

来说, 误差分布的详细打印结果表明, 即使在最大格子雷诺数为最高的情况下也没有显示出 Spalding 所预期的那种类型的振荡倾向。在所有情况下, 如果最大格子雷诺数取得足够大, 则 CDC⁺ 算法就不能收敛。可是, 对于最大格子雷诺数小于 50 左右的情况来说, 与最迅速的迎风差分算法所需的计算工作量相比, 几乎不需要增加 (即使有的话) 工作量就能得到收敛。此外, 最大格子雷诺数超过 100 时, 也有可能得到计算结果。

在其他一些算法中, 要以 SM 方法为最好。当最大格子雷诺数超过 10 左右时, SM 算法和 LE 算法本质上产生相同的计算结果。最大格子雷诺数超过 100 左右时, 这两种算法的计算结果与 UDI 算法的计算结果非常接近。因为当最大格子雷诺数增大时, 真实的扩散效应与伪扩散效应和对流效应相比, 就变得越来越没有意义, 所以这种结果是在预料中的。人们会感兴趣地注意到, 尽管任何一种迎风差分算法所产生的计算结果, 永远不能与中心差分算法计算结果的精确度相匹敌, 但相对说来, 在扩散项和对流项分别为零的情况下, 它们还是较好的。中心差分算法所产生的误差通常大致保持为常数, 或者甚至随最大格子雷诺数的增大而略有减小。然而, 对迎风差分方法所产生的计算结果来说, 误差却随着最大格子雷诺数的增大而增加。

结论

上面所述的中心差分算法扩大了雷诺数的范围, 在此范围内, 可在远离对角线优势的限值以外得到计算结果, 在考虑的所有情况下, 当使用等同的静态误差时, 中心差分的计算结果远比任何一种迎风方法要精确得多。在检验的中心差分算法中, CDC⁺ 方法是最好的。可是, 作者们^[1]曾使用 CDC⁺ 和 CDU 这两种算法对平行平板通道和圆管内的流动得到了计算结果, 发现 CDU 格式在一定程度上更为成功。

在可以用二元坐标系统来描述的中等雷诺数的流动情况中 (实际上也就是能保证层流的所有流动), 精确度的得益是如此之大, 以致中心差分算法无疑地会优先于迎风方法得到采用。在中心差分算法失败的情况下, 则 SM 方法是可供选择的最佳方案。作者们几乎没有找到可资推荐的其他方法。

参 考 文 献 (略)

胡庆康译自: *Appl. Math. Modelling*, 3 (1979): 205—211. (吴达人校)

充满流体的膨胀管中的激波

G. Rudinger

引言

不可压缩流体流过膨胀管, 在某种程度上, 与气体流过刚性管相似。在这两种系统中都可能建立波, 只是前者是由于管子的膨胀所致, 而后者则是由于气体的压缩所致。膨胀管的波的传播过程主要发生在生物系统中, 例如, 大动脉、大静脉或泌尿管中,

根据基本流体力学方程的非线性可知,只要管子足够长,有限振幅的压缩波就会变陡,直至达到稳定的极限波形的激波为止。在没有耗散过程和不偏离一维流动的情况下,从波的上游至波的下游情况所形成的突跃区将是一个不连续面。气体中的粘性耗散,热传导和扩散,最终会限制波的变陡过程,而过度区的最后长度,通常仅是若干分子平均自由行程。在膨胀管中,波的变陡受弯曲刚度、惯性和管壁粘弹性的限制,而过度区的长度则与管径为同一数量级。在这两种情况下,跨过波的总变化可以直接计算,而不用注意过度区内部的详细情况。

在正常的生理条件下,激波并不发生于循环系统中。有缺陷的主动脉瓣,可能引起在舒张期从主动脉回到心脏的血液有大量的回流,随后,在收缩期则发生过高的压力脉动。最终的峰值脉动通常叫做“枪射现象”(pistol shot phenomenon),Anliker, Rockwell 和 Ogden^[1]曾把这种现象描述为在心脏附近一定距离处发生的激波现象。在有缺陷的三尖瓣(tricusid)的静脉边,可能发现类似的过程。作者^[2]曾证明,在对血管壁的性质作出某些假定的基础上,进行波流过程的模型计算,就可以建立激波。在遭受汽车或飞机失事的机械撞击中,人体内经常发生横向主动脉破裂,破裂通常在主动脉弓附近^[3,4]。Kivity^[5], Kivity和Collins^[6]以及Lasky^[7]推测这种破裂可能是由于撞击导致的激波引起的。但是,Vostal^[8]和Anliker^[9]对这种解释表示很大的怀疑。Beam^[10]假定,激波可能部分地是由于借助于充气封套测量血压时的Korotkoff声音所造成的。近来,Shapiro^[11]讨论了在部分凹陷的管中的激波,这些管子中的压力低于周围介质中的压力。

膨胀管中微小扰动波相对于流体的传播速度(即波速),是同气体中声速相似的。就象在可压缩气流中那样,大于波速的恒定流速只有经过激波转变,才能变为亚声速气流。例如,Griffith^[12]和Shapiro^[11]指出,如果流动是非定常的,传播的波形就会变陡,形成比微小扰动波速快的激波。非定常流动可以由特征线方法分析。此方法应用到血液流动,起初是由Lambert^[13]进行的,并为Streeter, Keitzer和Bohr^[14], Anliker^[1]等所使用,而且还被其他人用来研究别的各种问题。这种方法的讨论还可以在Skalak^[15]和Rudinger^[16]的综述中找到。

在与激波一起运动的参考坐标上,流动是定常的,波的特性可以从代表跨过激波的质量流量守恒和动量守恒的“突跃条件”导出。Lambert^[13]是首先写出突跃条件的人,他又用一个动量方程导得一个不合理的结果(见下节的脚注1)。随后的各种公式是由Beam^[10] Kivity^[6]和Shapiro^[11]给出的。在一个固定坐标系的激波上,流体从激波的低压侧流到高压侧,穿过一个急剧扩散管截面时,可能在若干位置处发生流动分离。Shapiro假定直接的分离发生在管子的狭窄截面上。但是,他又谨慎地强调这种假定是试探性的。Beam和Kivity的方程意味着流动无分离。因而,不同的流动模型的假定就有相应的不同的动量方程形式。从下面可以知道,这些假定能导致激波速度和耗散有很大的差别。

激波速度和耗散的计算要求,有一个描述管壁弹性的附加关系式。有三种情况可以考虑:由主动脉模型所代表的大血管;假定完全是弹性的橡皮管;以及其中压力小于周围介质压力的部分凹陷管,就象在静脉系统中的某些部分一样。

分析

以下的分析是基于不可压缩一维无壁面摩擦的流动,关于前面提到的有关流动分离的未

知性，可以考虑两种极端情况；在过度区起始点处的立即分离流或者无分离流。

波速 c ，即微弱扰动波相对于流体的传播速度，在所有波的传播过程中起着重要的作用。它由以下著名的关系式给出^[1,2,12,15,16]：

$$c^2 = \frac{A}{\rho} \frac{dp}{dA} \quad (1)$$

式中 A 是管道的横截面， ρ 是流体的密度， p 是压力，由于只有流体压力和周围介质压力之差用到分析中去，所以可以把 p 认为是可变化的压力。壁面的弹性性质可以用 A 和 p 之间或 c 和 p 之间适当的关系式来表示。这两个关系式是等量的，因为两者可以借助于式 (1) 来互相转换。

今研究流体流过一静止的激波过渡区，下标 1 和 2 分别表示激波上游和下游的流动情况， v 表示流速，则连续方程是

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (2)$$

动量方程包括在整个激波过度区中管壁面所施加的力的作用，并由下式给出：

$$\rho A_1 v_1 (v_2 - v_1) = A_1 p_1 - A_2 p_2 + \int_{A_1}^{A_2} p dA \quad (3)$$

进一步的分析则取决于对流体分离的各种假定。

对于立即分离的流动，Shapiro^[11]假定，截面的迅速扩大，会产生象射流那样的流动，即流动通过旋涡区并逐渐又充满了管道，直到在 2 处重新建立起均匀流动为止。他假定“射流的分离是如此地剧烈，以致作用在扩张的截面积 ($A_2 - A_1$) 上的压力就是入口压力 p_1 ，压力升高值 ($p_2 - p_1$) 则预先假定发生在距混合截面更远的下游处”。于是，方程 (3) 中的积分式，就变为只有 $p(A_2 - A_1)$ ，而动量方程就采取如下形式：

$$\rho A_1 v_1 (v_2 - v_1) = A_2 (p_1 - p_2) \quad (4)$$

流体流入激波的速度 v_1 ，可以从方程(2)和(4)中消去 v_2 得到。就象气体动力学中激波马赫数那样，我们的主要兴趣在于速度指标 $S = v_1/c_1$ 。于是，得到了有分离的速度指标

$$S_{s.e.p} = \left\{ \frac{p_1 [(p_2/p_1) - 1]}{\rho c_1^2 (A_1/A_2) [1 - A_1/A_2]} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

上式可以用来估算规定的关系式 $A(p)$ 或 $c(p)$ ，如果激波前的流动条件以及 p_2 或 A_2 是事先知道的话。

如果是没有分离的流动，则方程 (3) 中的积分就可以进行分部积分，动量方程就变成

$$\rho A_1 v_1 (v_2 - v_1) = - \int_{p_1}^{p_2} A dp \quad (6)$$

速度指标式可得出如下：

$$S_{n.o.s.e.p} = \left\{ \frac{\int_{p_1}^{p_2} A dp}{\rho c_1^2 A_1 [1 - (A_1/A_2)]} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

不管假定的流动模型，在无限小的弱激波的极限中，相应的动量方程必导致 $S = 1$ 。为了验证此条件，我们可以令 $p_2 = p_1 + dp$ 和 $A_2 = A_1 + dA = A_1 + (dA/dp)dp$ ，并忽略 dp 的高阶项，来使方程 (5) 和 (7) 线性化。由于通用的方程 (1)，所以方程 (5) 和 (7) 就

可以导致必要的条件¹⁾

$$S^2 = \frac{A_1}{\rho c_1^2} \frac{dp}{dA} = 1 \quad (8)$$

伴随激波过度的耗散损失, 可以由不同的方程形式来表示^[5,10,11,13]。此处的激波损失如 Shapiro^[11]所用的那样, 将由一个损失系数来表示, 并且定义为用激波上游的动能头表示的跨过激波的总压损失:

$$C_L = \frac{p_1^* - p_2^*}{\rho v_1^2 / 2} \quad (9)$$

其中 $p^* = p + (\rho v^2 / 2)$ 是总压, 由 C_L 的这一定义, 和方程(2)及由方程(15)或方程(7)定义的 S 可以导出

$$C_L = 1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - \frac{2p_1}{\rho c_1 S^2} \left[\frac{p_2}{p_1} - 1 \right] \quad (10)$$

在直接流动分离的情况下, 损失系数可以简化为较简单的形式

$$C_{L \text{ sep}} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (11)$$

此式也由 Shapiro^[11]导出。

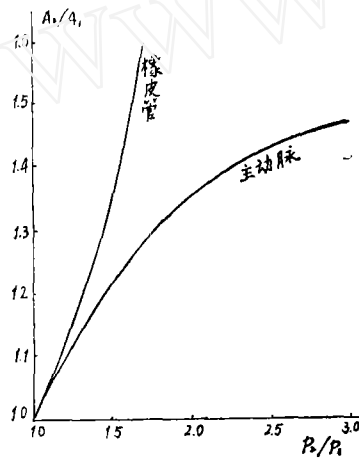


图1 对于麻醉的狗胸主动脉管的面积和压力比之间的关系——方程(13), 以及 $p_1 = 100 \text{ mmHg}$ (13.33 kPa), $c_1 = 5 \text{ m/s}$ 和 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ 的完全弹性橡皮管——方程(15),(16)

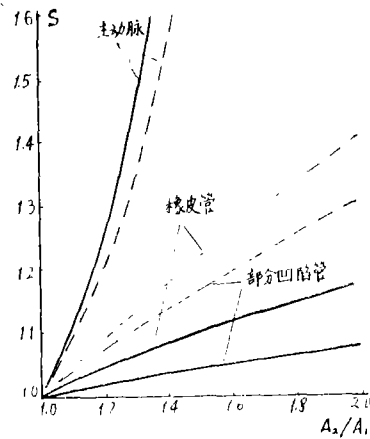


图2 三种管子跨过激波的速度指数随着面积比变化
主动脉和橡皮管的条件与图1相同, 实线表示无分离流动, 虚线表示直接分离流动

名词术语

A 横截面积

c 波速

C_L 损失系数(方程(9))

ρ 流体密度

σ 分离参数方程(23)的常参数

φ 方程(13)中的常参数

1) Lambert^[13]用以下形式的动量方程表示:

$\rho_1 A_1 v_1 (v_1 - v_2) = A_2 p_2 - A_1 p_1$, 在无限小的弱激波的极限情况下, 就可导致 $S^2 = 1 + (p/\rho c_1^2)$, 因此与方程(8)是不一致的。

K 弹性参数(方程(8))
 n 方程(18)中的指数
 p 突变的压差
 p^* 总压
 S $v_1/c_1 =$ 速度指标
 v 相对于激波的速度
 β 方程(12)中的常数

下标

1 激波的上游
 2 激波的下游
 s 分离点
 sep 直接的流动分离
 no sep 无分离流动

示例

上节中推导得的各个方程是一般正确的,但在预先给出管壁弹性系数之前,仍是不能计算的。研究了三种不同类型的管子,对每种管子又分别以有直接分离流动和没有分离流动来处理。

(a) 主动脉 主动脉的弹性和压力因人而异。

主动脉的弹性因人而异,而且同一个人也因年龄变化而异。为此目的,应用了由Histand和Anliker^[17](见[1])提供的麻醉了的狗胸主动脉的资料。这些资料在不是平均流动的情况下给出了作为压力之函数的小振幅的波速。在整个生理上重要的80到240mm汞柱的范围内(接近于10到32Kpa),可以用下列比测量分布得较好的式子表示:

$$c = c_1 e^{\beta p} (p/p_1)^{-1} \quad (12)$$

其中 c 以 m/s 表示,而 $\beta = 4.75 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$ 。此处以及以下诸方程中, p 必须以 Pa 为单位(1 mm Hg = 133.3 pa)。以下诸示例基于激波前的压力为 $p_1 = 100 \text{ mm Hg}$ (13.33 KPa),其中 $c_1 = 5.0 \text{ m/s}$ ^[1,17]。

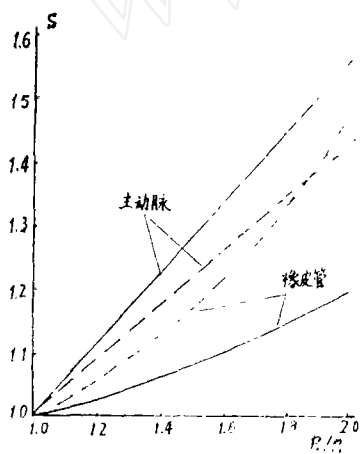


图3 速度指标随主动脉和橡皮管的跨过激波的压力变化。实线表示无分离流动,虚线表示直接分离流动

将方程(12)代入方程(1)并积分之,就得到

$$\begin{aligned}
 m(A/A_1) &= \{1 - e^{-2\beta p_1 (p/p_1)^{-1}}\} / \psi \\
 &= [1 - (c_1/c)^2] / \psi \quad (13)
 \end{aligned}$$

其中 $\psi = 2\beta p_1 c_1^2 = 2.374$ (对于指定的 β 和 c_1 值, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, 此值接近于血液密度)。 A/A_1 和 p/p_1 之间的关系如图1所示。要注意的是,对于大压力比来说,面积比趋于渐近值 $e^{1/\psi} = 1.524$ 。这种现象是随着压比增大而血管硬化造成的,但方程不能外推到远离试验数据指出的范围。对于指定的 p_1 和 c_1 值以及由 A_2/A_1 或 p_2/p_1 规定的激波强度,直接分离流动的速度指标可以从方程(5)和(13)计算出来。

对于无分离流动情况,方程(7)中分子的积分

式必须计算出来。把微分形式的方程(13)作一些处理后可以导出 $\int (e^{-z}/u) du$ 形式的积分,此式可以由指数级数展开来进行积分。速度指标最后就成为

$$S_{no \text{ sep}} = \left\{ \frac{e^{1/\psi}}{\psi [1 - (A_1/A_2)]} \left[-\ln z + \frac{z-1}{\psi} - \frac{z^2-1}{2 \times 2! \psi^2} + \frac{z^3-1}{3 \times 3! \psi^3} - \dots \right] \right\}^{1/2} \quad (14)$$

其中 $z = \exp\{-2\beta p_1[(p_2/p_1)]\} = (c_1/c_2)^2$ 。这两种情况的结果如图 2 和图 3 所示, 相应的损失系数从方程 (10) 和 (11) 得出, 并且把对于面积比 $A_2/A_1 = 1.5$ 的值列于表 1。这些数据将在讨论中作进一步的研究。

表 1 $A_2/A_1 = 1.5$ ($p_1 = 100 \text{ mm Hg}$ (13.33 kPa), $c_1 = 5 \text{ m/s}$ 和 $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$) 时的损失系数 C_L

管	有分离流	无分离流
大主动脉管	0.114	0.069
橡皮管	0.139	0.036
部分凹陷管	0.111	0.004

(b) 完全弹性管(橡皮管) 模拟生物流动的试验经常用柔软的橡皮管来完成(例如 [12]), 这种管子具有的不变的弹性模数可能超过某些变形范围。把激波分析应用于这种管子, 原因在于它的固有性质, 并且可以与血管中的流动相比较。

对于等容的弹性管(泊松比 = 0.5), 波速、横截面积和压力之间的关系已由 Streeter 等人 [14] 导出, 按本文所用的符号, 由下式给出:

$$c^2 = c_1^2 - \frac{p_1}{\rho} \left(\frac{p}{p_1} - 1 \right) \quad (15)$$

$$A/A_1 = (c_1/c)^2 \quad (16)$$

如前一样, 对于相同的 p, c 和 ρ 值, A/A_1 和 p/p_1 之间的最后关系式列于图 1。当压比接近于 $p/p_1 = 1 + \rho c_1^2/p_1 = 2.875$ 时, 面积比就变成无穷大, 但是, 方程(15)和(16)所赖以建立的等弹性模数的假定将不再是正确的。还要注意的, 方程(15)表明了波速随着压力的升高而降低, 而主动脉方程(12)则表明了相反的状况。

具有直接分离流动的速度指标仍由方程 (5) 给出, 其它的量则相应地由方程(15)和(16)来确定。对于无分离的情况, 可从方程 (7) 导出

$$S_{no. sep} = \left[\frac{\ln(A_2/A_1)}{1 - (A_1/A_2)} \right]^{-1/2} \quad (17)$$

所求的速度指标的最终值如图 2 和图 3 所示, $A_2/A_1 = 1.5$ 时相应的损失系数则包括在表 1 中。

(c) 部分凹陷弹性管 如前所述, 外部压力高于管内压力时就可能发生这种情况, 管子由于其本身的性质而或多或少地凹陷。Shapiro [11] 证明变化的压力和这种管子的截面积之间的关系, 在某些范围内可以本文使用的符号, 用下式来很好地近似:

$$-\frac{p}{\kappa} = \left(\frac{A_0}{A} \right)^n - 1 \quad (18)$$

其中 $n = 3/2$, κ 是取决于管壁刚度的常数, A_0 是压力变动为零时的截面积。要注意的是方程(18)仅适用于 p 为负的值。于是, 由方程(1)得出

$$c^2 = \frac{n\kappa}{\rho} \left(\frac{A_0}{A} \right)^n \quad (19)$$

以 p_1 及 A_1 的形成写出方程 (18), 以及以 c_1 和 A_1 的形式写出方程 (19), 这三个方程与方程式 (5) 组合, 就可得到

$$S_{s.e.p} = \left\{ \frac{1 - (A_1/A_2)^n}{n(A_1/A_2)[1 - A_1/A_2]} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (20)$$

要得到无分离流动的速度指标 $S_{n.o.s.e.p}$, 可以将方程(8), (18)的导数和方程(19)代入方程(7), 通过积分和整理, 最后得到

$$S_{n.o.s.e.p} = \left\{ \frac{1 - (A_1/A_2)^{n-1}}{(n-1)[1 - (A_1/A_2)]} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (21)$$

注意, 方程(20)和(21)仅取决于面积比和常数 n , 和管壁的弹性和液体的密度无关。

在这些结果中, 激波的强度用面积比 (A_2/A_1) 来表示, 只是为了避免规定 n 值。同前所述, 损失系数由方程(11)和方程(10)给出, 其中采用了方程(18), (19)和(20)或(21)。这些计算的结果, 如 Shapiro^[11]所推荐的那样以 $n = 3/2$ 为基础的, 并且同前面一样, 对于同一个 c_1, ρ 和 p_1 值, 示于图2和表1中。

讨论

前节中的诸示例显示了若干有趣的特性。对于主动脉, $S_{s.e.p}$ 经常是小于 $S_{r.o.s.e.p}$, 而橡皮管却显示出相反的特性。除了高压比下 $S_{s.e.p}$ 值的小交叉区外, 主动脉的两种速度指标数 ($S_{s.e.p}$ 和 $S_{n.o.s.e.p}$) 都比橡皮管的相应值大。在引言中曾强调指出了流动模型的不定性, 并且容易用流动分离发生在中间截面 A_s 的假定来推广这种分析, 于是方程(3)中的积分可以近似地表示为

$$\int_{A_1}^{A_2} \hat{p} dA = \int_{A_1}^{A_s} p_s dA + p_s (A_2 - A_s) \quad (22)$$

式中 A_s 可以写成

$$A_s = A_1 + \sigma(A_2 - A_1) \quad (23)$$

这样 $\sigma = 0$ ($A_s = A_1, p_s = p_1$) 相应于直接分离流动, 而 $\sigma = 1$, ($A_s = A_2, p_s = p_2$) 相应于无分离流动。对于任何的 A_s 值, p_s 的相应值取决于假定的管壁弹性。于是, 分析就可以用与“分析”一节中相同的方式来着手, 导出如图2和3上中间的曲线。 σ 的近似值可以用实验由测量速度指标(作为激波压力和面积比的函数)来决定。可以预期, $\sigma = 1$ 是很弱的激波。从较强激波中看到的较小的值, 多半也取决于流动雷诺数。此外, σ 也应该取决于在激波之前的边界层。如果激波在相对于管壁为静止的流体中传播, 则没有这种边界层。这些效应在本文的分析中未予考虑, 但如前所述的试验却在 Technion-Israel 工学院正由 Lanir 和 Kivity^[18] 计划进行, 并且将会提供有关流动分离的范围的信息。

表1指出, 带有分离流动的激波损失比无分离时为大。显而易见, 这是由于在分离区中伴随着旋涡而产生附加损失的结果。

软橡皮管经常用来模拟主动脉和大血管中的血液流动的某些方面。图2和图3的数据比较, 表明这两种管子有着不同的情况。当然, 理由就在于主动脉中波速随着压力而增加, 而在橡皮管中的波速却是减小的。所以, 在把根据橡皮管得到的结果所作的结论应用于血管时, 必须特别小心。

参 考 文 献(略)

何卓烈译自: *Trans. ASME, J. Biomech. Engng.*, **102**, 1 (1980):
23—27. (吴达人校)