第14卷 第2期　　力 学 进 展　　Vol. 14 No. 2
1984年5月25日　　ADVANCES IN MECHANICS　　May 25, 1984

一个诊断基本气流中波动的新物理量——Eliassen-Palm通量

中国科学院大气物理研究所　黄荣辉

1. 引言

60年代以前，诊断一个有任意垂直切变或水平切变的基本流与波动的相互作用，都是应用动量通量及热量输送通量。60年代初，著名大气动力学家Charney和Drazin[1]提出用波的折射指数来描述波在垂直切变基本流中的传播。与此同时，Eliassen和Palm[2]提出一个与动量通量及热量通量相关联的能量通量矢量来表征波在切变基本流中的传播。在这以后，许多学者都是应用能量通量矢量来研究波在基本流中的演变及传播。

然而，当波在具有切变的基本流中传播时，波的能量是不守恒的。1976年Andrews和McIntyre[3-5]从位涡度方程出发，提出了波作用量，波作用通量及波作用守恒方程。于是在地球流体动力学中又增加了一个新的守恒属性，即波在没有外界强迫及没有摩擦条件下，其波作用量守恒。而波作用通量不是别的，正是与Eliassen和Palm所提出的与能量通量有联系的一个量，即把能量通量除以基本气流，故称广义的Eliassen-Palm通量，后人就简称E-P通量。

由于E-P通量可以很直观地看到波对基本气流的作用，并且可以直接与波作用量及波的群速度相关联，因此，这个新的物理量广泛用于诊断波在切变流中的传播及与基本流的相互作用。此外，波作用守恒原理要比能量守恒原理具有更深刻的物理意义，因此，这个守恒原理广泛用于流体力学数值计算中格式的设计，实际证明用拟能守恒（波作用守恒）格式要比用能量守恒格式好得多。

本文主要介绍E-P通量的导出及其在大气动力学中的应用。至于在模型格式中的应用，由于比较复杂，故不在此介绍。

2. 波作用量守恒方程与E-P通量矢量

首先在一个不考虑科里奥利力随纬度变化的所谓β平面近似下来推导波作用量守恒方程与E-P通量。

在β平面近似下的准地转位涡度方程可写成

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\mathbf{v}_g\cdot\nabla q=Q \tag{2.1}$$

q是位涡度，在β平面近似下可表示成

$$q = f_0 + \zeta_g + f_0 \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\theta}{\theta_p}\right) \tag{2.2}$$

f_0 是某纬度的科里奥利力，θ 为位温，$\overline{\theta}_p$ 为基本气流中位温的垂直微商，即 $\overline{\theta}_p = \partial\overline{\theta}/\partial p$，而 ζ_g 是涡度，即

$$\zeta_g = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Q 是非绝热加热．设

$$q = \overline{q} + q', \quad \mathbf{V}_g = \overline{\mathbf{V}}_g + \mathbf{V}'_g, \quad Q = \overline{Q} + Q'$$

代入方程（2.1），可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{q} + q') + (\overline{\mathbf{V}}_g + \mathbf{V}'_g) \cdot \nabla(\overline{q} + q') = \overline{Q} + Q' \tag{2.3}$$

$\overline{q}$，$\overline{\mathbf{V}}_g$，$\overline{Q}$ 在这里是欧拉平均量，即 $\overline{q}$，$\overline{\mathbf{V}}_g$，$\overline{Q}$ 是表示基本气流的物理量．若把方程（2.3）分离成基本气流方程与扰动方程，则扰动方程为

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}}_g \cdot \nabla \overline{q} + \overline{\mathbf{V}}_g \cdot \nabla q' = Q' \tag{2.4}$$

即

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + v' \frac{\partial \overline{q}}{\partial y} + \overline{u} \frac{\partial q'}{\partial x} = Q' \tag{2.5}$$

把方程（2.5）乘 q'，再取欧拉平均，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} q'^2\right) + v' q' \frac{\partial \overline{q}}{\partial y} = q' Q' \tag{2.6}$$

假设基本气流随时间的变化是很缓慢的，即 $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overline{q}}{\partial y}\right) \approx 0$，这样从（2.6）可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} q'^2 \Big/ \frac{\partial \overline{q}}{\partial y}\right) + v' q' = q' Q' \Big/ \frac{\partial \overline{q}}{\partial y} \tag{2.7}$$

现在来推导（2.7）中的 $v'q'$：

$$v' q' = v' v'_x - v' u'_y + f v' \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\theta'}{\overline{\theta}_p}\right) \tag{2.8}$$

式中 $v'_x = \frac{\partial v'}{\partial x}$，$u'_y = \frac{\partial u'}{\partial y}$，$\overline{\theta}_p = \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial p}$

取连续方程

$$u'_x + v'_y = 0 \tag{2.9}$$

把（2.9）乘以 u'，再取欧拉平均，可得 $u'v'_y = 0$，此外，从热成风关系式可以知道，$v'_p \approx \theta'_x$，于是可得

$$\frac{1}{\overline{\theta}_p} \theta' v'_p \approx \frac{1}{\overline{\theta}_p} \theta'_x \theta'$$

把上述两关系式代入（2.8）可得

$$v' q' = -(u' v')_y + \left(\frac{f}{\overline{\theta}_p} \overline{v' \theta'}\right)_p \tag{2.10}$$

我们定义一个新的矢量 **F**，即

$$\mathbf{F}=(F(y),F(p))=\left\{-u'v',\quad \frac{f}{\theta_p}v'\theta'\right\} \tag{2.11}$$

于是可得

$$v'q'=\nabla\cdot\mathbf{F} \tag{2.12}$$

由（2.12），（2.9），可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\frac{1}{2}q'^2}{\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}}\right)+\nabla\cdot\mathbf{F}=D \tag{2.13}$$

式中 $D=q'Q'/(\partial\bar{q}/\partial y)$ 是外界强迫项，例如非绝热加热。若无外界强迫项，即 $D=0$，则可得

$$\frac{\partial}{\partial t}A+\nabla\cdot\mathbf{F}=0 \tag{2.14}$$

这就是波作用量守恒方程，A 就是波作用量，

$$A=\frac{\frac{1}{2}q'^2}{\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}} \tag{2.15}$$

而 **F** 是波作用通量，它与动量通量、热量通量相关联，**F** 也称 Eliassen-Palm 通量。

方程（2.14）说明了在没有任何外界强迫和没有摩擦的情况下，波作用量是守恒的。

上述证明只是在β平面近似下成立，也就是说 Andrews 和 McIntyre 只是在β平面近似下证明了这个守恒性质。但是，对于行星尺度的波动，波的经向波长是从高纬度直到低纬度地区，显然再用β平面近似是不行的。因为科里奥利力随纬度的变化必须考虑，所以必须求得球面坐标下波作用守恒方程及波作用通量。

黄荣辉[6]利用球坐标位涡度方程，在位涡度南北输送中引进了风的辐散分量，求得了球面大气行星尺度波动的波作用守恒方程，其波作用守恒方程与β平面近似下的形式一样，其波作用量 A_m 为

$$A_m=\frac{\frac{1}{2}a\cos\varphi(q_m'^2)}{\frac{\partial\bar{q}}{a\partial\varphi}} \tag{2.16}$$

而波作用通量（或 E-P 通量）可写为

$$\mathbf{F}=[F(\varphi),\ F(p)]=\left(-a\cos\varphi u'v',fa\cos\varphi\frac{\theta'v'}{\theta_p}\right) \tag{2.17}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}[F(\varphi)\cos\varphi]+\frac{\partial}{\partial p}[F(p)] \tag{2.18}$$

上三式中 a 是地球半径，φ 是纬度，而 q_m' 定义为修正扰动位涡度：

$$q_m'=q'+\frac{u'}{f}\frac{\partial f}{a\partial\varphi}=\frac{1}{a\cos\varphi}\left[\frac{\partial v'}{\partial\lambda}-f\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{f}u'\right)\right]+f\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\theta'}{\theta_p}\right) \tag{2.19}$$

3. E-P 通量与波的群速度的关系

在假设扰动的变化是缓变的并且没有外界强迫和摩擦的情况下，可以利用WKBJ方法来求解方程（2.5）。按照 Lighthill[7] 的证明，

$$\mathbf{F}=\mathbf{C}_g'\cdot A \tag{3.1}$$

$\mathbf{C}_g$ 是波的局地群速度在 y-z 面上的投影。从（3.1）可以看到 E-P 通量与波的群速度在 y-z 面上的投影是平行的，它之所以称为波作用通量也正是由于这个关系式。它是波的群速度与波作用密度的乘积。

同样，黄荣辉在球坐标下也求得（3.1）。若考虑某一纬向波数为 k，频率为 $\hat{\omega}$ 的行星波，其扰动地转位势为 ϕ'，假设没有任何外源强迫，那么球坐标的位涡度方程可写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\hat{\Omega}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\left\{\frac{1}{f}\left[\frac{f^2}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{f^2}\frac{\partial\phi'}{a\partial\varphi}\right)+\frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\phi'}{\partial\lambda^2}\right]\right.$$

$$\left.+f\frac{\partial}{p\partial z}\left(\frac{\rho}{N^2}\frac{\partial\phi'}{\partial z}\right)\right\}+\frac{\partial\bar{q}}{a\partial\varphi}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial\phi'}{a\cos\varphi\partial\lambda}=0 \qquad (3.2)$$

式中 $\hat{\Omega}=\bar{U}/(a\cos\varphi)$。假设方程（3.1）中任一个解为

$$\phi'(\lambda,\varphi,z,t)=\mathrm{Re}\sum_{k}^{K'}\Phi_k(\varphi,z)e^{ik(\lambda-ct)} \qquad (3.3)$$

引入新变量 ψ_k

$$\psi_k(\varphi,z)=e^{-z/2H_0}\Phi_k(\varphi,z) \qquad (3.4)$$

H_0 是大气的特征高度，把（3.3）与（3.4）代入（3.2），则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\hat{\Omega}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\left[-\frac{k^2}{(a\cos\varphi)^2}+\frac{f^2}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos\varphi}{f^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{f^2}{N^2}\left(\frac{\partial}{\partial z^2}-\frac{1}{4H_0^2}\right)\right]\psi_k+\bar{q}_y\frac{ik}{a\cos\varphi}\psi_k=0 \qquad (3.5)$$

式中 $\partial y=a\partial\varphi$，$\bar{q}_y=\partial\bar{q}/(a\partial\varphi)$，$N$ 是 Brunt-Väisälä 频率。引入新坐标 $\tilde{y}$，$d\tilde{y}=\mu dy$，$\mu=f^2/\cos\varphi$，于是方程（3.5）可变成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\hat{\Omega}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\left[-\frac{k^2}{a^2\cos^2\varphi}\psi_k+\mu^2\frac{\partial^2\psi_k}{\partial\tilde{y}^2}+\frac{f^2}{N^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4H_0^2}\right)\psi_k\right]+\bar{q}_y\frac{ik}{a\cos\varphi}\psi_k=0 \qquad (3.6)$$

因为我们所研究的对象是行星波，故 ψ_k 的振幅是 $\tilde{y},z,t$ 的缓变函数，这样可用 WKBJ 方法来解方程（3.6），引入缓变坐标 Λ，Y，Z，T：

$$\Lambda=\varepsilon\lambda,\quad Y=\varepsilon\tilde{y},\quad Z=\varepsilon z,\quad T=\varepsilon t$$

ε 是大于零的小参数，设方程（3.6）的解为

$$\psi_k(\tilde{y},z,t)=\hat{\Psi}_k(Y,Z,T)e^{i\zeta} \qquad (3.7)$$

$$\zeta=\tilde{m}\tilde{y}+\tilde{n}z-\hat{\omega}t,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\hat{\omega},\quad \tilde{m}=\frac{\partial\zeta}{\partial\tilde{y}},\quad \tilde{n}=\frac{\partial\zeta}{\partial z} \qquad (3.8)$$

$\hat{\Psi}_k(Y,Z,T)$ 也按小参数展开

$$\hat{\Psi}_k(Y,Z,T)=\hat{\Psi}_0(Y,Z,T)+\varepsilon\hat{\Psi}_1(Y,Z,T)+\varepsilon^2\hat{\Psi}_2(Y,Z,T)+\cdots \qquad (3.9)$$

把方程（3.7）—（3.9）代入方程（3.6），若取零级近似方程，可得

$$\hat{\omega} = \hat{\Omega} k - \frac{\bar{q}_y k}{\nu^2 a\cos\varphi}, \qquad \nu^2 = \frac{k^2}{(a\cos\varphi)^2} + \mu^2 \tilde{m}^2 + \frac{f^2}{N^2}\tilde{n}^2 + \frac{f^2}{4H_0^2 N_2} \tag{3.10}$$

由（3.10）可求得 Y-Z 面上群速度分量 C_{ky}，C_{kz}，

$$C_{ky} = \frac{\partial\hat{\omega}}{\partial\tilde{m}} = \frac{2\mu^2\bar{q}_y\tilde{m}k}{a\cos\varphi\,\nu^4}, \qquad C_{kz} = \frac{\partial\hat{\omega}}{\partial\tilde{n}} = \frac{2(f^2/N^2)\bar{q}_y\tilde{n}k}{a\cos\varphi\,\nu^4} \tag{3.11}$$

若取一级近似，可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + \hat{\Omega}\frac{\partial}{\partial\Lambda}\right)(\nu^2\hat{\Psi}_0) - (\hat{\omega} - \hat{\Omega}k)\Big(\nu^2\alpha\tilde{m}\frac{\partial\hat{\Psi}_0}{\partial y} + \mu^2\hat{\Psi}_0\frac{\partial\tilde{m}}{\partial y} + 2\frac{f^2}{N^2}\tilde{n}\frac{\partial\hat{\Psi}_0}{\partial z} + \frac{f^2}{N^2}\hat{\Psi}_0\frac{\partial\tilde{n}}{\partial z}\Big) = 0 \tag{3.12}$$

把方程（3.10）代入上式并乘于

$$2\nu^2\hat{\Psi}_0 a\cos\varphi/(\bar{q}_y f^2)$$

再取欧拉平均，于是可得

$$\frac{\partial}{\partial T}A_m + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial y}(C_{ky}A_m\cos\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(C_{kz}A_m) - \frac{A_m}{q_y}\frac{\partial}{\partial T}\bar{q}_y - \frac{1}{2}\tilde{n}k\hat{\Psi}_0^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f^2}{N^2}\right) = 0 \tag{3.13}$$

其中 $$A_m = \frac{1}{4}\,\frac{\nu^4|\hat{\Psi}_0^2|a\cos\varphi}{q_y f^2}$$

若把在 Λ, Y, Z, T 坐标系中的 C_{ky} 与 C_{kz} 变成一般坐标系的群速度，并且假设基本态是缓变的、并近似等温的，这样（3.12）就变成

$$\frac{\partial}{\partial T}A_m + \nabla\cdot(\mathbf{C}'_g\cdot A_m) = 0 \tag{3.14}$$

于是可得到

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}'_g\cdot A_m \tag{3.15}$$

其形式与在β平面近似下的表达式一样，但波作用量的表达式却不一样了。

从上述可看到无论是β平面近似或是在球坐标下，E-P 通量矢量都平行于群速度在 y-z 面上的投影。因为波的传播是以群速度进行传播的，所以可以用 E-P 通量矢量形象地表示波的传播方向及波的作用通量的大小。

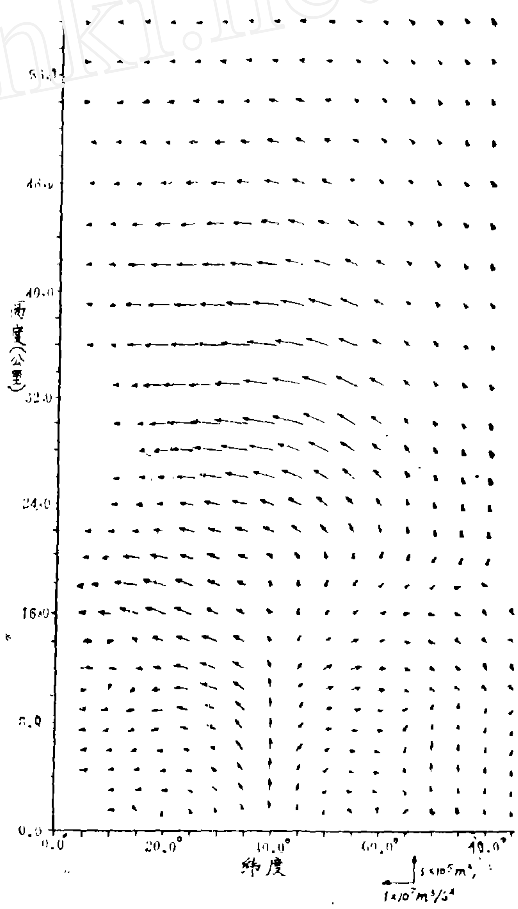

图 1 冬季位于 40°N 理想地形强迫所产生波数 2 定常行星波的 E-P 通量矢量的分布

图 1 是表示位于 40°N 理想地形强迫所产生的波数 2 定常行星波的 E-P 通量矢量的分

布。从图中可以发现有两支波传播波导：一支是从中纬度对流层低层向北传播到高纬度，再从高纬度地区传播到平流层；另一支波导是从中纬度对流层中、下层向南传播到低纬度对流层上层。由此可见，由E-P通量矢量所表示的定常行星波的传播波导与由波的折射指数平方所表示的波的传播波导是一样的（请见文献[8]）。

4. E-P通量在诊断波动与基本气流相互作用中的应用

1）地转非加速原理的证明　著名大气动力学家Charney[9]曾提出地转非加速原理，即，如果不考虑加热与摩擦的影响，当波动是定常的时，平均状态不受波作用通量的影响，波动有利于基本流的存在。Andrews和McIntyre证明了此原理。

由方程（2.3），取其平均方程，也就是基本气流方程，若不考虑加热，就可以得出基本气流的变化方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{q} = -\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'q'}) = -\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\cdot\mathbf{F}) \qquad (4.1)$$

因此，对于定常行星波，$\nabla\cdot\mathbf{F}=0$，$\partial\bar{q}/\partial t=0$，基本气流不受波作用通量的影响，波动有利于基本流的存在。

2）波动与基本气流的相互作用　把流体力学的运动方程、连续方程及热量方程取其欧拉平均形式，适当略去一些小量，就可以得到如下方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}-f\bar{v}^*-\bar{D}=\nabla\cdot\mathbf{F}, \qquad f\bar{u}_p-R\bar{\theta}_y=0\\ &\bar{v}_y^*+\bar{\omega}_p^*=0, \qquad \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t}+\bar{\theta}_p\bar{\omega}^*-\bar{S}=0\end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

上式中R是气体常数，$\bar{D}$，$\bar{S}$分别是加热与摩擦的欧拉平均，$\bar{\omega}$是垂直速度的欧拉平均，$\bar{\theta}_p=\partial\bar{\theta}/\partial p$，$\bar{\theta}_y=\partial\bar{\theta}/\partial y$，$\bar{\omega}_p=\partial\bar{\omega}/\partial p$。$\bar{v}^*$，$\bar{\omega}^*$是二级经圈环流：

$$\bar{v}^*=\bar{v}-\frac{\partial(\overline{\theta'v'}/\bar{\theta}_p)}{\partial p}, \quad \bar{\omega}^*=\bar{\omega}+\frac{\partial(\overline{\theta'v'}/\bar{\theta}_p)}{\partial y} \qquad (4.3)$$

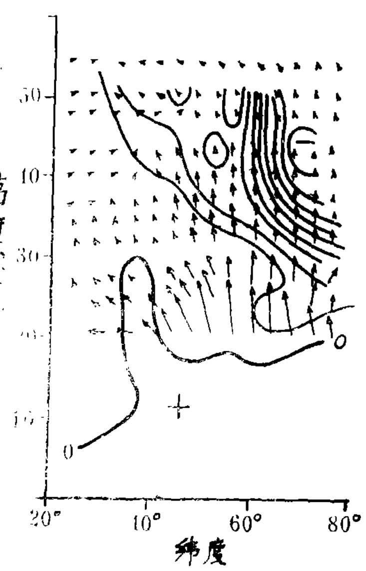

图2　1973年平流层爆发性增温时E-P通量矢量及其散度分布（实线）

从方程（4.2）可以看到如下几点：

a）如果$\bar{D}=\bar{S}=0$，并且$\nabla\cdot\mathbf{F}=0$，则从方程(4.2)可以解得$\bar{v}^*=\bar{\omega}^*=0$，$\partial\bar{u}/\partial t=0$。也就是说，在没有加热及没有摩擦时，如果扰动的E-P通量的散度为零，则基本气流不加速。同样证明了Charney所提出的地转非加速原理。

b）若$\nabla\cdot\mathbf{F}>0$，则$\partial\bar{u}/\partial t>0$。也就是说，若E-P通量矢量是辐散的，则西风基本气流要加速；反之，若$\nabla\cdot\mathbf{F}<0$，则$\partial\bar{u}/\partial t<0$，也就是西风基本气流要减速，而东风基本气流要加速。

上述这条推论在诊断大气中急流的加强与减衰是很有用的，特别是诊断冬季平流层极夜急流的崩溃是很方便的。如图2表示在1973年1月份由于大气对流

层的定常行星波迅速往平流层传播，使得平流层1波的 E-P 通量散度迅速变成负的，使得西风基本气流减弱，而东风基本气流迅速加强，这样很快产生平流层爆发性增温现象。

以上介绍了波作用量守恒方程与E-P通量矢量以及E-P通量在行星波传播及其波动与基本气流的相互作用中的应用。但是，在基本气流的 $\partial\bar{q}/\partial y=0$ 的地方，或是基本气流为零的地方，波作用守恒方程不成立，这是奇异点，或称临界层。在临界层，波的性质需要另外讨论，这是应用波作用守恒方程必须注意的。

参 考 文 献

1 Charney, J. G., Drazin, P. G., Propagation of planetary-scale disturbances from the lower into the upper atmosphere, *J. Geophys. Res.*, **66** (1961): 83—109.

2 Eliassen, D.G., Palm, E., On the transfer of energy in stationary mountain waves, *Geophys. Publ.*, **22** (1961): 1—23.

3 Andrews, A., McIntyre, M. E., Planetary waves in horizontal and vertical shear: the generalized Eliassen-Palm relation and the mean zonal acceleration. *J. Atmos. Sci.*, **33** (1976): 2031—2048.

4 ——, ——, Generalized Eliassen-Palm and Charney-Drazin theorems for waves on axisymmetric flows in compressible atmospheres, *ibid*, **35** (1978 a): 175—185.

5 ——, ——, An exact theory of nonlinear waves on a Lagrangian mean flow, *J. Fluid Mech.*, **89** (1978 b): 609—646.

6 黄荣辉，球面大气中行星波的波作用守恒方程与用波作用通量所表征的定常行星波传播波导，中国科学(1983)(即将发表).

7 Lighthill, M. J., Waves in Fluids. Cambridge University Press (1978).

8 黄荣辉、岸保勘三郎，关于冬季北半球定常行星波传播中另一波导的研究，中国科学，10(1983).

9 Charney, J. G., Stern, M. E., On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, 19 (1962): 159—172.

A NEW PHYSICAL FLUX FOR DIAGNOSING WAVE ON THE BASIC FLOW ELIASSEN-PALM FLUX

Huang Rong-hui

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)