第14卷 第3期 力学进展 Vol. 14 No. 3
1984年8月25日 ADVANCES IN MECHANICS Aug. 25, 1984

结构优化设计的若干进展

哈尔滨船舶工程学院 蔡荫林

一、引 言

过去30年电子计算机的迅速发展，大大促进了所有工程学科进行设计优化的进展。特别是求解连续介质力学问题的有限元法的出现，大大促进了结构优化设计的发展。

1960年Schmit[1]首先提出了用数学规划方法求解多种载荷情况下弹性结构设计的数学表达，开始了结构优化（或称结构综合）的新时代。在这个表达式中，结构优化设计成为在诸如应力、位移、频率等性态函数约束下的"n"维设计变量空间中目标函数的数学极值问题，而由线性和非线性规划方法来实现极值的搜索。例如，用梯度投影法、可行方向法以及罚函数法等方法，来实现这种搜索。上述结构优化的数学规划方法，在它出现以后的不久时间里很快普及，并应用到大量的结构设计问题上。

但不久就发现，数学规划方法用于实际结构优化问题时往往由于设计变量太多、约束太多和所需结构分析次数太多而效率很低。1968年以后Venkayya[2]和Gellatly[3]等开始重新大力研究，发展了结构优化的最佳性准则方法，几年内获得很大进展。导出了应力、位移、频率、屈曲、颤振等约束下结构的最佳准则，编制了基于有限元结构分析和这些准则的大型优化程序如OPTIM[4]，ASOP[5]，FASTOP[6]，OPTCOMP[7]，DESAP[8]等。这些程序可处理的约束包括静应力、位移、稳定性以及动刚度、气动弹性约束，可以处理各向同性、各向异性和分层的复合材料结构，问题可包含上千个设计变量。

在最佳性准则方法得到迅速发展的同时，数学规划方法的研究工作也获得很大进展。Schmit等[9-11]针对数学规划法效率低的缺点，提出了结构综合的近似概念，使得这类方法的效率得到很大提高。特别是所需的结构分析次数已和准则法处于同一数量级，即通常只需进行5—10次的结构分析即可达到收敛。

近几年来，Knot，Berke和Venkayya[12,13]对最佳性准则法的研究表明，各种迭代公式之间有着密切的联系，而且某些关系式可以用非线性规划的投影方法导得。同时，Fleury[14,15]在原有最佳性准则方法的基础上，提出了广义最佳性准则以及用对偶公式求解结构优化问题的算法。接着Schmit和Fleury[16-18]提出了将对偶方法和近似概念相结合的算法，进一步完善了基于有限元分析和结构综合近似概念的ACCESS程序系统，进一步提高了规划法的效率。以上这些工作，都将数学规划方法和最佳性准则方法统一了起来。与此同时，我国钱令希等[19]研制了DDDU程序系统，这个程序系统根据Kuhn-Tucker条

件导出迭代公式，而采用数学规划方法有效地确定出有效约束，也将准则法和规划法结合了起来，并和对偶方法一样，解决了最佳性准则方法中一直存在的判定有效、无效约束和区分主动、被动变量的困难。

总之，近10年来结构优化设计获得了不断的发展，本文着重介绍上面提到的若干进展。

二、结构优化（综合）的近似概念

1960 年 Schmit 在文献[1]中提出的一般结构优化设计问题的表达，对于最小重量设计可以叙述为：对于布局已定、元件尺寸作为设计变量的结构最小重量设计的数学问题是：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{求} & A=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T \text{ 使} \\ \text{重量目标函数} & W(A)=\sum_{i=1}^{n}\rho_i l_i a_i \quad \text{最小} \\ \text{约束条件是} & h_j(A)\geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,J)\end{array}\right\} \quad (1)$$

式中的 a_i 是元件 i 的尺寸变量，如杆元的横截面积，三角形平面应力元的厚度等等；l_i 是元件 i 的长度或表面积，即它与尺寸变量相乘得到元件的体积；ρ_i 是元件 i 的比重；W 是结构重量；n 是结构模型的有限元总数；h_j 是问题中的不等式约束，它通常包括每种载荷情况下的性态约束（如应力、位移、频率约束）和边界约束（元件尺寸约束）；J 是不等式约束的总数。这是一个目标函数为线性的非线性数学规划问题。

在刚刚提出这个表达式的时候，由于实际结构设计问题的设计变量数 n 比较大，约束数 J 比较大，而且在用数学规划方法迭代求解过程中，为求得约束和目标函数所需的结构分析次数太多，而使效率不高。

1976 年左右，Schmit 等[9-11]提出了结构综合问题的近似概念。这些近似概念针对原来数学规划方法效率低的原因采取了改进的措施。它们主要是通过设计变量连接等方法减少独立设计变量数，通过约束删除，减少进入优化算法的约束数和形成保留约束的高质量显式近似值，以减少结构分析数。

设计变量连接 由于通常既不必要也不希望结构模型每一元件的尺寸作为独立的设计变量，因此可以用设计变量连接的方法减少独立设计变量数。这种方法简单地固定某些预先规定的元件组的相对尺寸，因而一个独立设计变量，控制着所有该连接组中元件的尺寸。通常，我们用下式来表达这种连接关系：

$$a_i=T_{ib(i)}\delta_{b(i)} \quad (i=1,2,\cdots,n,\ b=1,2,\cdots,B) \quad (2)$$

式中 $T_{ib(i)}$ 是连接常数，下标中的 $b(i)$ 表示第 i 元件包括在共有 B 个连接组中的第 b 个连接组，而 $\delta_{b(i)}$ 是第 b 个连接组的独立设计变量。

约束删除 迭代过程的每一阶段中仅某些临界和接近临界的约束是主要起作用的，因此可以暂时删除那些非临界和不可能临界的约束。删除的方法，可以是在每一连接组中对每种载荷情况只保留一个最临界的应力约束，因为一个阶段的设计变化通常不会改变该连接组中临界约束的位置；也可以是直接按一定的截断值抛弃远离现行设计点的约束。

约束的显式近似值 将约束函数在现行设计点 A_p 作泰劳级数展开并取线性项，有

$$h_j(A)\approx\tilde{h}_j(A)=h_j(A_p)+(A-A_p)\nabla h_j(A_p) \quad (j=1,2,\cdots,J) \quad (3)$$

式中 $\nabla h_j(A_p)$ 是约束 h_j 在 A_p 的梯度，则在现行设计点 A_p 附近进行搜索，以求得目标函数有较大下降的设计点时不必进行结构重分析，而用上述线性化的约束函数的显式近似值来代替。这就大大减少了整个优化过程的结构分析次数。

倒数尺寸变量 对于静定结构，应力和位移都是元件尺寸变量倒数的线性函数，因此可以认为在超静定结构中仍近似保持这种线性关系。这样，若采用元件尺寸的倒数变量，就可以想象上述约束函数的线性化的近似程度一定是很高的。因此，在结构优化设计中，目前已广泛采用结构元件尺寸的倒数作为设计变量，即令连接后的 B 个独立设计变量为

$$X_{b(i)} = 1/\delta_{b(i)} \quad (b=1,2,\cdots,B) \tag{4}$$

近似概念方法 综合应用上述近似概念并取元件尺寸的倒数作为设计变量，则式（1）的结构优化问题变为求

$$\left.\begin{array}{ll} & X=[x_1,x_2\cdots,x_B]^T \text{ 使} \\ & W=\sum_{b=1}^{B}\frac{W_b}{x_b} \quad \text{最小} \\ \text{约束条件是} & \\ & h_q(X)=h_q(X_p)+(X-X_p)^T\nabla h_q(X_p)\geqslant 0 \\ & (q=1,2,\cdots,Q_R\in J) \\ \text{和} & x_b^{(L)}\leqslant x_b\leqslant x_b^{(U)} \quad (b=1,2,\cdots,B) \end{array}\right\} \tag{5}$$

式中 W_b 是常值重量系数

$$W_b=\sum_{i\in b}\rho_i l_i T_{ib(i)} \tag{6}$$

h_q 是通过约束删除以后保留的性态约束的显式近似值，它由已进行结构分析的设计点 X_p 的约束值及其梯度求得，Q_R 是保留的性态约束总数。$x_b^{(U)}$ 和 $x_b^{(L)}$ 分别是连接后独立倒数变量的上、下限。另外，由式（2）和（4）有

$$a_i=T_{ib(i)}/(1/x_{b(i)}) \tag{7}$$

[10]和[11]所述 ACCESS-1 和 ACCESS-2 程序就是采用上述近似概念形成式（5），再用数学规划算法求解的结构优化程序。其中优化算法主要采用了扩展的内罚函数法[20,21]，这种优化子程序可引导不可行设计回到可行区。特别是它往往形成一系列沿**可行航道中间**下降目标函数的设计。这从工程观点来看很有吸引力，因为每一个中间的设计都是可用的。

约束再删除 [22]和[23]提出了敏度分析后，利用已算得的约束和目标函数梯度信息进一步删除非临界约束，以减少进入优化算法约束数的方法，提高了近似概念方法的效率。

三、最佳性准则法的若干新发展

最佳性准则方法与数学规划法不同，不是沿可使目标函数下降的设计点移动，直到不违反约束就不能再使目标函数下降为止；而是按照预先规定的最优性准则来选择设计。当迭代过程中最佳性准则得到满足时，就认为该设计是最优的。最早的准则设计，可追溯到同时失效准则。满应力设计就是一种应力约束下结构设计的最佳性准则方法。

最佳性准则方法通常是首先导出最佳性准则，然后确定修改变量的迭代关系，而这种迭代关系中又包括对应于约束的拉格朗日乘子。因而采用什么样的方法求解拉格朗日乘子，和

用什么样的变量迭代式，就形成什么样的算法。

最近几年来，对结构最小重量设计最佳性准则方法的研究说明[12,13]，各种最佳性准则都可由 Kahn-Tucker 条件导出，各种算法之间有着密切的联系。并且某些关系可用非线性规划的投影方法导得。首先，对应于式（1）的拉格朗日函数是

$$W(A,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\rho_i l_i a_i+\sum_{j=1}^{J}\lambda_j h_j(A) \tag{8}$$

式中 $\lambda=[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_J]^T$ 为拉格朗日乘子向量。

由 Kuhn-Tucker 条件可得到式（1）表达的结构优化问题的最佳性必要条件是：

$$\left.\begin{aligned}&\rho_i l_i+\sum_{j=1}^{J}\lambda_j\frac{\partial h_j(A)}{\partial a_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,n)\\&\lambda\geqslant0,\quad\lambda_j h_j(A)=0\quad(j=1,2,\cdots,J)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

可见，为求得最优化设计，必须从式（9）非线性方程组的 n 个方程和满足约束的 J 个方程式中分别求得 A 和 λ。因而在未达到最优的迭代中，可由前者得到修改尺寸的迭代公式，而由后者得到拉格朗日乘子的迭代公式。

由于方程组是非线性代数方程组，所以只能用迭代的方法求解。

位移约束 对于位移约束，若定义第 i 元件对于第 j 位移自由度的梯度系数为

$$\tau_{ij}=a_i\{u_i\}^T[K_i]\{\tilde{u}_i\} \tag{10}$$

式中$\{u_i\}$和$\{\tilde{u}_i\}$是与 i 元件相联系，由外载荷和对应于第 j 位移约束自由度的虚载向量所引起的位移向量。$[K_i]$ 是第 i 元件的刚度矩阵。则第 l 载荷情况下第 j 广义位移自由度处的位移

$$u_{jl}=\sum_{i=1}^{n}\{u_i\}^T[K_i]\{\tilde{u}_i\}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{ijl}}{a_i} \tag{11}$$

从而位移约束可表示为

$$h_j(A)=\sum_{i=1}^{n}e_{ij}l_i a_i-\bar{u}_j\geqslant0 \tag{12}$$

式中

$$e_{ij}=\tau_{ij}/(a_i^2 l_i) \tag{13}$$

是元件 i 的虚应变能密度，$\bar{u}_j$ 是容许位移。将式（12）代入式（9）的第一式得到

$$\rho_i l_i+\sum_{j=1}^{J}\left(-\frac{\tau_{ij}}{a_i^2}\right)\lambda_j=0\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{14}$$

从而有

$$\sum_{j=1}^{J}\lambda_j\frac{\tau_{ij}}{a_i^2\rho_i l_i}=1\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{15}$$

或

$$\sum_{j=1}^{J}\lambda_j\frac{e_{ij}}{\rho_i}=1\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{16}$$

式（16）就是所谓应变能准则。

由式（15）我们可得到变量的迭代关系式。若取指数形式，则有

$$a_i^{k+1}=\left(\sum_{j=1}^{J}\lambda_j\frac{\tau_{ij}}{\rho_i l_i a_i^2}\right)^{\frac{1}{m}}a_i^k \tag{17}$$

式中 $k+1$ 和 k 是迭代次数，m 是确定步长的参数。若取 $m=2$，则有

$$a_i^{k+1}=\left(\sum_{j=1}^{J}\lambda_j\frac{\tau_{ij}}{\rho_i l_i a_i^2}\right)^{1/2}a_i^k \tag{18}$$

式（18）即[24—27]所用的变量迭代公式。若取线性形式，并用参数 α 控制步长，则变量迭代公式为

$$a_i^{k+1}=\left[\alpha+(1-\alpha)\sum_{j=1}^{J}\lambda_j\frac{\tau_{ij}}{\rho_i l_i a_i^2}\right]^k a_i^k \tag{19}$$

式（19）的应用见[28—30]。实际上，由于接近最优时 $\sum_{j=1}^{J}x_j\frac{\tau_{ij}}{\rho_i l_i a_i^2}$ 接近于 1，故式（19）可由将式（17）用二项式定理展开并仅保留线性项得到

$$a_i^{k+1}=\left[1+\frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{J}\lambda_j\frac{\tau_{ij}}{\rho_i l_i a_i^2}-1\right)\right]_k \tag{20}$$

可见当 $\alpha=1-(1/m)$ 时，式（19）与式（20）相同。另一方面，可由约束方程

$$u_j=\bar{u}_j \qquad (j=1,2,\cdots,J) \tag{21}$$

得到拉格朗日乘子的迭代关系。若以 $(\lambda_j)^b$ 乘上式的两边，并取 b 次方根，则可得到

$$\lambda_j^{k+1}=\lambda_j^k\left(\frac{u_j^k}{\bar{u}_j}\right)^{\frac{1}{b}} \qquad (j=1,2,\cdots,J) \tag{22}$$

采用式（22）的迭代关系需要选取初始的乘子向量 λ_0。它已用于[26,27,30,32]。由于在临近最优时 $u_j^k/\bar{u}_j$ 近似于1，故由二项式定理并取线性项有

$$\lambda_j^{k+1}=\lambda_j^k\left(\frac{b-1}{b}+\frac{1}{b}\frac{u_j^k}{\bar{u}_j}\right) \qquad (j=1,2,\cdots,J) \tag{23}$$

考虑变量的变化应满足约束条件，并将线性的变量迭代公式引入，可得求解 λ 的联立方程

$$\sum_{l=1}^{J}\lambda_l^{k+1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\tau_{ij}\tau_{il}}{\rho_i l_i a_i^3}\right)^k=\frac{u_j^k(1-\alpha)-\bar{u}_j}{(1-\alpha)} \qquad (j=1,2,\cdots,J) \tag{24}$$

若将 $\alpha=1-(1/m)$ 代入，则上式变成

$$\sum_{l=1}^{J}\lambda_l^{k+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{ij}\tau_{il}}{\rho_i l_i a_i^3}\right)^k=(m+1)u_j^k-m\bar{u}_j \qquad (j=1,2,\cdots,J) \tag{25}$$

用式（24）或（25）求解 λ 不必假定初始 λ_0。式（24）已用于［20］。应该注意，应用上述变量和乘子迭代关系时，参数 m,α,b 对问题的收敛影响很大，而其较好值则取决于问题本身。

应力约束　对于应力约束，若应用满应力准则，则有

$$\tilde{a}_i^{k+1}=\max_l\left(\frac{\sigma_{il}}{\bar{\sigma}_i}\right)a_i^k \tag{26}$$

这里假设元件内力在迭代中是不变的。显然对于超静定结构，这是一种近似关系，且是零阶近似，它可与边约束一起处理成边界约束，即有

$$\left.\begin{aligned} & a_i \geq a_i^* \\ 和\quad & a_i^* = \max\{\underline{a}_i, \tilde{a}_i\} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

采用满应力准则处理应力约束时计算简单，工作量小。但对于超静定结构收敛特性往往不理想，有时可能引起不收敛。

[15]和[19]中都取应力的一阶近似以改善收敛特性。为此，首先将应力约束通过应力与位移之间的如下关系，统一处理成位移约束：

由于应力向量

$$\sigma = TU \tag{28}$$

式中 T 是应力矩阵，U 为广义位移向量，从而元件 k 的应力分量

$$\sigma_k = t_k^T U \tag{29}$$

式中 t_k 是 T 中对应于元件 k 的一行。由于结构的第 j 位移分量

$$u_j = b_j^T U \tag{30}$$

式中 b_j 是对应于第 j 位移的元素为 1 其余元素为零的列向量。可见，σ_k 类似于式（30），也是广义位移 U 的线性组合，因而也可认为是一个位移表达式。由于 b_j 对应的单位值处作用一单位载荷于结构时可得到位移 u_j；则由迭加原理，可用 t_k 作为虚载荷向量加于结构而得到 σ_k 值。类同式（10）有第 l 载荷情况下第 i 元件提供的第 K 元件的应力系数

$$d_{ikl} = a_i\{u_i\}^T[K_i]\{\bar{u}_i\} \tag{31}$$

式中 $\{\bar{u}_i\}$是由 t_k 给出的虚载荷情况下第 i 元件的位移分量。

广义最佳性准则 若将应力约束统一处理成位移约束，则由 Kuhn-Tucker 条件可以得到由应力、位移约束的一阶近似值表示的最佳性准则：

$$\left.\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_i l_i a_i^2}\left(\sum_j\sum_l \lambda_{jl}\tau_{ijl} + \sum_k\sum_l \mu_k d_{ik}\right)\begin{cases} =1 & 若\ a_i > \underline{a}_i \\ \leq 1 & 若\ a_i = \underline{a}_i \end{cases} \\ & \begin{aligned} \lambda_{jl} &= 0 \quad 若\ u_j < \bar{u}_j \\ \lambda_{jl} &\geq 0 \quad 若\ u_j = \bar{u}_j \end{aligned} \quad 和 \quad \begin{aligned} \mu_k &= 0 \quad 若\ \sigma_k < \bar{\sigma}_k \\ \mu_k &\geq 0 \quad 若\ \sigma_k = \bar{\sigma}_k \end{aligned} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

式中 λ_j 与 μ_k 是对应于位移和应力约束的拉格朗日乘子。[15]称上述准则为应力、位移约束下的广义最佳性准则。

混合最佳性准则 由于对应于应力约束零阶近似的满应力准则计算量小且一阶近似是保证收敛所必须的，所以[15]提出了混合最佳性准则。此准则中仅用虚载荷法考虑某些临界或接近临界的应力约束，其它的用应力比法简单转换成边界约束。即将求解的问题变为：

$$\begin{aligned} & 求\ A，使 && W = \sum_{i=1}^{n}\rho_i l_i a_i \quad 最小 \\ & 约束条件是 && \sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{ij}}{a_i} \leq \bar{u}_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, m) \\ & && a_i \geq \underline{a}_i \end{aligned} \tag{33}$$

式中的 m 是位移约束和有效应力约束的个数，余下的应力约束包括在边界约束中。至于有效应力约束的判别，可采用以下两个公式中的一个：

$$\sigma_{i\,l}/\tilde{\sigma}_i \approx 1 \tag{34}$$

和
$$d_{i\,i\,l}/(a_i \sigma_{i\,l}) \ll 1 \tag{35}$$

[15]的算例表明，混合最佳性准则方法兼有效率高而可靠的优点，特别适合于大型实际的结构系统。

最严约束法 最佳性准则方法效率较高，通常与变量的多少无关。其主要困难是需判定有效和不有效的约束，以及区分主动和被动元件。为了克服判定有效约束的困难，[33]采用了最严约束法求解有应力和位移约束的结构优化问题。

首先，在结构分析后，从所有约束中选择最严的约束，然后利用射线步将设计点移动到最严约束面上。如果这个最严约束是应力约束则走满应力步。如果最严约束是位移约束，则按下面由 Kuhn-Tucker 条件导得的位移准则迭代公式修改尺寸：

$$a_i^{k+1} = \left\{ \left[\lambda_{pq} \left(\frac{\{u_i\}^T [K_i] \{\tilde{u}_i\}}{a_{i\,l\,i} \rho_i} \right) \right]^\eta a_i \right\}^k \tag{36}$$

式中对应于最严位移约束的拉格朗日乘子，用下式很易求得

$$\lambda_{pq} = W/\bar{u}_p \tag{37}$$

式（36）中的 η 是用来控制步长以使方法收敛和稳定的松弛参数。下标 p,q 分别表示最严位移约束所对应的位移自由度序号和载荷情况序号。算例表明，由于只考虑一个有效约束，此方法所需计算工作量大大减少，所需磁芯存贮量仅是结构分析时所需的，因而比较有效。

四、规划法和准则法的结合和统一

近几年来对最小重量设计结构优化问题的研究表明，数学规划法和准则法之间有着密切的联系。最佳性准则法的某些迭代关系式可由非线性规划方法导得[13]，而用对偶公式求解近似概念形成的线性化问题，相当于用对偶公式求解倒数变量表达的广义最佳性准则问题[16-18]，以及用非线性规划求解变量迭代关系中的拉格朗日乘子[19]，等等。这些都说明两大类方法在逐步相互结合并趋于统一。

投影方法推导准则法的迭代关系 [13]用非线性规划的投影方法导得了最佳性准则方法的若干迭代关系。首先，最小重量结构优化问题的 Kuhn-Tucker 条件可写为：

$$\left.\begin{array}{l} \{G\} + [B]\{\lambda\} = 0 \\ \lambda \geqslant 0;\ \ h_j \lambda_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, J) \end{array}\right\} \tag{38}$$

式中$\{G\}$是目标函数$W(X)$的梯度，$[B]$是由分量为诸约束梯度组成的 $n \times J$ 矩阵。

考虑从现行设计点$\{X\}$寻求步向$\{dX\}$的问题，新点$\{X+dX\}$必须满足约束方程

$$\{h[X+dX]\} = 0 \tag{39}$$

并满足在距离δ内减少目标函数 $W(X+dX)$ 的条件

$$\frac{1}{2}\{dX\}^T [Q] \{dX\} \leqslant \delta^2 \tag{40}$$

式中$[Q]$称为加权参数的正定对角矩阵。这时对应于这个由目标函数 $W(X+dX)$ 及式(39)，（40）的约束方程形成的拉格朗日函数的最佳性必要条件是

$$\{G(X+dX)\} + [B(X+dX)]\{\lambda\} + \mu [Q] \{dX\} = 0 \tag{41}$$

式中 μ 是对应于约束（40）的拉格朗日参数。

目标和约束函数的二阶泰劳展开式是

$$W(X+dX)=W(X)+\{dX\}^T\{G\}+\frac{1}{2}\{dX\}^T[G_W]\{dX\} \tag{42}$$

和

$$h_j(X+dX)=h_j(X)+\{dX\}^T\{b_j\}+\frac{1}{2}\{dX\}^T[G_j]\{dX\} \tag{43}$$

式中 $[G_W]$ 是目标函数 $W(X)$ 的二阶导数矩阵，$\{b_j\}$ 是第 j 约束的梯度，$[G_j]$ 为第 j 约束的二阶导数矩阵。微分式（42）和（43）并代入式（41），得到

$$\{G\}+[G_W]\{dX\}+\sum_{j=1}^{J}(\{b_j\}+[G_j]\{dX\})\lambda_j+\mu[Q]\{dX\}=0 \tag{44}$$

上式可写成

$$[F]\{dX\}+[B]\{\lambda\}+\{G\}=0 \tag{45}$$

式中

$$[F]=[G_w]+\sum_{j=1}^{J}[G_j]\lambda_j+\mu[Q] \tag{46}$$

从而得到

$$\{dX\}=-[F]^{-1}([B]\{\lambda\}+\{G\}) \tag{47}$$

再利用点 $(X+dX)$ 处的线性近似约束等于零的条件

$$\{h\}+[B]^T\{dX\}=0 \tag{48}$$

将式（47）代入式（48），可导得求 $\{\lambda\}$ 的方程

$$\{\lambda\}=-([B]^T[F]^{-1}[B])^{-1}([B]^T[F]^{-1}\{G\}) \tag{49}$$

从而式（47）变成

$$\{dX\}=-[F]^{-1}\{G\}+[F]^{-1}[B]([B]^T[F]^{-1}[B]^{-1})[B]^T[F]^{-1}\{G\} \tag{50}$$

若令式（46）中的 Q 为单位矩阵 $[I]$，且略去目标和约束函数的二阶项 $[G_w]$ 和 $[G_j]$，则式（49）和（50）分别变成

$$\{\lambda\}=-([B]^T[B]^{-1}[B]^T\{G\} \tag{51}$$

$$\{dX\}=-(1/\mu)([I]-[B]([B]^T[B])^{-1}[B]^T)\{G\} \tag{52}$$

式（52）确定的步向是最速下降方向，它是目标函数梯度 $\{G\}$ 在约束空间的正交投影。

若应用目标函数 $W=\sum_{i=1}^{n}\rho_i l_i a_i$ 和位移约束 $h_j(A)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{ij}}{a_i}-\bar{u}_j$ 于式（42），(43)，并运用式（44），可得

$$\rho_i l_i-\sum_{j=1}^{J}\frac{\tau_{ij}}{a_i^2}\lambda_j+da_i\sum_{j=1}^{J}\frac{2\tau_{ij}}{a_i^3}\lambda_j+\mu Q_i da_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{53}$$

若略去式（53）的二阶项可求得

$$da_i=\frac{\rho_i l_i}{\mu Q_i}\left(\sum_{t=1}^{J}\lambda_t\frac{\tau_{it}}{\rho_i l_i a_i^2}-1\right)_k \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{54}$$

故得到变量 a_i 的迭代关系式为

$$a_i^{k+1}=a_i^k+\frac{\rho_i l_i}{\mu Q_i}\left(\sum_{t=1}^{J}\lambda_t\frac{\tau_{it}}{\rho_i l_i a_i^2}-1\right)_k \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{55}$$

将式（54）代回式（48），得到求 $\{\lambda\}$ 的方程

$$\sum_{i=1}^{J}\lambda_i\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\tau_{ij}\tau_{il}}{Q_i a_i^4}\right)_k=\mu(u_j-\bar{u}_j)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\rho_i l_i \tau_{ij}}{Q_i a_i^2}\right)_k \tag{56}$$

对于式（55），（56），若令 Q_i 为1或取为 $\rho_i l_i a_i/a_i^2$，则可得到不同的迭代关系式。当取 $Q_i=\rho_i l_i a_i/a_i^2$ 时，可得到

$$a_i^{k+1}=a_i^k+\frac{a_i^k}{\mu}\left(\sum_{l=1}^{J}\lambda_l\frac{\tau_{il}}{\rho_i l_i a_i^2}-1\right)_k \tag{57}$$

和

$$\sum_{l=1}^{J}\lambda_l^{k+1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\tau_{ij}\tau_{il}}{\rho_i l_i a_i^3}\right)=(\mu+1)u_j^k-\mu\bar{u}_j \tag{58}$$

当取 μ 等于步长参数 m 时，式（57），（58）分别与线性形式的迭代关系式（20），（25）相同。可见由非线性规划的投影法可导出由最佳性准则法导得的线性化算法。但上述投影法更为一般，它可由不同的近似和选择不同的加权参数 Q_i 的表达式导得各种迭代关系式。[13]用上述投影法得到的某些关系式计算了若干例题，并研究了某些迭代关系式对收敛特性的影响。

对偶公式求解近似概念形成的线性化问题 式（5）表达的数学规划问题也可表为求 X，使

$$W=\sum_{b=1}^{B}\frac{W_b}{x_b}\quad 最小$$

满足线性性态约束

$$h_q(X)=\bar{u}_q-u_q(X)\geqslant 0\quad (q=1,2,\cdots,Q_R\in J)$$

和边界约束

$$x_b^{(L)}\leqslant x_b\leqslant x_b^{(U)}\quad (b=1,2,\cdots,B) \tag{59}$$

式中

$$u_q=\sum_{b=1}^{B}C_{bq}x_b\quad (q=1,2,\cdots,Q_R) \tag{60}$$

和

$$\bar{u}_q=h_q(X_p)-X_p^t\nabla h_q(X_p) \tag{61}$$

式（60）中的 C_{bq} 是梯度 $\nabla h_q(X_p)$ 的各个分量。可见式（59）中的线性约束被分离成与变量无关和有关的两部分。

由于目标函数是严格凸的，且所有约束函数为线性函数，所以式（59）表达的数学问题为一凸规划问题。加之所有函数都是显式，且可分离的，所以可用对偶方法更有效地求解它。这主要是因为和独立设计变量相比，严格临界的性态约束通常很少，而在对偶方法中对偶变量是与线性化约束相对应的拉格朗日乘子。因而对偶问题的维数比式（5）表达的原问题少得多。这种方法的另一重要优点，是可以引进离散的设计变量。

首先，对应于式（59）的拉格朗日函数是

$$L(X,\lambda)=\sum_{b=1}^{B}\frac{W_b}{x_b}-\sum_{q\in Q_R}\lambda_q\left(\bar{u}_q-\sum_{b=1}^{B}C_{bq}x_b\right) \tag{62}$$

非负性条件为

$$\lambda_q\geqslant 0;\quad q\in Q_R$$

由于式（59）表达的问题是凸的，从而 $L(X,\lambda)$ 存在唯一鞍点，它可由最大化对偶函数得到

$$\max l(\lambda), \quad \lambda \geqslant 0 \tag{63}$$

式中$l(\lambda)$即对偶函数

$$l(\lambda)=\min L(X,\lambda), \quad x_b^{(L)} \leqslant x_b \leqslant x_b^{(U)} \tag{64}$$

将式（62）代入式（64），并令含有变量x_b的项的一阶导数为零求极小，可得

$$x_b=\left[\frac{W_b}{\sum_{q\in Q_R}\lambda_q C_{bq}}\right]^{\frac{1}{2}}, \text{当 } x_b^{(L)}<\left[\frac{W_b}{\sum_{q\in Q_R}\lambda_q C_{bq}}\right]^2<x_b^{(U)} \text{ 时} \tag{65}$$

$$\left.\begin{aligned} x_b=x_b^{(L)}, \text{当} \left[\frac{W_b}{\sum_{q\in Q_R}\lambda_q C_{bq}}\right]^2 \leqslant x_b^{(L)} \text{ 时} \\ x_b=x_b^{(U)}, \text{当} \left[\frac{W_b}{\sum_{q\in Q_R}\lambda_q C_{bq}}\right]^2 \geqslant x_b^{(U)} \text{ 时}\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

式（65）和（66）即原变量x_b与对偶变量λ_q之间的关系式。而对偶函数变为

$$l(\lambda)=\sum_{b=1}^{B}\left[\frac{W_b}{x_b}+x_b\sum_{q\in Q_R}\lambda_q C_{bq}\right]-\sum_{q\in Q_R}\lambda_q \bar{u}_q \tag{67}$$

式（63），（67）和（65），（66）即求解问题式（59）的对偶公式。

在ACCESS-3[34]程序中采用了二阶牛顿型算法进行对偶函数的最大化，而对于纯离散和连续-离散混合的问题采用了梯度投影型算法。算例表明，求解对偶问题所用优化时间，比求解原问题的各种算法要少得多。

最佳性准则法与数学规划法的统一 对于由所有约束的一阶近似得到的广义最佳性准则（32），若引进倒数变量并采用对偶方法求解，则其求解方法基本上和上述用对偶方法求解由近似概念形成的线性化约束问题相同。从而可以认为最佳性准则法属于数学规划方法的一部分，而数学规划的近似概念方法是一种广义的最佳性准则方法。

最佳性准则法与数学规划法的结合 在 Fleury 提出广义最佳性准则，以及 Schmit 和 Fleury 将对偶公式和近似概念方法结合提出十分有效算法的同时，1980年我国钱令希等[19]提出了一种进行多单元、多工况、多约束结构进行优化设计的方法。在这个方法中，首先用 Kuhn-Tucker 条件建立起结构达到最优时的必要条件。并在建立拉格朗日函数时目标函数采用在结构分析点泰劳展式的二阶项。从而得到修改倒数设计变量的迭代公式

$$\delta x_b^{k+1}=\frac{x_b^k}{2}\left[1-\frac{(x_b^k)^2}{W_b}\sum_{t=1}^{J}\lambda_t \tau_{tb}^k\right] \quad (b=1,2,\cdots,B) \tag{68}$$

式中λ_t是拉格朗日乘子，它应满足非负性条件$\lambda_t \geqslant 0 \quad (t=1,2,\cdots,J)$。

在这个方程中，采用相当虚载荷将应力和边界约束都和位移约束一样，表达为统一的形式，并用一个标准的二次规划问题

$$\min\ ((1/2)\{\lambda\}^T[T]\{\lambda\}-\{d\}^T\{\lambda\}), \quad \{\lambda\}\geqslant 0 \tag{69}$$

来求解拉格朗日乘子向量$\{\lambda\}$。式（69）中的矩阵$[T]$是$J\times J$方阵，其分量为

$$T_{jp}=\sum_{b=1}^{B}\frac{(x_b^k)^3}{2W_b}\tau_{jb}^k\tau_{pb}^k \tag{70}$$

$\{d\}$ 为 J 维向量，其分量为

$$d_j = \sum_{b=1}^{B} \frac{x_b^k}{2} \tau_{jb}^k + (u_j^k - \bar{u}_j) \tag{71}$$

在由二次规划问题式（69）解得 λ 以后，可由式（68）求得修改设计的方向 δx_b，再沿这个方向进行一维带射线步的搜索，求得新的设计点

$$x_b^{k+1} = x_b^k + t\delta x_b^{k+1} \quad (b = 1, 2, \cdots, B) \tag{72}$$

式中 t 是最优步长。

由于这个方法用数学规划方法求解出拉格朗日乘子，从而同样比较好地解决了最佳性准则方法中精选有效约束和区分主动、被动变量的困难。算例表明，这种广义最佳性准则方法和数学规划方法有机结合的算法，收敛是相当快的，也是一种十分有效的算法。

本文承蒙钱令希教授审阅，特致深切谢意。

参 考 文 献

1 Schmit, L.A, Structural design by systematic synthesis, Proc. of Conf. on Electronic Computation, ASCE, New York (1960): 105—122.

2 Venkayya, V.B., Khot, N.S., Reddy, V.S., Optimization of structures based on the study of energy distribution, Proc., 2nd Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., WPAFB, AFFDL-TR-68-150, U.S.A.F (Dec. 1969): 111—153.

3 Gellatly, R.A., Berke, L., Gibson, W., The use of optimality criteria in automated structural design, Paper Presented at the 3rd Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., WPAFB, Ohio (Oct. 1971).

4 Dupree, D.M., Berke, L., OPTIM Ⅱ: A magic compatible large scale automated minimum weight design program, AFFDL-TR-74-97, Ⅰ and Ⅱ (1974).

5 Isakson, G., Pardo, H., ASOP-3: A program for the minimum-weight design of structures subjected to strength and deflection constraints, AFFDL-TR-76-157 (1976).

6 Wilkinson, K., Markowitz, J., Lerner, E., George, D., Batill, S.M., FASTOP: A flutter and strength optimization program for lifting-surface structures, *J. Aircraft*, 14 (1977): 581—587.

7 Khot, N.S., Computer program (OPTCOMP) for optimization of composite structures for minimum weight design, AFFDL-TR-76-149 (1977).

8 Kiusalaas, J., Reddy, G.B., DESAP 2: A structural design program with stress and bucking constraints, NASA CR-2797 to 2799 (3 Volumes), NASA, Washington, D.C. (1977).

9 Schmit, L.A., Miura, H., Approximation concepts for efficient structural synthesis, NASA CR-2552 (March 1976).

10 ——, ——, A new structural analysis/synthesis capability-ACCESS 1, *AIAA J.*, 14 (May 1976): 661—671.

11 ——, ——, An advanced structural analysis/synthesis capability-ACCESS 2, *Int. J. Numer. Meth. in Eng.*, 12 (Feb. 1978): 353—377.

12 Khot, N.S., Berke, L., Venkayya, V.B., Comparison of optimality criteria algorithms for minimum weight design of structures, AIAA/ASME 19th Structures, Struct. Dyn. and Mater. Conf. (1978): 37—46.

13 ——, ——, ——, Minimum weight design of structures by the optimality criterion and projection method, AIAA/ASME/ASCE/AHS 20th Structures, Struct. Dyn. and Mater. Conf. (Apr. 1979): 11—22.

14 Sander, G., Fleury, C., A mixed method in structural optimization, *Int. J. Numer. Meth. in Eng.*, 13 (1978): 385—404.

15 Fleury, C., An efficient optimality criteria approach to the minimum weight design of elastic, *Computers & Structures*, 11, 3 (1980): 163—173.

16 Schmit, L.A., Fleury, C., Structural synthesis by combining approximation concepts and dual

methods. *AIAA J.*, 18 (Oct. 1980): 1252—1260.

17 ——, ——, Discrete-continuous variable structural synthesis using dual methods. *ibid.* 18 (Des. 1980): 1515—1524.

18 Fleury, C., Schmit, L.A., Dual methods and approximation concepts in structural synthesis. NASA CR-3226 (Dec. 1980).

19 钱令希、钟万勰、隋允康、张近东，多单元、多工况、多约束的结构优化设计——DDDU 程序系统，大连工学院学报，19，4（1980）.

20 Cassis, J.H., Schmit, L.A., On implementation of the extended interior penalty function. *Int. J. Numer. Meth. in Eng.*, 10 (1976): 3—23.

21 Haftka, R.T., Starnes, J.H., Application of a quadratic extended interior penalty function for structural optimization, *AIAA J.*, 14 (June 1976): 718—724.

22 蔡荫林、江允正，应用近似概念和多种约束删除方法的结构优化设计，哈尔滨船舶工程学院学报，1（1982）.

23 Cai, Yinlin (蔡荫林), Jiang, Yunzheng (江允正), Optimum design of structures by using method of multiple constraint deletion. Proc. Int. Conf. on Finite Element Methods (国际有限元会议论文集), Shanghai, China (1982): 845—848.

24 Gellatly, R.A., Berke, L., Optimum structural design. AFFDL-TR-70-165 (Apr. 1971).

25 Venkayya, V.B., Khot, N.S., Berke, L., Application of Optimality Criteria Approaches to Automated Symp. on Struct. Optim., Milan, Italy (Apr. 1973): 3-1—3-20.

26 Berke, L., Khot, N.S., Use of optimality criteria methods for large scale systems. AGARD Lecture Series No. 70. On Structural Optimization (Oct. 1974): 1-1—1-29.

27 Khot, N.S., Venkayya, V.B., Berke, L., Optimum design of composite structures with stress and displacement constraints. *AIAA J.*, 14 (Feb. 1976): 131—132.

28 Rizzi, P., Optimization of multi-constrained structures based on optimality criteria. AIAA/ASME/SAE 17th Structures, Struct. Dyn. and Mater. Conf. King of Prussia (May 1976).

29 Segenreich, S.A., McIntosh, S.C., Weight optimization under multiple equality constraints using an optimality criteria. *ibid* (1976), 17th SDM Conf., King of Prussia (May 1976).

30 Khot, N.S., Venkayya, V.B., Berke, L., Experiences with minimum weight design of structures using optimality criteria methods. 2nd Int. Con. On Vehicle Struct. Mech., South Field, Michigan (Apr. 1977).

31 Nagteggal, J.C., A new approach to optimal design of elastic structures. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 2 (Feb. 1973): 255—264.

32 Berke, L., Khot, N.S., A simple virtual strain energy method to fully stress design structures with dissimilar stress allowables and material properties. AFFDL-TM-77-28-FBR (Dec. 1977).

33 Khan, M.R., Willmert, K.D., Thornton, W.A., An optimality criterion method for large-scale structures. *AIAA J.*, 17, 7 (1979): 753—761.

34 Schmit, L.A., Fleury, C., An improved analysis/synthesis capability based on dual methods-ACCESS 3. AIAA/ASME/ASCE/AHS 20th Structures, Struct. Dyn. and Mater. Conf. (Apr. 1979): 23—50.

35 Venkayya, V.B., Structural optimization: a review and some recommendation. *Int. J. Numer. Meth. in Eng.*, 13 (1978): 203—228.

36 Schmit, L.A., Structural synthesis—its genesis and development. *AIAA J.*, 19, 10 (1981): 1249—1263.

37 Vanderplaats, G. N., Structural optimization—past, present, and future. *ibid*, 20, 7 (1982): 992—1000.

SOME DEVELOPMENTS ON STRUCTURAL OPTIMIZATION

Cai Yin-lin

(Harbin Shipbuilding Engineering Institute)