

流动稳定性 N-S 方程直接求解的数值方法¹⁾

中山大学 张涤明

流动稳定性的线性理论仅限于振幅很小的扰动,对于探讨不稳定性来说,则仅限于很小扰动还来不及怎么发展就失去流动稳定的那种初发不稳定性。它在研究有限振幅的扰动,经过较长时间发展的扰动增长,以及流动从层流至湍流的过渡等方面显然是成问题的。人们早就注意到有限振幅的非线性影响。例如,在实验方面, Davies 等^[1], Kao 等^[2]以及 Fated 等^[3]都证明了平面 Poiseuille 流对有限振幅扰动在雷诺数低达1000时出现流动的不稳定,而在稍低于1000时初始湍流将使流动保持为湍流;在理论方面,早在1951年 Meksyn 和 Stuart^[4]就引进了考虑到平均流与一次扰动波相互作用的所谓均场方程(meanfield equation),得出有限振幅扰动的非线性影响可以使扰动在亚临界雷诺数下得到增长的结论。研究流动稳定性非线性问题的数值方法,虽然可以建立在各种不同非线性理论的基础上,例如 Grohne^[5]求解 Meksyn 等所引进的均场方程的数值方法等,但无论如何,最根本的还应着眼于对 Navier-Stokes 方程(N-S 方程)的直接求解。本文将主要介绍对于流动稳定性问题直接 N-S 方程求解的数值方法。至今,应用于流动稳定性直接求解 N-S 方程的数值方法有有限差分法和谱方法两种。李毓湘和葛时俊^[6]将有限元法应用于流动稳定性的线性问题,表明有限元法应用于求解流动稳定性的线性化方程,例如求解平面 Poiseuille 流线性稳定性的 Orr-Sommerfeld 方程,是完全可行的。但用于直接求解 N-S 方程却还有待研究。下面我们分别介绍对流动稳定性问题直接求解 N-S 方程的差分法和谱方法。

1. 有限差分方法

差分法应用于求解流动稳定性这样极强的时间相关问题,并非寻常的事情。首先要涉及对差分格式数值稳定性的要求。如果不管解什么问题都得要求差分格式数值稳定,那么,对流动稳定性问题来说这一差分格式的基本要求就显得特别严格。因为如果差分格式本身不是极其稳定,那就会分辨不清流动的物理稳定性和求解过程中的数值稳定性。研究流动稳定性时人们所关心的是流动的物理稳定性。这种物理稳定性与求解过程中的数值稳定性如果混淆不清,甚至为数值稳定性所淹没,那就根本达不到求解问题的目的。其次要涉及差分格式的精度。程心一^[7]曾以模型方程作过研究,证明对于流动稳定性这类具有周期性解的问题,差

1) 曾在中国力学学会流动稳定性学术研讨会(1982年5月5—14日,广州)上宣讲。

分格式最低限度必须具有二阶的精度。这是不难理解的。流动之失去稳定都是在雷诺数相对地比较大的情况下发生。因此研究流动稳定性时雷诺数一般都比较小，这就要求差分格式的数值损耗（即人工粘性系数）要相对地很小，否则将造成在粘性损耗方面物理的因素为非物理的因素所掩盖，不能反映出真实的物理现象。要减小非物理的人工粘性的影响，就必须具有高阶的差分格式精度。另一方面，因为流动稳定性问题是一个极强的时间相关的问题，所以最要紧的是扰动量随时间的变化即流动的时间相关性质。在计算中，务必使时间过程的每一步都具有其解的真实性。很多求解 N-S 方程流行的差分格式，虽然在流动趋于定常时其最后结果具有解的真实性，但其随时间的变化过程却是靠不住的。实践表明，要能真实地反映出这种具有极强时间相关性质的问题随时间的变化过程，N-S 方程中的时间导数项也必须采用高阶精度的差分格式。最后一点是对差分格式效能的要求，这也是计算流动稳定性问题要比计算其它一般流动问题要高得多的要求。用差分法解流动稳定性问题所需的机时大，这就要求很大的计算机容量和速度。所以，一个对计算有希望的差分格式，必须其本身就具有极高的计算效能，即差分格式本身必须具有计算速度快，所要求的计算机容量相对地小的特点。

由此可见，流动稳定性 N-S 方程有限差分法直接数值求解，对差分格式的要求往往非一般的差分技术所能满足，而必须给以一些特殊的处理。

最早应用差分法研究流动稳定性的是 Thomas^[5]，但他只是基于 Orr-Sommerfeld 方程对平面 Poiseuille 流解了线性问题。DeSamto 等^[6]，Dixon 等^[7,8]以及 Crouder 等^[11]由于对基本流动和（或）对扰动所作的假设，以及所采用的差分格式不理想，所以得到的结果都只有定性的性质。近年来 Fasel 等^[12-14]采用一种完全的隐格式直接求解 N-S 方程，对二维平板边界层，对二维平面 Poiseuille 流，都得到了较好的结果。对于振幅很小的周期扰动情形，Fasel 等的数值结果，同线性理论和实验进行比较，都很好符合。下面概要介绍 Fasel 的方法。

Fasel 研究二维平板边界层层流的稳定性，采用速度涡量形式的无量纲 N-S 方程。考虑到边界层的 y 坐标和 y 方向的速度分量具有因子 \sqrt{Re} ，无量纲 N-S 方程为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (1a)$$

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (1b)$$

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (1c)$$

这里 x, y 为无量纲坐标， u, v 为相应的无量纲速度分量， $Re = U_\infty L / \nu$ 为雷诺数，无量纲涡量

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x}$$

1948年 Schubauer 等^[15]曾做过一个实验，在一长平板上的层流边界层内，使之受一薄带的周期性扰动，他们对一振幅很小的正弦扰动，观察 Tollmien-Schlichting 波的发展。1970年 Ross 等^[16]重做了这个实验。Fasel 所作的计算就是这个物理实验的数值模拟，因而取求解的区域为如图 1 所示的矩形区域 $ABCD$ ($0 \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq Y$)，其左边的边界 AD 位于振动薄带的下游。

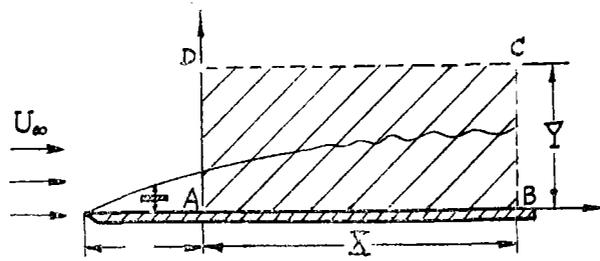


图1 求解区域

偏微分方程组(1)是非线性的。差分法求解是在一选定的有限求解区域内积分方程。凡划定求解区域而在流场中所添的边界,都必须加给必要的附加条件。如何合理地确定所求解区域的边界条件,对差分法来说是至关重要的。求解区域边条件的确定,要考虑到问题的适定,要使在其它方面都稳定的差分格式,其数值稳定性不致受到不利的影响。甚至遭受破坏,要使所取的边条件以相对地小的花费的计算保持在可接受限度内的有限求解区域能够得到物理上有意义的结果。Fasel 确定求解区域的边条件为

在平板 AB 上, $y=0$, 有

$$u(x, 0, t) = v(x, 0, t) = 0 \quad (\text{无滑移条件}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega(x, 0, t)}{\partial x} = -\frac{\partial^2 v(x, 0, t)}{\partial y^2} \quad (3)$$

在下游边界 BC 上, $x=X$, 有

$$\frac{\partial^2 u'(X, y, t)}{\partial x^2} = -\alpha^2 u'(X, y, t) \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 v'(X, y, t)}{\partial x^2} = -\alpha^2 v'(X, y, t) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \omega'(X, y, t)}{\partial x^2} = -\alpha^2 \omega'(X, y, t) \quad (6)$$

其中带撇的量为扰动量, α 为扰动流的实波数。

在边界 CD 上, $y=Y$, 假设涡量扰动为零, 有

$$\omega'(x, Y, t) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial u'(x, Y, t)}{\partial y} = -\frac{\alpha}{\sqrt{Re}} u'(x, Y, t) \quad (8)$$

$$\frac{\partial v'(x, Y, t)}{\partial y} = -\frac{\alpha}{\sqrt{Re}} v'(x, Y, t) \quad (9)$$

在上游边界 AD 上, $x=0$, 设引进一扰动的数值模式, 在 AD 上扰动量 P_u, P_v, P_ω 都只依赖于 y 和 t , 设未受扰动的主流为 u_B, v_B, ω_B , 则有

$$u(0, y, t) = u_B(0, y) + P_u(y, t) \quad (10)$$

$$v(0, y, t) = v_B(0, y) + P_v(y, t) \quad (11)$$

$$\omega(0, y, t) = \omega_B(0, y) + P_\omega(y, t) \quad (12)$$

主流可用定常平板边界层的 Blasius 解。至于扰动的数值模式, 譬如, 可以采用由线性理论求得的结果,

对于初始条件, 要事先确定一个未受扰动的流场 U, V, Ω , 初始条件为 $t=0$, 有

$$u(x, y, 0) = U(x, y) \quad (13)$$

$$v(x, y, 0) = V(x, y) \quad (14)$$

$$\omega(x, y, 0) = \Omega(x, y) \quad (15)$$

确定未受扰动的流场, 必须求解没有 $\partial\omega/\partial t$ 项的定常流动 N-S 方程, 求解的边条件为在平板 AB 上, 有

$$\left. \begin{aligned} U(x, 0) = V(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial\Omega(x, 0)}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V(x, 0)}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

在下游 BC 上, 有

$$\frac{\partial^2 U(X, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V(X, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Omega(X, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (17)$$

在外层边界 BC 上, 有

$$U(x, Y) = 1, \quad \frac{\partial V(x, Y)}{\partial y} = 0, \quad \Omega(x, Y) = 0 \quad (18)$$

在上游 AD 上, 有

$$U(0, y) = u_B(0, y), \quad V(0, y) = v_B(0, y), \quad \Omega(0, y) = \omega_B(0, y) \quad (19)$$

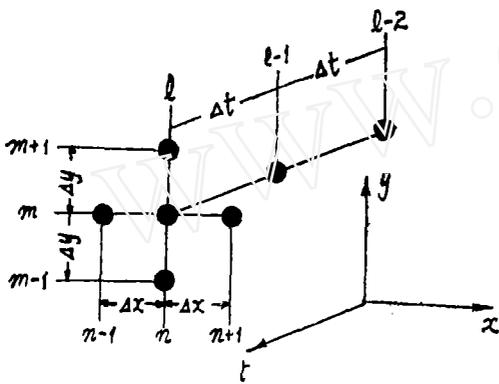


图 2

同样, 这里 u_B, v_B, ω_B 为 Blasius 解。为什么不干脆整个流场取 Blasius 解为初始未受扰动的流场呢? 结果表明, Blasius 解与以之为上游边条件的定常 N-S 方程的解, 的确很一致, 但考虑到这里所要研究的是流动对很小扰动的反作用, Blasius 解与 N-S 方程的解虽然一致, 但总有微小差别, 这差别可能与研究的强迫扰动有相同的量级。于是造成初始扰动的失真。所以由 N-S 方程直接求得初始流场为的是避免流动初始扰动的失真。

Pasci 为了满足流动稳定性问题对差分格式的要求, 他采用了一种三时间层次的全隐式差分格式 (如图 2)。所谓“三时间层次”就是方程中的时间导数项 $\partial\omega/\partial t$ 在三个时间层次上取差商, 以二阶精度的格式近似为

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} \Big|_{n,m}^l = \frac{1}{2\Delta t} \left(3\omega_{n,m}^l - 4\omega_{n,m}^{l-1} + \omega_{n,m}^{l-2} \right) + O(\Delta t^2) \quad (*)$$

所谓“全隐式”就是在全部基本方程和边条件中, 所有函数格点值和空间差商都取在最新的时间层次上, 空间差商取二阶精度的中心差。

方程组 (1) 中, (1a) 是涡量传递方程, 是非线性的, 化为差分方程则是一组非线性代数方程组; 方程 (1b) 和 (1c) 均为 Poisson 方程, 也各得一组代数方程组。 (1a) 的代数方程组通过其非线性对流项分别与 (1b) 和 (1c) 的两代数方程组耦合。此外它还通过边条件 (3) 对平板上涡量的计算而与 (1c) 的方程组对 v 耦合。三个代数方程组之间的耦合, 当然可以用迭代法通过在 (1a) 的方程组中和在边条件 (3) 中取 u, v 为前一次迭代所得值予以消除, 从而

使每一代数方程组都能独立求解。但这样消除耦合的迭代过程，其收敛性很差，随着雷诺数的增加，其收敛速度变慢。对于这样一个耦合系统，Fasel (1974) 发展了一个相当有效的基于线迭代 (line-iteration) 的解法： v, ω 的格点值在平行于 Oy 轴的网格线上直接由所得的三对角方程组求解确定，而在 Ox 轴方向则由迭代求得。用这样的线迭代方法，差分方程为（其中 i 为迭代指标， l 为时间层次指标）

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta y^2}{2\Delta t} \left(t_1 \omega_{n,m}^{l,i} - t_2 \omega_{n,m}^{l,i-1} + t_3 \omega_{n,m}^{l,i-2} \right) \\ & + \frac{\Delta y^2}{2\Delta x} u_{n,m}^{l,i-1} \left(\omega_{n+1,m}^{l,i-1} + 2\omega_{n,m}^{l,i} - 2\omega_{n,m}^{l,i-1} - \omega_{n-1,m}^{l,i} \right) \\ & + \frac{\Delta y}{2} v_{n,m}^{l,i-1} \left(\omega_{n,m+1}^{l,i} - \omega_{n,m-1}^{l,i} \right) \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \left(\omega_{n+1,m}^{l,i-1} - 2\omega_{n,m}^{l,i} + \omega_{n-1,m}^{l,i} \right) \\ & - \omega_{n,m+1}^{l,i} + 2\omega_{n,m}^{l,i} - \omega_{n,m-1}^{l,i} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \left(u_{n+1,m}^{l,i-1} - 2u_{n,m}^{l,i} + u_{n-1,m}^{l,i} \right) + u_{n,m+1}^{l,i} - 2u_{n,m}^{l,i} + u_{n,m-1}^{l,i} \\ & - \frac{\Delta y}{2} \left(\omega_{n,m+1}^{l,i} - \omega_{n,m-1}^{l,i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \left(v_{n+1,m}^{l,i-1} - 2v_{n,m}^{l,i} + v_{n-1,m}^{l,i} \right) + v_{n,m+1}^{l,i} - 2v_{n,m}^{l,i} + v_{n,m-1}^{l,i} \\ & + \frac{\Delta y^2}{2\Delta x} \left(\omega_{n+1,m}^{l,i-1} + 2\omega_{n,m}^{l,i} - 2\omega_{n,m}^{l,i-1} - \omega_{n-1,m}^{l,i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

这里 $1 \leq n \leq N-1, 1 \leq m \leq M-1, l=0, 1, 2, \dots$

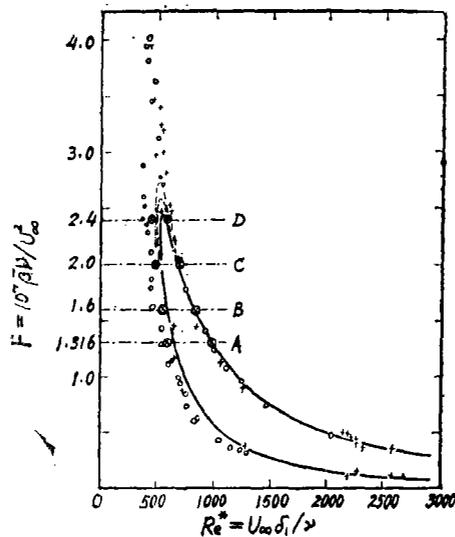


图3 中性点与线性理论，其它理论与实验结果的比较

- Orr-Sommerfeld 的数值解
- - - 改进的Orr-Sommerfeld 的数值解
- · - · - Gaster^[13]的数值研究
- + 实验测试(Schubauer等^[15])
- o 实验测试(Ross 等^[16])
- o 中带 x: N-S方程直接数值解^[12]

$t_1 = t_2 = t_3 = 0$, 当 $l = 0$ 时 (定常流动)

$t_1 = t_2 = 2, t_3 = 0$, 当 $l = 1$ 时 } (非定常流动)

$t_1 = 3, t_2 = 4, t_3 = 1$, 当 $l > 1$ 时 }

为了检验方法, Fasel 对振幅很小的周期扰动, 就无量纲频率参数 $F (F = 10^4 \bar{\beta} \nu / U_0^2, \bar{\beta}$ 为无量纲的扰动频率) = 1.316, 雷诺数 $Re^* = U_0 \delta_1 / \nu, \delta_1$ 为边界层位移厚度 = 635 和 970 的两种情形, 作了大量的计算。Fasel 方法计算得到的结果与实验符合很好, 与其它的理论也很一致, 或更为合理。例如, 对于中性稳定性曲线 (如图 3), 在右边的分支, Fasel 方法得到的中性点与线性理论和其它理论 (例如 Gaster^[13] 的数值研究) 得到的, 以及与 Schubauer 等^[15] 的实验和 Ross 等^[16] 的实验测得的都完全一致; 在左边的分支, Fasel 的 N-S 方程直接数值解得到的中性点在低雷诺数时与线性理论多少有些偏差, 但 Fasel 的直接数值解比线性理论更接近于 Ross 等的实验结果。

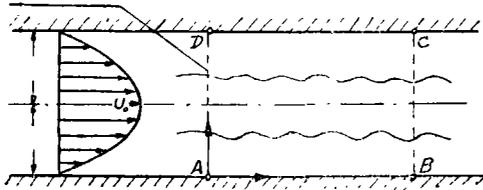


图4 平面 Poiseuille 流扰动空间发展数值研究的区域

Fasel 等^[14] 以上述 Fasel 的方法研究了平面 Poiseuille 流二维扰动的非线性发展。所建立的是两平行平板之间的平面平行流动在某固定位置受周期性扰动, 这个周期性的扰动由线性理论确定, 而流动对这个扰动的反作用则由 N-S 方程在矩形区域 ABCD 上 (图 4) 的直接数值求解来确定。

这里, 情况稍不同于上述边界层的是, y 方向的坐标和速度分量没有因子 \sqrt{Re} , 因而基本方程为完全二维 N-S 方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (23a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (23b)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = - \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (23c)$$

同样, 他们先对小振幅扰动作了若干验证性计算, 与线性理论一一比较, 然后进行扰动非线性发展的计算和研究。他们对在不稳定区的雷诺数 $Re = 10000 (Re = U_0 h / \nu)$ 和无量纲扰动频率 $\beta = 0.2375$, 以及在稳定区的雷诺数 $Re = 5000$ 和无量纲扰动频率 $\beta = 0.323$ 的两种情形, 扰动振幅 (与 U_0 之比) 从 0.05% 至 6%, 作了一系列扰动水平的计算, 计算了扰动的空间放大和扰动往下游方向的发展。

不过, Fasel 的差分法对平板边界层和平面 Poiseuille 流的层流稳定性都只作了二维问题, 也就是说只就流动的稳定性, 流动扰动的发展等解了二维的 N-S 方程。

2. 谱方法

谱方法包括两个基本步骤。第一步是选取基函数序列, 序列有限截断, 将未知函数近似展开为有限基函数的线性组合; 第二步是逼近所要求解的方程, 从而将方程变为求解未知函数展开式组合系数的代数方程组。由对基函数序列选取的要求和方程逼近的方法之不同, 谱方法分为 Galerkin 法, τ 方法和配置法 (又称伪谱方法)

Galerkin 方法要求未知函数的近似展开式

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \phi_n(x) \quad (24)$$

满足所有本质边条件, 式中 $\phi_n(x) (n=1, 2, \dots, N)$ 为基函数, 而方程以 Galerkin 方法逼近, 即原方程未知函数代之以近似展开式后, 对每一基函数在积分区域上取内积。

τ 方法与 Galerkin 方法不同, 它要求基函数 $\phi_n (n=1, 2, \dots)$ 为正交完备集, 但不必满足边条件。未知函数展开为

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^{N+k} a_n(t) \phi_n(x) \quad (25)$$

这里 k 是独立边条件的个数。需要 $N+k$ 个方程的方程组来确定展开式的系数 $a_n (n=1, 2, \dots, N+k)$ 。前 N 个由 Galerkin 方法并考虑到基函数的正交性得到, 最后 k 个由独立的边条件得到。

配置法或伪谱方法, 未知函数近似展开为

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \phi_n(x) \quad (26)$$

在积分区域上选取 N 个配置点 $x_i (i=1, 2, \dots, N)$, 展式的系数 a_n 由下式确定:

$$\sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x_i) = u(x_i), \quad i=1, 2, \dots, N \quad (27)$$

在流动稳定性的线性理论中, 谱方法早已得到应用, 基本上都采用 Galerkin 法。Dolph 等^[17]对平面 Poiseuille 流解了时间无关的 Orr-Sommerfeld 方程, 他们取基函数为

$$L^2 \phi_n = \lambda_n (\alpha^2 - D^2) \phi_n \quad (28)$$

(其中 $L = D^2 - \alpha^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2$) 的特征函数。这些特征函数是正交的, 他们在计算中只取其中的偶函数序列。当他们采用含 8 项的展开式时, 所得结果很差, 但采用含 12 项的展开式时, 却得到了比较满意的结果。

Grosh 等^[18]对平面 Poiseuille 流解了时间无关和时间相关的 Orr-Sommerfeld 方程, 取基函数为

$$L^2 \phi_n = \lambda^4 \phi_n, \quad \phi_n = \phi'_n = 0 \text{ 在 } y = \pm 1/2 \quad (29)$$

的特征函数。特征函数的偶函数序列为

$$\phi_n(y) = C_n \left[\frac{\cosh(\beta_n y)}{\cosh(\beta_n/2)} - \frac{\cos(\gamma_n y)}{\cos(\gamma_n/2)} \right] \quad (30)$$

其中 $\beta_n = (\lambda_n^2 + \alpha^2)^{1/2}, \gamma_n = (\lambda_n^2 - \alpha^2)^{1/2}$

$$\beta_n \tan(\beta_n/2) + \gamma_n \tan(\gamma_n/2) = 0$$

显然函数序列是正交的。对时间无关问题, 他们作了展开式含 20 项至 50 项的系列计算, 结果表明, 当乘积 αRe 增加时, 所含项数也要增加。

对于二维问题研究非线性影响直接数值求解 N-S 方程, Galerkin 法也已得到广泛的应用, Dowell^[19]从扰动流函数的方程

$$\frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - U \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi \quad (31)$$

出发,求解了平面 Poiseuille 流的稳定性.式中 $U = y - y^2$ 为平板间未受扰动的平行流速度.方程是非线性的. Dowell 对未知函数 ψ 采用近似展式

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left[A_{mn} \cos n\alpha x + B_{mn} \sin n\alpha x \right] \psi_m(y) \quad (32)$$

而 $\psi_m(y) = \cos(m-1)\pi y - \cos(m+1)\pi y \quad (33)$

$\psi_m(y)$ 完备, 但不正交. 这里 Galerkin 法的方程逼近是: 基函数为 $(\cos n\alpha x)\psi_m(y)$ 和 $(\sin n\alpha x)\psi_m(y)$, 对 y 在两平板间取内积. 如果是线性问题, 用这个方法, 展式中含 40 项至 50 项就能得到和 Thomas^[8] 用差分法解 Orr-Sommerfeld 方程相一致的结果. 计算非线性问题, 数值积分中包含这样许多的项往往不容易行得通, 但无论如何不得小于 $N = 2, M = 16$ 的项数.

Pekeris 等^[20] 对平面 Poiseuille 流数值求解二维 N-S 方程, 对 x 也是以 Fourier 模式展开, 但对 y 是以 Orr-Sommerfeld 方程的特征函数展开的. 他们的计算得到: 6% 的扰动时, 在 $\text{Re} = 1000$ 这样低的雷诺数时流动不稳定, 扰动为 0.4% 时, $\text{Re} = 3000$ 时流动不稳定.

Herbert(1976, 1977) 对平面 Poiseuille 流所作的计算, 展开式对 x 取 8 项 Fourier 模式, 而对 y 取 41 项 Chebyshev 多项式. 他解时间无关问题, 得到临界雷诺数为 2935, 相应的波数为 $\alpha = 1.3231$.

George 等^[21] 将谱方法和有限差分法结合使用. 他们将速度场对 x 展成 Fourier 级数, 而对 y 采用差分法. 他们解平面 Poiseuille 流的时间相关问题, 但不采用 Orr-Sommerfeld 方程的特征模式作初始条件, 而采用流函数

$$\psi(x, y) = K \left(\frac{\cosh ay}{\cosh a} - \frac{\cos ay}{\cos a} \cos \alpha x \right) \quad (34)$$

所产生的速度场为初始速度场. 为满足边条件, 这里 $a \approx 2.365$. 他们得到, 流动不稳定性发生在大于大约 3500 的雷诺数时.

Zahn 等^[22] 也用谱方法与差分法结合对平面 Poiseuille 流的稳定性解了二维 N-S 方程. 他们对 x 取二项 Fourier 模式的展开, 而对 z 取步长不等的差分格式, 求得有限振幅不稳定的最小雷诺数为 2707, 其相应的 $\alpha = 1.3126$.

上述的研究都是二维的. Orszag 等^[23] 对平面 Poiseuille 流和平面 Couette 流的三维有限振幅扰动用谱方法直接求解了三维 N-S 方程, 从而对这两种流动研究了三维扰动对流动稳定性和流动过渡的影响. 他们从方程

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) - \nabla \Pi(\mathbf{x}, t) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (35)$$

出发, 在三维空间 $0 \leq x \leq X, -\frac{1}{2} Y \leq y \leq \frac{1}{2} Y, -1 \leq z \leq 1$ 上求解. 式中

$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ 是涡量, $\Pi(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2$ 是压力头, $z = \pm 1$ 为无滑移

条件, 而在两水平方向均为周期边条件, 对整数 m, n ,

$$v(x+mX, y+nY, z, t) = v(x, y, z, t) \quad (36)$$

他们将速度场对 x 和 y 均展成 Fourier 级数, 对 z 以 Chebyshev 多项式展开, 速度表示为

$$v(x, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \sum_{p=1}^P u(m, n, p, t) \exp\left[2\pi i \left(\frac{mx}{X} + \frac{ny}{Y}\right)\right] T_p(z) \quad (37)$$

其中 m, n, p 为整数, $T_p(z) = \cos(p \cos^{-1} z)$ 为 Chebyshev 多项式. 方程 (35) 中含涡量的项 (非线性项), 他们用伪谱方法处理, 表示为

$$\begin{aligned} v \times \omega &= v(x_j, y_k, z_l) \times \omega(x_j, y_k, z_l) \\ 0 \leq j < 2M, 0 \leq k < 2N, 0 \leq l < P \end{aligned}$$

这里配置点 x_j, y_k, z_l 为

$$x_j = \frac{jX}{2M}, y_k = \frac{(k-N)Y}{2N}, z_l = \frac{\cos \pi l}{p} \quad (38)$$

$v(x_j, y_k, z_l)$ 和 $\omega(x_j, y_k, z_l)$ 的值分别由 (37) 和由 (37) 取旋度用快速富氏变换方法得到. 此外, 为了使混淆影响减小到最小, 他们在 xy 平面上对 $v \times \omega$ 的谱表示应用了特殊的循环截断. 对于 N-S 方程中的压力项和粘性项, 他们采用 τ 方法处理. 他们求解时间相关问题, 对于时间, 他们用差分法, 采用分步时间步长方法.

Orszag 等^[2,3] 在计算中, 展式取 Fourier 模式到 32 项, 取 Chebyshev 多项式到 33 项, 结果得到, 平面 Poiseuille 流在大约大于 2800 的雷诺数可允许中性稳定的二维有限振幅扰动, 而平面 Couette 流没有中性稳定的二维有限振幅扰动. 他们的计算表明: 三维扰动有一个很强的使流动稳定的影响; 有限振幅扰动可使平面 Poiseuille 流和平面 Couette 流在 1000 量级的雷诺数过渡到湍流; 平面 Poiseuille 流在雷诺数低于 500 时不能为湍流.

与差分法比较, 谱方法的优点是: ①适当的谱方法往往可达到比差分法要高的精度, 而且, 由于快速变换方法的发展, 使得谱方法的效能也完全可与具有相同独立自由度的差分法的效能相比. 一般来说, 达到同样的精度, 谱方法所需独立自由度要比差分法所需的少一半至五分之四, 因此总的来说, 谱方法的效率要比差分法高得多. 随着对精度要求的提高, 谱方法自然是愈来愈具有吸引力的. ②差分法必须选定有限的区域求解, 而在选定的求解区域上, 必须额外加给边条件, 于是常常造成差分方程具有不同于原来方程的数学特征. 谱方法就没有这一缺点, 谱方法是始终保持原问题的数学特征的. ③谱方法常常有可能通过对谱的形式分析, 估计出计算的精度, 差分法却作不到.

参 考 文 献

- 1 Davies, S.J., White, C.M., An experimental study of the flow of water in pipes of rectangular section, *Proc. Roy. Soc.*, A119(1928): 92.
- 2 Kao, T.W., Park, C., Experimental investigation of the stability of channel flows. Part 1. Flow of a single liquid in a rectangular channel, *J. Fluid Mech.*, 43(1970): 145.
- 3 Patel, V., and Head, M. R., Some observation on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flow, *ibid.*, 38 (1969): 181.
- 4 Meksyn, D., and Stuart, J.T., Stability of viscous motion between parallel planes for finite disturbances, *Proc. Roy. Soc.*, A 208(1951): 517.
- 5 Grohne, D., Die stability der ebenen kanalströmung gegenüber dreidimensionalen störungen von endlicher amplitude, A. V. A. Gottingen Rep 69-A-30 (1969).
- 6 Li, Y.S. (李毓湘), Kot, S.C. (葛时俊), One-dimension finite element method in hydrodynamic stability, *Int. J. Numer. Meth. in Eng.*, 17(1981): 853-870.

- 7 Cheng, S.I. (程心一)(1970), Numerical integration of Navier-Stokes equations, *AIJA J.*, **8**(1970): 2115—2122.
- 8 Thomas, L.H., The stability of plane Poiseuille flow, *Phys. Rev.*, **91**, 2(1953): 780—783.
- 9 De Santo, D.F., Keller, H.B., Numerical studies of transition from laminar to turbulent flow over a flat plate, *J. Soc. Incl. Appl. Math.*, **10**(1962):569.
- 10 Dixon, T.N., Hellums, J.D., A study on stability and incipient turbulence in Poiseuille and plane-Poiseuille flow by numerical finite-difference simulation, *AIChE J.*, **13**(1967): 866.
- 11 Crowder, H.J., Dalton, C., On the stability of Poiseuille flow in a pipe, *J. Comp. Phys.*, **7**(1971):12.
- 12 Fasel, H., Investigation of the stability of boundary layer by a finite difference model of the Navier-Stokes equations, *J. Fluid Mech.*, **78** (1976): 355.
- 13 Gaster, M.(1974), On the effects of boundary layer growth on flow stability, *ibid.*, **66**(1974): 465.
- 14 Fasel, H., Bestek, H., Schefenacker, R., Numerical simulation studies of transition phenomena in incompressible, two-dimensional flows, Proc. AGARD Conf. on Laminar Turbulent Transition, Lyngby, Denmark 1977, AGARD-CP-224, Paper No. 14(1977).
- 15 Schubauer, G.B., Skramstad, H.K., Laminar boundary layer oscillations and transition on a flat plate, NACA Rep. No. 909 (1948).
- 16 Ross, J.A., Barnes, F.H., Burns, J.G., Ross, M.A.S., The flat plate boundary layer. Part 3. Comparison of theory with experiment, *J. Fluid Mech.*, **43**(1970): 819.
- 17 Dolph, C.L., Lewis, D. C., On the application of infinite systems of ordinary differential equation to perturbations of plane Poiseuille flow, *Quart. Appl. Math.*, **16**(1958): 97—110.
- 18 Grosch, C.E., Salwen, H., The stability of steady and time-dependent plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, **40**(1968): 783—806.
- 19 Dowell, E.H., Non-linear theory of unstable plane Poiseuille flow, *ibid.*, **36**(1959): 401—414.
- 20 Pekeris, C. L., Shkoller, B., Stability of plane Poiseuille flow to periodic disturbances of finite amplitude, II, Proc. Nat. Acad. Sci., **68**(1971): 197.
- 21 George, W.D., Hellums, J.D., Martin, B., Finite-amplitude neutral disturbances in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, **63**(1974): 785.
- 22 Zahn, J.-P., Toomre, J., Spiegel, E.A., Gough, D.O., Nonlinear cellular motions in Poiseuille channel flow, *ibid.*, **64**(1974): 319.
- 23 Orszag, S.A., Keele, L.C., Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow, *ibid.*, **55**(1983): 169.

NUMERICAL METHODS OF DIRECTLY SOLVING THE N-S EQUATION ON HYDRODYNAMIC STABILITY

Zhang Di-ming
(Zhongshan University)