0^3 = 0 \end{cases}$$

——— 稳定 } 数值解 - - - 不稳定 (近似解) } Rosenber/Atkinson (1959)
 - - - 不稳定 } ····· 不稳定 (实验)

例2 一个二自由度系统的自由振动和强迫振动。

Sethna (1960) 计算了这个系统的近似解并进行了实验, 他的结果与数值解见图5。由数值解可以看出振动形式的变化极其复杂。显然, 近似解只能在很小的范围内适用。

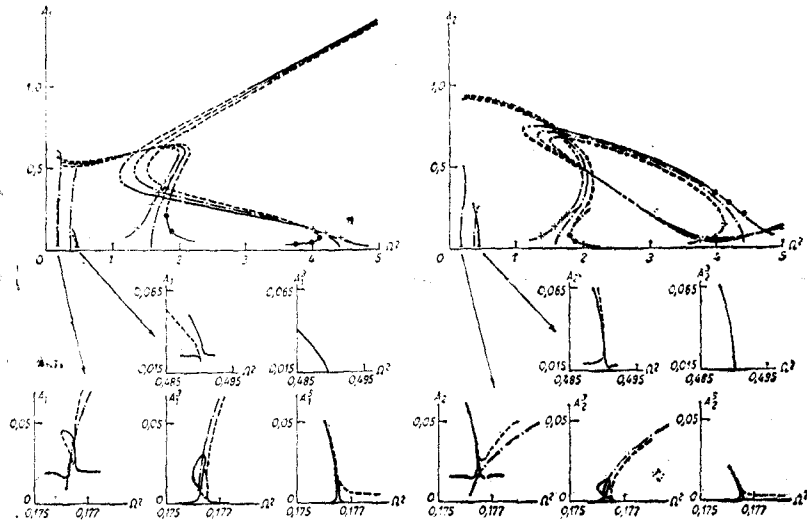


图5 二自由度系统的共振曲线和脊线

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + 3x_1^3 + (x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)^3 = 0.02 \cos \Omega t \\ \ddot{x}_2 - (x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)^3 + 3x_2 - 4x_2^3 = 0.04 \cos \Omega t \end{cases}$$

——— 稳定 } 数值解 - - - 近似解
 - - - 不稳定 } + 实验值 (同相)
 - · - 脊线 ⊕ 实验值 (反相) } Sethna (1960)

A_j 质量 j 的振幅

例3 一个二自由度二次和三次非线性振动系统的组合频率共振。

van Dooren (1973) 求出了这个系统的近似解和 Галёркин解 (图6)。由图可看出这类组合频率共振的一个明显特点——共振峰只对一个质量出现。由图也可明显看出，近似解不能描述这种较为复杂的现象。用 Галёркин法也能达到较高的精度，参见 § 4。

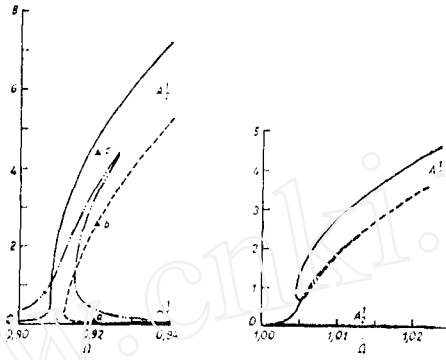


图6 二自由度系统组合频率共振曲线

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 0.002\dot{x}_1 + x_1 + 0.0002x_1x_2 + 0.003x_1^3 = 3.5\cos 2\Omega t + 6.5\cos 3\Omega t \\ \ddot{x}_2 + 0.0015\dot{x}_2 + 0.81x_2 + 0.003x_1x_2 + 0.002x_2^3 = 4\cos 2\Omega t + 13\cos 3\Omega t \end{cases}$$

A_j : 质量 j 一次谐波振幅 ——— 稳定 } 数值解 - - - 近似解 } van Dooren (1973)
 - - - 不稳定 } △ Галёркин解 }

例4 滞后特性系统的自由振动和强迫振动。

所述的滞后特性如图7，注意与常见的耗散型材料阻尼滞后特性（回线取顺时针方向）不同，这类滞后特性对应着一种能量补充机制，当系统中存在阻尼时，可能引起自激振动，其运动方程是

$$\ddot{x} + \dot{x} + F(x) = 0$$

其中 $F(x)$ 如图7所示。取初位移为 α ，极限环的周期、振幅和初速度与角度 γ 的关系见图8。当右端有强迫力作用时，周期解在 $x(0) - \dot{x}(0) - \Omega$ 空间中分布的一个例子见图9。

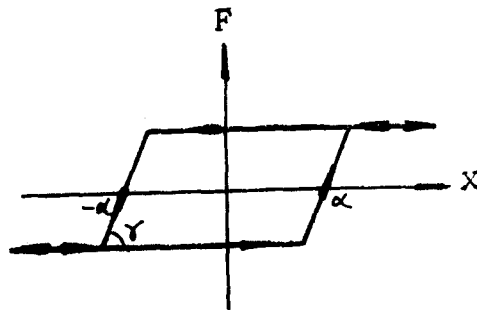


图7 滞后特性

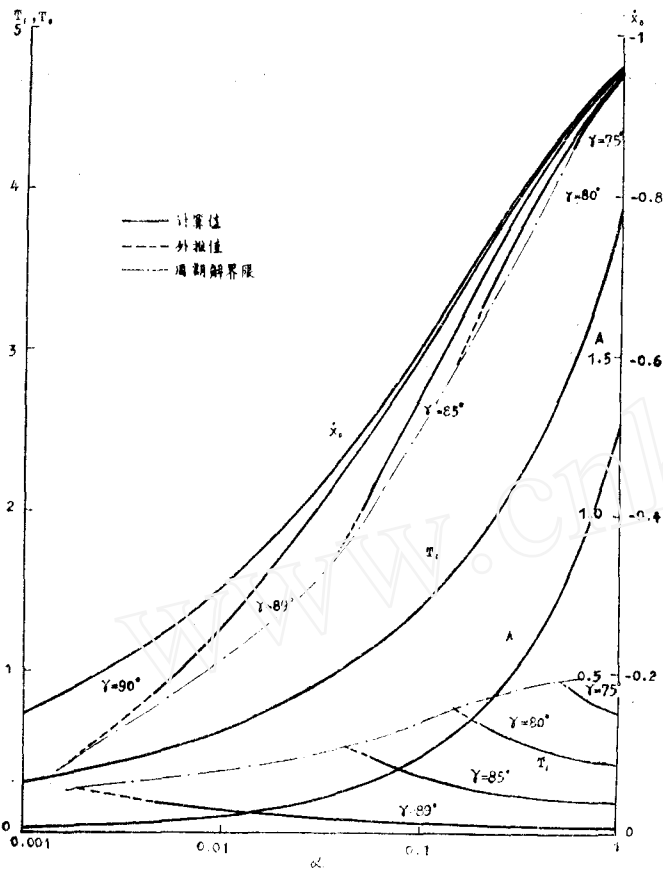


图8 滞后特性产生的极限环的特征量

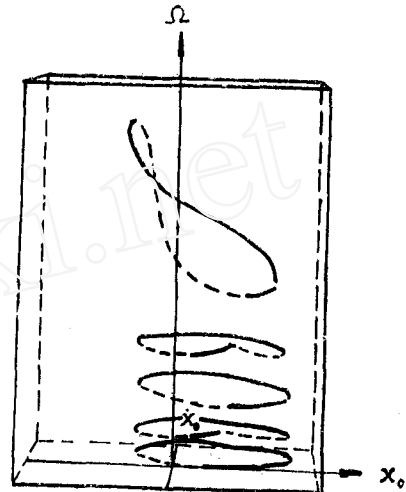


图9 理想滞后特性系统的强迫振动

§ 3 周期系统和周期运动稳定性的数值研究

对周期系统

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, x) = f(t+T, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (8)$$

的解的稳定性的研究系根据它的解的以下基本性质: 若记映照 $g^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为方程 (8) 在初始条件 $\varphi(0) = x$ 下的解 φ 在时刻 t 所取的值, $g^t x = \varphi(t)$, 则我们有

$$g^{nT+S} = g^S \cdot (g^T)^n, \quad S < T$$

于是对映照 g^t 的稳定性研究就简化为对映照 g^T 的稳定性研究. 特别对于线性周期系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (9)$$

映照 g^t 是线性的: $g^t x = \Phi(t)x(0)$, 其中 $\Phi(t)$ 可由初值问题

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I \quad (10)$$

解出, 从而不唯确定 $\Phi(T)$ 而研究它的稳定性. 众所周知, 设 $\Phi(T)$ 的特征值为 λ_i , 则 ① 渐近稳定: $\max_i |\lambda_i| < 1$; ② 不稳定: $\max_i |\lambda_i| > 1$ 或 $\max_i |\lambda_i| = 1$ 且至少有一个模为 1 的特征值的几何重数小于代数重数; ③ 临界稳定: $\max_i |\lambda_i| = 1$, 且所有模为 1 的特征值的几何重数与代数重数均相等.

对周期系统稳定性的研究，即为考察系统的解当系统的参数取各种不同数值时的稳定情况。这个问题可以看作求出参数空间中 $\max_i |\lambda_i| = 1$ 的曲面，因为它正是稳定域与不稳定域的分界面。

初值问题 (10) 一般只能用数值积分法求解。计算 $\Phi(T)$ 的特征值一般也需用数值法例如 QR 方法，仅当 $n=2$ 时可分析地算出特征值。这时得到 Hill 方程，其一般形式为

$$\ddot{x} + 2\dot{\xi}(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \quad q(t+T) = q(t), \quad \xi(t+T) = \xi(t) \quad (11)$$

写成 (9) 的形式则有

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -2\dot{\xi}(t) \end{bmatrix}$$

现设 u, v 是方程 (10) 的两个线性独立的解，并满足 $u(0) = 1, \dot{u}(0) = 0, v(0) = 0, \dot{v}(0) = 1$ ，则 $\Phi(T)$ 的表达式是

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} u(T) & v(T) \\ \dot{u}(T) & \dot{v}(T) \end{bmatrix}$$

利用 Jacobi 恒等式，并设 $\xi(t) = \xi$ 为常数（实际情况多半如此），则可以得到

$$|\Phi(T)| = \exp \int_0^T \text{tr} A(t) dt = e^{-2\xi T}$$

于是，确定特征值的方程是

$$\lambda^2 - [u(T) + \dot{v}(T)]\lambda + e^{-2\xi T} = 0$$

于是 $\max_i |\lambda_i| = 1$ 的条件成为

$$u(T) + \dot{v}(T) + \text{sign}[u(T) + \dot{v}(T)] \cdot (1 + e^{-2\xi T}) = 0 \quad (12)$$

综上所述，求参数空间中稳定域界面的问题实质上是常微分方程的边值问题而可与上节相似地用打靶法求解。这样得到的 Mathieu 方程

$$\ddot{x} + 2\dot{\xi}\dot{x} + (\delta + \varepsilon \cos t)x = 0$$

的稳定域界线图如图 10（取自凌复华 1983a）它覆盖了参数值 δ, ε 的较大变化范围。注意

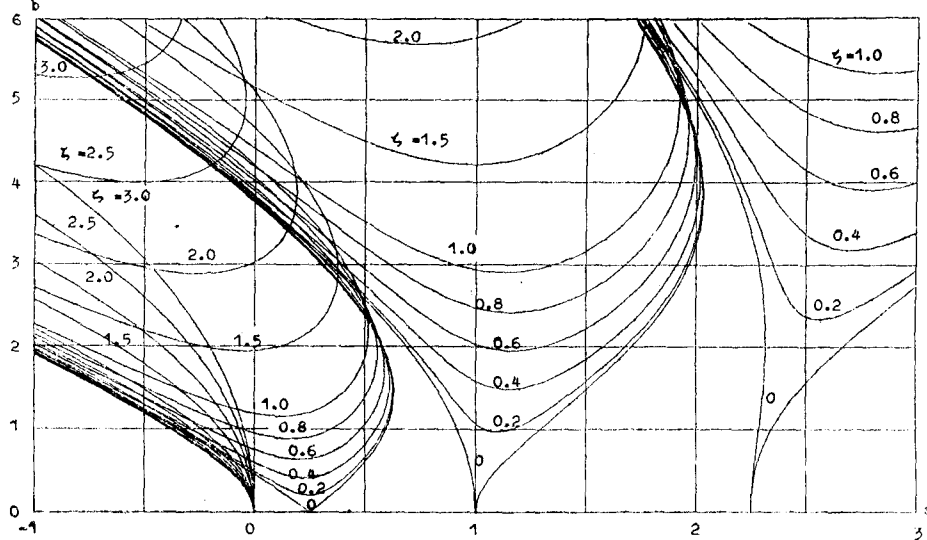


图 10 Mathieu 方程的稳定域边界

阻尼项使稳定域边界上移, 稳定域有所扩大, 但也有部分原来稳定的区域因阻尼而变为不稳定区域, 这一点对大阻尼特别明显. 文献常有阻尼无条件地使稳定域扩大的说法, 这是不够精确的, 部分地是因为以往对大阻尼情况并未进行过多少计算.

讨论周期运动的稳定性时, 一般研究相应的偏差方程(变分方程)的一阶近似, 这是一个线性周期系统而可用上面所述的方法处理. 只是对 $\max |\lambda_i| = 1$ 的情况, 由一阶偏差方程得到的结论不再适用而需考察高阶偏差方程, 但这是相当困难的.

上节图 4 至图 6 中共振曲线的稳定性就是用以上方法确定的. 对于分段线性系统, 有时能得到偏差方程的分析解而使稳定性的讨论大大简化, 参见凌复华(1984a).

§ 4 用 Галёркин 法求周期解

用 Галёркин 法求非线性振动周期解的理论和一种计算步骤是由 Urabe(1965), Urabe/Reiter(1966) 给出的. 其做法是用一个三角多项式

$$x^m(t) = a^0 + \sum_{n=1}^m (a^{2n-1} \sin nt + a^{2n} \cos nt) \quad (13)$$

逼近方程

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (14)$$

的精确周期解, 决定 $a^i (i = 0, \dots, 2n)$ 的方程是

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x^m(\tau), \tau) d\tau &= 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x^m(\tau), \tau) \sin n\tau d\tau + na^{2n} &= 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x^m(\tau), \tau) \cos n\tau d\tau - na^{2n-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Urabe 证明了下面两个重要定理:

定理 1 若方程 (14) 有一个孤立周期解 $x = \hat{x}(t)$ 位于 D 中, 则对任何足够高的阶次 $m \geq m_0$, 在 D 中存在有 Галёркин 近似解 $x = x^m$. 这个解当 $m \rightarrow \infty$ 时一致地收敛于精确解 $x = \hat{x}(t)$, 其一阶导数也是如此.

注意 x^m 的诸系数不可能精确地求出而只能近似地求出(例如用 Newton 法).

定理 2 设方程 (14) 在 D 中有一个近似周期解 $x = x(t)$, 并设有一个连续周期矩阵 $A(t)$, 使线性齐次方程

$$\dot{y} = A(t)y \quad (16)$$

的乘子(即基本矩阵 $\Phi(T)$ 的特征值)都不同于 1.

设 $\Phi(t)$ 是方程 (16) 的满足 $\Phi(0) = 1$ 的基本矩阵, 且 $H(t, \tau) = [h_{ij}(t, \tau)]$ 是一个分段连续矩阵, 它定义为

$$H(t, \tau) = \begin{cases} \Phi(t)[1 - \Phi(2\pi)]^{-1}\Phi^{-1}(\tau), & 0 \leq \tau \leq t \leq 2\pi \\ \Phi(t)[1 - \Phi(2\pi)]^{-1}\Phi(2\pi)\Phi^{-1}(\tau), & 0 \leq t \leq \tau \leq 2\pi \end{cases}$$

又设存在正常数 M 使得

$$M \geq \left[2\pi \cdot \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^n h_{ki}^2(t, \tau) d\tau \right]^{1/2}$$

非负常数 r 使得

$$r \geq \| \dot{\bar{x}} - f(t, \bar{x}(t)) \|$$

这里 $\| \cdot \|$ 记 Euclid 范数。于是, 若存在正常数 δ 和非负常数 $\kappa < 1$ 使

$$(I) D_\delta = \{x \mid \|x - \bar{x}(t)\| \leq \delta, \text{ 对一些 } t\} \subset D$$

$$(II) \| \partial f / \partial x - A \| \leq \kappa / M, \text{ 对所有使 } \| \bar{x} - x(t) \| \leq \delta \text{ 的 } x, t \text{ 成立}$$

$$(III) Mr / (1 - \kappa) \leq \delta$$

则方程 (14) 在 D_δ 内有一个且只有一个精确的周期解 $x = \bar{x}(t)$, 这是一个孤立周期解, 并有

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| \leq Mr / (1 - \kappa)$$

实际计算中, 一般就取 $A = \partial f / \partial x$ 。由这两个定理可知, 精确的周期解可用一个三角级数去逼近, 并能得到误差估计。由此, 可以得到求周期解的步骤如下:

1. 给出 $a^i (i = 0, \dots, 2m)$ 的初始近似值, 例如用谐波平衡法;
2. 对若干个 t_j 值计算 $x^m(t_j)$, 进而算出诸 $f(t_j)$;
3. 代入 (15) 得到确定诸 a^i 的非线性方程组;
4. 用 Newton 法迭代求解方程组, 得到诸 a^i 值。

对所求得周期解的误差估计是这样进行的:

1. 按定理 2 构成 H 矩阵并用 Simpson 方法计算定积分而求出 M ;
2. 按已求得的诸 a^i 算出定理 2 中的 r ;
3. 试凑确定满足定理 2 的 κ, δ 值, 从而得出误差估计。

以上 Галёркин 解的求解过程相当麻烦, 而误差估计则耗时更多, 因此在实践中应用不多, 一般只用来校核近似解, 例如见图 6。

我们对以上求解方法作了一些改进 (Ling/Wu 1984), 把快速 Fourier 变换技巧 (FFT) 应用于步骤 2 (逆变换) 和步骤 3 (正变换) 而构成所谓快速 Галёркин 方法, 从而大大节省了计算时间。此外, 还应用拟 Newton 法以改善收敛性, 并允许把周期 T 作为待求量而使之也能适用于自治系统。这样一来, 快速 Галёркин 方法就成为一种可在实际计算中应用的方法。由于这种方法比较直观, 可以直接控制精度, 并且当问题比较简单或精度要求不高时只需取很少几项, 从而需要的计算工作量较少, 这种方法可与直接数值方法相互补充。

§ 4 点映射法

点映射法的概念首先见于 Poincaré, 即求出每一周期 (一般为强迫项的周期) 末相空间中系统的状态的集合 (一般称为 Poincaré 映射), 并由此研究系统的性态。显然, 在非定常运动消失以后, n 周期解的 Poincaré 映射是相空间中的 n 个点。这种方法的缺点一是不能研究不稳定运动, 二是不能适用于无阻尼系统, 三是收敛较慢, 亦即到达定常解需要较长时间, 但当事先并不知道将出现的是某种周期解或混沌性态时, 由 Poincaré 映射可作一个大致判断。但它并不适宜对周期解作精确的定量分析。点映射法更适宜用来对全局性态和混沌性态进行研究, 但这已超出了本文的范围, 请参看有关的文献。

§ 5 结束语

本文介绍了非线性振动周期解计算中数值方法的近来发展,特别是直接数值方法。这类方法对振动方程未作任何简化,引入的误差只是计算方法中的截断误差和舍入误差,因此能达到很高的精度。随着电子计算机的普及,这类方法的应用会越来越广。与此同时,快速 Galerkin 方法也有一定的实用价值。小参数摄动法作为一种定性分析和工程估算的方法,以后仍会起一定作用,但只要问题稍微复杂或精度要求稍高,它就不能与数值方法相竞争。因此,对数值方法的研究与应用,应给予极大的注意。

参 考 文 献

- Arnold V.I./Avez A. (1968), Ergodic Problems of Classical Mechanics, Springer, Berlin.
Cunninghams W.J. (1968), Introduction to Nonlinear Analysis, McGraw-Hill, New York.
郝柏林 (1983), 分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其它——关于确定论系统中的内在随机性, 物理学进展, 3: 330—415.
Hsu C.S. (1980), A theory of cell-to-cell mapping dynamical systems, *J. Appl. Mech.*, 47: 931—939.
—— (1981), A generalized theory of cell-to-cell mapping for nonlinear dynamical systems, *ibid*, 48: 634—642.
—— (1982), A probabilistic theory of nonlinear dynamical systems based on the cell state space concept, *ibid*, 49: 895—922.
——/Guttala R.S. (1982), An unravelling algorithm for global analysis of dynamical systems: An application of cell-to-cell mappings, *ibid*, 47: 940—948.
——/——/Zhu W.H. (1982), A method of analyzing generalized cell mappings, *ibid*, 49: 885—894.
——/Kim M.C. (1984), A study of statistical properties of strange attractors by generalized cell mapping, Presented at XVI th ICTAM, Lyngby, Denmark.
Kreuzer E.J. (1984), Analysis of chaotic systems using the cell mapping approach, *ibid*.
Ling F.H. (1981), Numerische Berechnung periodischer Lösungen einiger nichtlinearer Schwingungssysteme, Dissertation, Uni. Stuttgart.
—— (1982a), Numerische Berechnung periodischer Lösungen nichtlinearer Schwingungssysteme, *ZAMM*, 62: T55—T58.
凌复华 (1982b), 离散系统非线性振动理论的一些新发展, 上海交通大学学报, 4: 155—170.
—— (1983a), 周期系数线性常微分方程组稳定域边界的数值计算, 上海交通大学学报, 1: 57—68.
—— (1983b), 非线性振动系统周期解的数值分析, 应用数学和力学, 4: 489—505.
—— (1984a), 用直接数值法分析滞后特性引起的自激振动, 振动与冲击, 2: 11—26.
—— (1984b), 用直接数值方法研究

$$\ddot{x} + (a|x|^{\lambda} + b|x|^{1+\mu} + c)\dot{x} + x - \beta a^3 = 0$$

类方程的极限环, 力学与实践, 6, 5: 34—38.

- Ling F.H./Wu X.X. (1984), An application of FFT to Galerkin's method, Presented at 1984 China-Japan Vibration Joint Conference.
凌复华/周鉴如/张超明 (1983), 用直接数值方法求单自由度分段线性阻尼系统的周期解, 第3届全国非线性振动学术交流会, 天津.
Mayer J. (1981), Selbsterregter Schwinger mit Hysteres-Relais als Rückstellung unter harmonischer Zwangserregung, Diplomarbeit, Uni. Stuttgart.
Rosenberg R. M./Atkinson C.P. (1959), On the natural modes and their stability in nonlinear two-degree-of-freedom systems, *J. Appl. Mech.*, 26: 377—385.
Ruf W. -D. (1978), Numerische Lösung des Duffing-problems, Diplomarbeit, Uni. Stuttgart.
Sethna P. R. (1960), Steady-state undamped vibrations of a class of nonlinear discrete systems, *J. Appl. Mech.*, 27: 187—195.
Stoer J./Bulirsch R. (1978), Einführung in die numerische Mathematik II, Springer, Berlin.
Ueda Y./Hayashi C. (1973), Computer simulation of nonlinear ordinary differential equations and nonperiodic oscillations, *Electronics and Communications in Japan*, 56-A: 27—34.
Urabe M. (1957), Numerical determination of periodic solution of nonlinear system, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, A-20: 125—148.

- (1958), Periodic solution of Van der Pol's equation with damping coefficient $\lambda=0(0.2)1.0$, *ibid*, A-21: 193—207.
- (1965), Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 20: 120—152.
- (1967), *Nonlinear Autonomous Oscillations*, Academic Press, New York.
- /Reiter A. (1966), Numerical computation of nonlinear forced oscillations by Galerkin's procedure, *J. Math. Anal. Appl.*, 14: 107—140.
- /Yanagiwara H./Shinohara Y. (1959), Periodic solutions of Van der Pol's equation with damping coefficient $\lambda=2-10$. *J. Sci. Hiroshima Univ.*, A-23: 325—366.
- Van Dooren R. (1973), Differential tones in a damped mechanical system with quadratic and cubic nonlinearities, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 8: 575—583.
- 朱照宣 (1984), 非线性力学中的浑沌, *力学进展*, 14, 2: 29—146.

NUMERICAL TREATMENTS OF A PERIODIC MOTION AND ITS STABILITY OF NONLINEAR OSCILLATION SYSTEMS

Ling Fu-hua

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiao Tong University)

Abstract

Some recent developments of the numerical methods for evaluating a periodic motion of nonlinear oscillation systems and for determining the stability of such a motion are reviewed in this paper. We lay the emphasize on the direct numerical method, which is based on the shooting method combined with, in most cases, a direct numerical integration. With this method we can treat a great variety of nonlinear oscillation problems (including those in the strong nonlinear systems) with a desired accuracy. The another aspect of this method is to decide the stability of the obtained periodic solutions and to drawing stability charts of a linear periodic system by use of the Floquet theory with numerical calculations.

Some examples are given in this paper. Another method is the fast Galerkin's method. This method combines a standard Galerkin method with the FFT technique and therefore is more effective than the standrd one. The point mapping method is only briefly mentioned, because this method is in principle more suitable for investigating the global property and the chaotic behaviour of a system than for treating its periodic solutions.

Keywords *nonlinear oscillation; periodic motion; stability; numerical methods; direct numerical method; fast Galerkin's method; point mapping method*