

# 叶轮机叶片气动优化理论的进展

吴宝仁 刘高联

(浙江鄞县通用机械厂) (上海机械学院)

## 一、引言

叶片气动问题(一般讲,任何工程问题)可分为下列四大类<sup>[1,2]</sup>:正命题,反命题,杂交型命题和优化命题。与叶栅优化命题直接相关的是叶栅反命题,但由于如何给定叶面流速,即最优流速分布问题没有解决,由于按给定叶面流速分布求出的叶型往往不能满足气动以及其他方面(强度、振动、冷却、工艺等)的要求,从而无实用价值,所以,反命题解法虽然早在40年代就已出现,但至今极少被采用。至于最优流速分布问题迟迟未能解决的原因,又是由于叶型形状同叶面流速分布之间的关系太复杂,以致极难建立变分问题的数学表达式,还由于在数学上经典变分学无力顾及各种不等式型的设计约束。

近年来,数学规划论(函数极值问题+不等式约束)和最优控制论(泛函极值问题+不等式约束)的发展,使任何工程设计问题都由以往经验的、反复试凑式的设计有逐步为优化设计所取代,同时,带等式约束的优化设计有逐步为带不等式约束的优化设计所取代(从而使所得的最优解现实可行)的总趋势。 $S_2$ 流面由简单径向平衡的流型设计进入受控涡设计,再进到最优流型设计以至全 $S_2$ 流面的最优。化

由于实际工程设计问题的极端复杂性,往往为了易于实现整体的或至少是局部的(分部的)优化,常把一个整体最优设计问题分解为各等级的优化问题。这种分解既可以从物理模型上着手,例如把整个叶轮机的优化设计问题分解为下列(通常是相互弱相关的)各等级的优化问题:各级焓降的最优分配问题<sup>[4,8]</sup>,每级 $u/c_1$ <sup>[4,2]</sup>以及 $S_1$ 和 $S_2$ 流面的优化问题;也可以从数学模型上着手,例如采用数学规划论中的分解技术<sup>[4,1]</sup>。

优化理论的研究,就 $S_1$ (叶栅)方面而言,捷克<sup>[13,14]</sup>,比利时<sup>[11,12,37]</sup>开展得最早,后来还有苏联<sup>[5,1,5,2,5,4-5,6,7,1]</sup>和中国<sup>[5,6,25,26,46,47,50,60]</sup>;在 $S_2$ 方面,目前尚无全 $S_2$ 流面的优化理论,还只进行了最优流型(即轴向间隙中的气流)的研究,以苏联<sup>[38,39]</sup>和中国<sup>[4]</sup>进行得最早,目前仍只有这两国进行<sup>[1,2,5,4,6,1,6,9-7,1]</sup>。对三元叶栅的优化研究则刚开始,见[6]和[54]。

## 二、叶栅( $S_1$ )优化理论

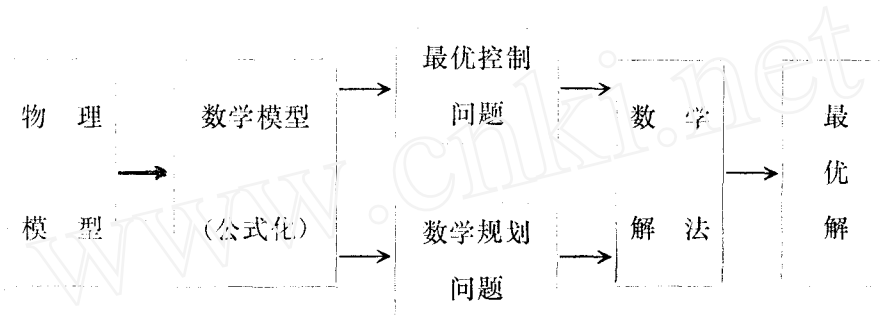
1. 叶栅优化问题的提法 和其他任何优化问题一样,叶栅优化问题也由三部分组

成<sup>[3,15,16]</sup>:1) 目标函数; 2) 等式约束(状态方程); 3) 不等式约束(设计限制)。即总可表示为在一定的等式约束和不等式约束下, 找出能使某一选定性能指标(目标函数)达到极值的参量值或函数(分布)形式。

随着对目标函数和不等式约束的选择的不同, 优化命题也就形成了各种不同的提法。通常叶栅优化问题最有代表性的提法有两种: a) 气动效率最高的叶栅; b) 叶型气动负荷(每叶环量)为最大的叶栅。它们可以附加上如下一些不等式约束: 边界层不分离条件, 叶厚分布约束(根据强度、冷却、振动、工艺等方面的要求), 流速上限约束等等。这些不等式设计约束都是为了保证所求得的最优解的现实可行性而设置的。

[46]中已经证明, 这两种提法之间有“变分相关性定理”成立, 下面第3节我们将给出此定理的一个简化证明。

**2. 叶栅优化理论的文献综述** 为了便于分析评述, 我们首先将现有的有关文献进行适当的分类。任何优化问题都可用下面的方框图来概括表示:



目前已有的叶栅优化理论, 可以按所采用的物理模型或数学模型来分类。就**物理模型**而言, 大致可分为两大类。第一类: 简化理论, 采用大简化的物理模型:

物理模型 A: 单个叶型凸面 + 边界层 + 无粘外流

将问题简化为两个互不相关、可以依次求解的子问题: i) 单个叶型凸面上的最优流速分布问题; ii) 用反命题(或杂交命题)解法求出相应的叶型。

这类理论的优点是简单易解, 也确见效, 缺点是不能顾及叶厚分布约束和叶面曲率对边界层的影响等因素, 故实用性受限制<sup>[11,12,14,25,26,34,37,47,50]</sup>。

第二类: 更完密的理论, 保持叶栅流动的原貌, 采用更切合实际的物理模型, 现有

物理模型 B: 叶栅 + 无粘绕流 + 边界层<sup>[46]</sup>

物理模型 C: 叶栅 + 粘性绕流<sup>[23]</sup>

模型 B 显然比模型 A 更完善, 更切合叶栅流动的客观实际, 它的主要局限性是假定了  $Re$  充分大, 从而粘性作用只表现在壁面边界层内。

模型 C 从理论上讲(至少在形式上或  $Re$  小时)更加完整, 但实际困难更大, 主要是湍流模型以及“层流→湍流”转换准则不够成熟完整(特别是旋转系统中), 数学求解也更加繁难(方程阶次高, 非线性强等)。

就最终的**数学模型**而言, 又可大致分为两大类。第一类: 归化为一个优选参数的问题(即函数的条件极值问题), 实即以某种方式使用 Ritz 法等变分直接解法将叶栅优化的最优控

制问题转化为一个相应的数学规划问题，然后采用数学规划论的各种解法来数值求解。这里又可分为三种具体处理途径：

1) 叶栅几何参数族的优化：首先，把叶型形状用含有一组待定参数的曲线族来代表，通过求解一系列**正命题**和边界层计算，并与某种非线性规划法<sup>[4,6,2]</sup>（例如共轭梯度法，可行方向法，变尺度法等）或性能曲线族图<sup>[51,55]</sup>相结合，逐步找出最优的参数族，从而得出近似的**最优叶栅解**。这种方法的优点是：叶栅的几何性约束（例如叶厚分布约束）易于直接控制，因而易于保证最优解的现实可行性，又正命题的理论比较成熟，现成的解法和程序较多；缺点是气动性约束（例如边界层分离约束，流速上限约束等）难以控制，所得的解只是近似最优解。（因只能在一定的参数族所代表的叶型中来优选。一般讲，曲线族所含的参数愈多，则最优解愈精确！）此法最早是为单机翼的优化设计而创立的（如[29—32]等），后来被用到叶栅优化中。文献[36]提出的参数造型法是用九个几何参数表示标准型线（对称、不弯曲的）和中弧线（抛物线）方程，设计者根据强度和最优流速分布的要求选择及迭代计算确定这些参数。文献[55]用“场”法（性能曲线族图）实现双参数叶型的优化设计，这二个参数（如叶型宽度和安装角）就是优化参数。[51,63]等用4次多项式描述叶型型线，根据气动准则（损失最小）或几何准则（型线曲率极小）确定各个多项式系数。大量计算研究和试验验证表明，用5次多项式描述最优叶型已经足够，优化设计的叶型损失可下降0.2%—0.8%。文献[56]则是通过直接控制型线曲率来逼近型线，型线曲率采用折线函数的形式，用改变型线的曲率来满足气动、强度和其他设计要求。但对如何选取最优曲率函数等问题有待进一步的研究。

2) 叶栅气动参数族的优化：从以参数形式表示的叶面流速分布出发，逐次求解一系列**反命题**，并结合某种非线性规划法或性能曲线族图找出参数族的最优值，从而也就得到了叶面流速的最优分布，按此解反命题就可得出相应的**最优叶型**。这种方法的优点是能够较直接地控制叶栅的气动性约束；缺点是对叶型的几何性约束很难控制住，因而易于导致无实用价值的叶型（例如型线不封闭、叶厚分布不合理等）。当然，它也只能求得近似的**最优解**（如[33—35]。[35]经分析比较后提出在复势平面上用参数规定型面流速分布最为合理。图1表示在叶型面积约束  $\bar{A}_e = \text{面积}/(\text{栅距})^2 = 0.45$  下线性的型面速度分布，其中  $q$  是气流速度与滞止声速之比值， $\sigma$  是相对弧长。调整  $\sigma_m$ ， $q_{max}$ ， $q_{min}$  值可得出气动性能最优的叶型。

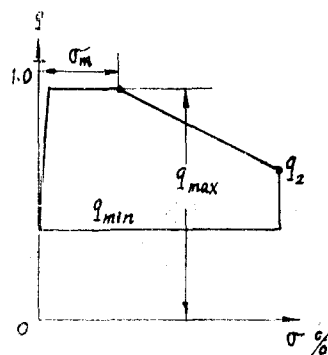
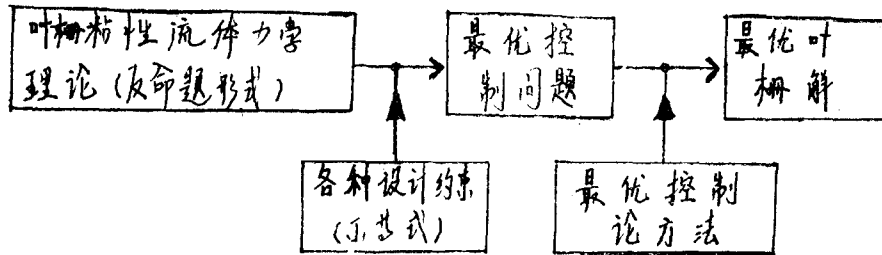


图 1

3) 一般变换参数族的优化：一般讲，总可以通过一个变换函数（保角的或非保角的变换）将物理平面上一个任意叶栅流域变换（映射）成某一映象平面上的一个典型域，因此，如果在变换函数中包含某些待定参数，就可以将目标函数表示成这些参数的函数，于是，只要对这些值进行优选（例如使用函数极值求法，或非线性规划法等），即可求得叶栅的近似最优解。一般讲，变换函数中包含的参数愈多，则最优解的精度愈高（如[13,40]）等。

第二类：归化为一个最优控制论问题，即归化为一个在不等式约束下求泛函的条件极值问题<sup>[16-20]</sup>。最优控制论比经典变分学优越之处在于前者能够考虑反映各种实际设计要求

(气动、强度、振动、冷却、工艺等方面)的不等式约束。一般再应用优化数值解法<sup>[3]</sup>(例如共轭梯度法)求解,可图示如下:



这类方法又有两种不同做法: 1) 归化为常微分方程组描述的最优控制问题<sup>[5,6,46]</sup>。2) 归化为偏微分方程组描述的最优控制问题<sup>[21-23]</sup>。在这两者中,由于常微分方程描述的最优控制问题的理论现在发展得比较成熟,可以应用 Pontryagin 极大值原理及其推广形式或动态规划论求解,比较简单易行,也更有把握,所以实用性比较好(就目前最优控制论发展水平而言)。

对跨声速叶栅的优化,现有研究还较少,而且都用到一些经验数据,理论上还不够完整,有待改进(如[56-59]等)。

**3. 叶栅气动优化问题的变分相关定理** [46]所提出的更完密叶栅优化理论中,曾经指出了上面第2节所述优化命题的两种提法的相关性,并证明了一条变分相关定理。现在我们将只在“简化理论”的范畴内论证这个问题。首先分别建立两种提法的数学表述式。

a) 效率  $\eta$  最高的叶栅 目标函数是叶栅损失系数  $\zeta$ , 它可表为<sup>[46]</sup>

$$\zeta = \frac{2\sigma}{\cos\beta_2} \{ (0_p + 0_s)_k + 0.05\delta_k \} \quad (1)$$

其中  $\sigma$ ,  $\beta_2$ ,  $\delta_k$  分别代表稠度、出气角和叶型后缘厚度,都是给定量;下标  $k$  指示叶型后缘处。考虑到叶型压力面  $p$  上的边界层冲量厚度  $0_p$  远小于低压面  $S$  上的,即  $0_p \ll 0_s$ ,且  $0_p$  的变化范围也较小,实用上可以近似地把  $\zeta \Rightarrow \text{Min}$  简化为  $0_s \Rightarrow \text{Min}$  的问题。

同时,由边界层理论可知,  $0_s$  可用  $S$  面上的流速分布  $W(S)$  表示出来:

$$0_s^a = \frac{c}{\text{Re}^{1/n} W^d} \int_0^S W^d dS \quad (2)$$

鉴于绝大多数叶栅实际上都处于湍流区工作,为分析简便计,设边界层全部是湍流状态,于是有:  $c=0.016$ ,  $n=4$ ,  $d=4$ ,  $a=5/4$ ,  $\text{Re}=WB/v$ ,  $B$  是叶栅沿  $x$  向宽度。

于是优化命题又可再归化为使  $(0_s^a)_k \Rightarrow \text{Min}$  的问题。如以  $b$  代表叶型  $S$  面之全弧长,则本优化命题可表作求目标泛函  $J$  的条件极值问题:

$$J = \int_0^b W^d dS \Rightarrow \text{Min} \quad (3)$$

同时,为了保证最优解的实用性,还应当再附加下列约束条件:

1)  $S$  面上的环量约束(等周约束):

$$\Phi = \int_0^b W dS = \Phi_p, \quad (\text{给定常数}) \quad (4a)$$

2) 边界层无分离条件: 以型参数  $\Gamma$  为准, 可表作

$$\Gamma = \frac{\theta}{W} \frac{dW}{dS} \geq -0.0042 \quad (4b)$$

3) 流速的上、下限约束: 有时为了避免激波损失或气蚀, 并兼顾变工况性能, 另一方面, 为了保证叶型不致太薄, 要求满足

$$W_{\min}(S) \leq W \leq W_{\max}(S) \quad (4c)$$

其中  $W_{\max}(S)$  和  $W_{\min}(S)$  是给定的函数.

引入拉氏乘子  $\mu$ , 可将等周约束 (4a) 结合到泛函  $J$  中以构成扩充的泛函  $\tilde{J}$ :

$$\tilde{J} = J + \mu \Phi \quad (5)$$

于是效率最高的最优叶栅问题归化为在约束 (2), (4b) 与 (4c) 下求泛函  $\tilde{J}$  的条件极值问题.

b) 每叶环量最大的叶栅 它就是在效率约束

$$J \leq K_{\eta} \quad (4d)$$

以及约束 (2), (4b), (4c) 下使环量  $\Phi$  取极大值. 引入拉氏乘子  $\mu'$ , 将等周约束 (4d) 结合到泛函  $\Phi$  中去, 以构造一扩充的泛函  $\tilde{J}'$  如下:

$$\tilde{J}' = \Phi + \mu' J \quad (6)$$

于是环量最大的最优叶栅问题归化为在约束 (2), (4b) 和 (4c) 下求泛函  $\tilde{J}'$  的条件极值问题.

由式 (5), (6) 可知, 对这两个优化问题, 下列变分相关定理成立: 如果问题 a) 在等周约束 (4a) 下的最优解是使  $J_{opt} = K_{\eta}$ , 则问题 b) 在等周约束式 (4d) 下的最优解必使  $\Phi_{opt} = \Phi_{p.c.}$ , 即此时这两个问题具有相同的最优解.

这一变分相关定理使我们只需详细研讨二者之中任一最优化问题的求解.

**4. 对叶栅简化优化理论的补充论证与改进** 现有的两种主要的简化优化叶栅理论<sup>[1,12,14]</sup>尚有一些问题需要进一步补充论证与改进. 现分别讨论如次.

I. 关于 Ruzicka-Citavy 理论<sup>[14]</sup> [14]中只简述了变分问题的提法及其最终解式, 而并未给出具体解法. 同时其中也有不甚合理和不完善之点 (例如, 叶面最优流速分布在  $X_*$  处有间断, 反问题不能保证叶厚分布, 可压修正为线性化修正).

[43,47]对此提出过一个比较严密而简明的图解分析法, 首先将它归化为由式 (3), (4a)~(4c) 所描述的最优控制问题, 接着应用很简单的数学推导 (不必应用最优控制论和变分学) 和直观图解分析来找出最优解的组成及其性质. 为此, 注意到在  $W$ - $S$  面 (图 3, 4) 上, 式 (4a) 代表面积约束, 而可行区的无分离边界可由  $\frac{\theta}{W} \frac{dW}{dS} = -0.0042$  积分得出如下<sup>[43]</sup>:

$$W = W_T \{ \theta_T / (\theta_T + 0.01764S) \}^{1/4.2} \quad (7)$$

下标  $T$  指示始点 (图 4 的  $T$ ) 参量. 上式代表图 3 的  $T_2f$ ,  $t'f$ ,  $tT_0$  等曲线. 于是我们的优化问题可理解为: 在保持  $W$ - $S$  面上  $W(S)$  下的面积为定值  $\Phi_{p.c.}$  下, 要求在可行区 (其边界由式 (4c) 和 (7) 规定) 内找出能使  $W$ - $S$  面上的相应面积为极小的最优流速分布  $W_{opt}(S)$ .

利用 Hölder 不等式可以证明  $W$ - $S$  图中的如下几何规律<sup>[47]</sup>: 为了使损失最小, 应当在

上述可行区内尽可能使流速均匀。由此可断定图 2 的四条曲线中, 虽其下的面积相同, 但以曲线 I 为最优。据此, 可对叶栅优化问题作如下分析: A) 对初速和终速(即  $t$  与  $f$  点) 已给定的情况(图 3): 设  $\Phi_i$ ,  $\Phi_f$  和  $\Phi_0$  分别代表  $t'f'$ ,  $t'f'$  和  $tT_0T_1f$  分布的环量,  $\Phi'_M$  和  $\Phi_M$  分别代表有和无  $W_{max}$  约束时的最大可能环量, 而令:  $\Phi_{Kp} = \text{Min}(\Phi_M, \Phi'_M)$ , 则最优流速分布见下表中的 A) 部。

A) 初、终速给定时(图 3)		B) 初速不给定时(图 4)	
$\Phi_{pr}$ 的范围	$W_{opt}(S)$	$\Phi_{pr}$ 的范围	$W_{opt}(S)$
$\Phi_0 \leq \Phi_{pr} \leq \Phi_f$	降→平→直升(如 $tT_1T_1'f$ )	$\Phi_0 \leq \Phi_{pr} < \Phi_f'$	平→直升(如 $t_1t_1'f$ )
$\Phi_f \leq \Phi_{pr} < \Phi_i$	降→平→降(如 $tT_2T_2'f$ )	$\Phi_f' < \Phi_{pr} \leq \Phi_i'$	平→降(如 $tTf$ )
$\Phi_i < \Phi_{pr} \leq \Phi_{Kp}$	升→平→降(如 $tM_0M_1Mf$ )	$\Phi_i' \leq \Phi_{pr} \leq \Phi_{Kp}$	升→平→降(如 $t't''T''f$ )

B) 对初速(即  $t$  点) 未给定的情况(图 4): 设  $\Phi'_f$ ,  $\Phi'_i$  和  $\Phi'_0$  分别代表  $t_0f$ ,  $t'T'f$  和  $T_0T_1'f$  线的环量, 则最优流速分布见表中的 B) 部。

图 4 下部是  $\Phi$  和后缘冲量厚度  $\theta_k$  随降速起点  $T$  的位置  $S_T$  变化的曲线。在  $M$  点, 环量出现极大值  $\Phi_M$ 。显然, 最优解只能位于  $S_T = S_M$  区。

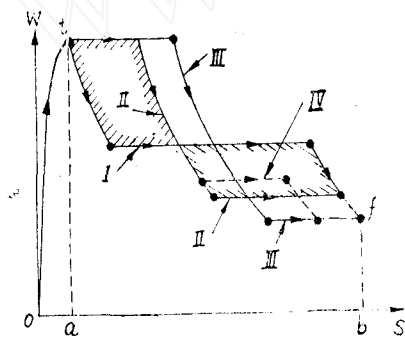


图 2

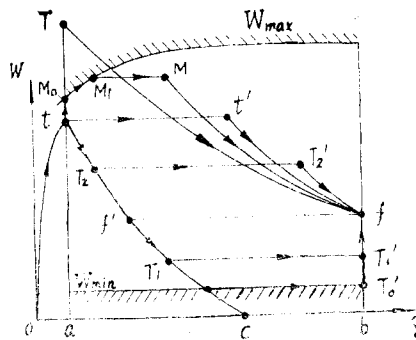
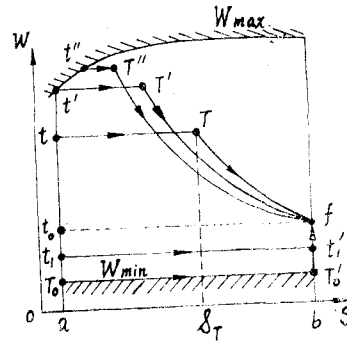


图 3

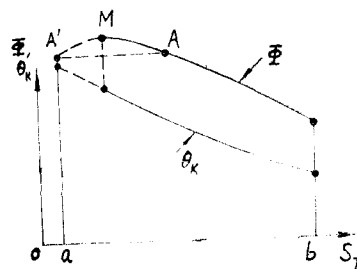


图 4

以上分析指出：1) 约束(4a) — (4c) 是保证最优解的实用性所必需的。例如，若无约束(4a)与(4c)，则最优流速分布将是图3的  $iT_0cbf$  或图4的  $abf$ ，都含有零速段，无现实意义！2) 环量必须在下式的范围内选取：

$$\Phi_0 \text{ (或 } \Phi'_0) \leq \Phi_{pr} \leq \Phi_{kp} \quad (8)$$

通过上述简单而直观的分析，我们获得了叶面最优流速分布的全部信息（包括分段数、各段的次序和性质、环量的容许范围以及各种不等式约束的必要性）和算式。

在求得叶型凸面最优流速分布后，为了求出最优叶型，最好是再规定叶厚分布，然后采用[10,47]的C型杂交命题解法来求解，详见[26]。

II. 关于 LeFoll-Papailiou 理论<sup>[11,37]</sup> 根据[11]，LeFoll 优化理论是建立在对边界层内部流体能量耗散机制的物理推理上，而并未从数学上严格推导出最优条件。下面补充论述这个问题，并进而推广到附加适当约束条件的情况以及速度降达最大值的优化问题。为此，利用边界层动量积分关系式和机械能积分关系式可导出[11]中的下列边界层基本关系式：

$$d \ln E = \frac{dX}{1+2M_i} = C_D \frac{dS}{\delta_3} \quad (9)$$

$$d \ln W = dL - M_i C_D (dS/\delta_3) \quad (10)$$

其中，

$$\left. \begin{aligned} E &= \rho W^3 \delta_3 / 2 \quad (E \text{ 为动能损失}) \\ L &= \int \frac{d \ln H_{3,2}}{(H_{1,2} - 1)} + \text{const} \quad (L \text{ 为型参数}) \\ X &= \ln \text{Re}_3 + 2L, \quad \text{Re}_3 = W \delta_3 / \nu \\ M_i &= \left(1 - \frac{C_f}{2C_D} H_{3,2}\right) / (H_{1,2} - 1) = f(L, X) \\ C_f &= \tau_w / \frac{\rho W^2}{2}, \quad C_D = 2 \int_0^{\delta} \frac{\tau}{\rho W^2} \frac{\partial(W_b/W)}{\partial y} dy \end{aligned} \right\} \quad (10')$$

$$H_{1,2} = \delta_1 / \theta, \quad H_{3,2} = \delta_2 / \theta$$

$\delta_1, \theta, \delta_3$  分别表示边界层的位移厚度、冲量厚度和动能厚度； $\tau$  为粘性切应力，下标  $i, f, b$  和  $W$  分别指示始点、终点、边界层内部和壁面。

下面分别研究两种最优化命题：能量损失最小的和速度降最大的最优化命题。

A) 动能损失最小的优化命题 为此，我们利用式(9)写出

$$\ln E = \ln E_i + \int_{X_i}^{X_f} \frac{dX}{1+2M_i(L, X)} \quad (11)$$

i) 现先考察 LeFoll 所研究过的情况，即要在  $L-X$  平面上求出能使动能损失  $E$  最小的轨迹  $L(X)$ ，这可从从上式取变分  $\delta \ln E = 0$ ，其欧拉方程是

$$(\partial M_i / \partial L)_X = 0 \quad (12)$$

这实质上同 LeFoll 从物理观点推断的结论一致<sup>[11]</sup>。下标  $X$  表示求偏导时视  $X$  为常量。

不过这样得出的壁面长度可能不合实用要求，因此，更合理的提法应当是添加一个壁长约束，即改为下面的问题：

ii) 要求在规定壁长  $\Delta S$  的条件下求出能使式(11)泛函  $\ln E$  取极小值的最优解  $L(X)$ 。

由于从式(9)可写出等周约束

$$\Delta S = \int_{X_i}^{X_f} \frac{\delta_3 dX}{(1+2M_t)C_D} = (\Delta S)_{pr} \quad (13)$$

引入拉氏乘子 $\lambda$ 后,可将上式与式(11)结合,构成下列扩充泛函:

$$J(L, X) = \int_{X_i}^{X_f} \left\{ 1 + \lambda \frac{\delta_3}{C_D} \right\} \frac{dX}{1+2M_t} \quad (14)$$

它的极值问题的欧拉方程为

$$2\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\delta_3}{C_D}\right)\left(\frac{\partial M_t}{\partial L}\right)_X = (1+2M_t)\left[\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\delta_3}{C_D}\right)\right]_X \quad (15)$$

可见,这时的最优解已不同于LeFoll的了。

B) 流速降最大的优化命题 这种命题对于扩压器和压气机叶栅的设计特别有用。首先,利用式(9)和(10'),可以将式(10)改写成各种不同形式,积分后得出

$$\ln\left(\frac{W_{2f}}{W_{2i}}\right) = \int_{X_i}^{X_f} \left\{ \frac{dL}{dX} - \frac{M_t}{1+2M_t} \right\} dX \quad (16A)$$

或 
$$\ln\left(\frac{W_{2f}}{W_{2i}}\right) = \int_{S_i}^{S_f} \left\{ \frac{dL}{dS} - \frac{C_D M_t}{\delta_3} \right\} dS \quad (16B)$$

或 
$$\ln\left(\frac{W_{2f}}{W_{2i}}\right) = \int_{\ln E_i}^{\ln E_f} \left\{ \frac{dL}{d \ln E} - M_t \right\} d \ln E \quad (16C)$$

i) 现采用LeFoll的映象平面 $L-X$ ,要求在附加壁长约束(13)下,求得 $L-X$ 平面上的最优轨迹 $L_{opt}(X)$ ,使降速比 $W_{2f}/W_{2i}$ 取极小值。这时,宜采用式(16A),用拉氏乘子 $\lambda$ 将约束(13)结合到式(16A)中,构成下列扩充泛函:

$$J(L, X) = \int_{X_i}^{X_f} \left\{ \frac{dL}{dX} - \frac{M_t}{1+2M_t} + \lambda \frac{\delta_3}{C_D(1+2M_t)} \right\} dX \quad (17)$$

对这种特殊形式的泛函(对 $dL/dX$ 为线性)的变分问题, Miele曾利用Green定理提出过一个十分巧妙的解法<sup>[10]</sup>,首先将上式写成

$$J(L, X) = \int_{X_i}^{X_f} \left\{ dL - \frac{C_D M_t - \lambda \delta_3}{(1+2M_t)C_D} dX \right\}$$

再求出特性函数

$$\omega = \frac{\partial}{\partial L} \left[ \frac{\lambda \delta_3 - C_D M_t}{(1+2M_t)C_D} \right]$$

由 $\omega = 0$ 得出 $L-X$ 面上使泛函 $J$ 取极值的最优轨迹的主要组成部分

$$\left[ \frac{C_D}{\lambda \delta_3} (1+2M_t) + \frac{2}{1+2M_t} \right] \left( \frac{\partial M_t}{\partial L} \right)_X = \left[ \frac{\partial}{\partial L} \ln \frac{\delta_3}{C_D} \right]_X \quad (18)$$

显然,如果不带壁长约束,即 $\lambda = 0$ ,则这部分最优轨迹方程变为 $(\partial M_t / \partial L)_X = 0$ ,这正是LeFoll最优解!可见在无壁长约束时,LeFoll解即使动能损失最小,又使降速比最小。

根据Miele方法还可加上另一些不等式约束以保证最优解的现实可行性。例如可加上边界层不分离约束(图5中横坐标轴 $X$ ),极限降速约束<sup>[11]</sup>  $dL/dX \geq -0.5$ (图5中 $ii_1$ 和



$fj$ ) 和极限升速约束  $dL/dX \leq Kc$  (常数, 图 5 中  $ii$  和  $ff_1$ )。这些约束在  $L-X$  面上构成一个可行区 (其余为禁区, 以阴影区表示之)。当  $\lambda$  取不同常数值时, 式 (18) 给出图中的一组曲线, 折曲线  $ii''''f''''f, ii''f''f, ii_0f_0f, ii'f'f$  分别表示给定壁长  $(\Delta S)_{pr}$  为不同值时的最优解曲线  $L_{opt}(X)$ 。

对式 (14), (15) 也可作类似的分析。

ii) 现考虑另一种优化问题: 要求在给定壁长  $(\Delta S)_{pr}$  和下列等周约束:

$$\Delta \ln E = \int_0^{(\Delta S)_{pr}} \frac{C_D}{\delta_3} dS = \text{const} \quad (19)$$

下找出使降速比最小的最优解  $L_{opt}(S)$ 。

这时, 应当用拉氏乘子  $\lambda$  将式 (19) 结合到式 (16 B) 中以构成下列扩充泛函:

$$J(L, S) = \int_0^{(\Delta S)_{pr}} \left\{ \frac{dL}{dS} - \frac{C_D}{\delta_3} (M_t - \lambda) \right\} dS \quad (20)$$

它的极值问题也宜用 Mieie 方法求解。其特性曲线 ( $\omega = 0$ ) 方程为

$$\left[ \frac{\partial \ln(M_t - \lambda)}{\partial L} \right]_S = \left[ -\frac{\partial}{\partial L} \ln \left( \frac{\delta_3}{C_D} \right) \right]_S \quad (21)$$

它是  $L-S$  平面 (或仍用  $L-X$  平面) 上最优轨迹的重要组成部分。这时, 对全部最优轨迹线构造的分析可完全仿照式 (18) 那样进行, 不赘。

iii) 这个优化问题也可用另一种方法来解决。为此采用式 (16 c), 并将壁长约束表作

$$\int_{\ln E_i}^{\ln E_j} \frac{\delta_3}{C_D} d \ln E = (\Delta S)_{pr} \quad (22)$$

引入拉氏乘子  $\lambda$  构作下列扩充目标泛函:

$$J(L, E) = \int_{\ln E_i}^{\ln E_j} \left\{ \frac{dL}{d \ln E} + \left( \lambda \frac{\delta_3}{C_D} - M_t \right) \right\} d \ln E \quad (23)$$

其极值问题的特性曲线 ( $\omega = 0$ ) 方程为

$$\left( \frac{\partial M_t}{\partial L} \right)_E = \lambda \left[ -\frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{\delta_3}{C_D} \right) \right]_E \quad (24)$$

这时, 对全部最优解  $L_{opt}(E)$  (或  $L_{opt}(X)$ ) 构造的分析完全与上述情况类似, 不赘。

应当指出的是: 根据变分学的相关定理, 我们还可以从式 (17) 和 (18) 得到在规定降速比和  $X_j$  下使壁长为最短的变分问题的解; 从式 (20) 和 (21) 可以得到在规定降速比和壁长下使动能损失为最小的变分问题的解; 而从式 (23) 和 (24) 则可以得到在规定降速比及能量损失下使壁长为最短的变分问题的解。

### 三、 $S_2$ 流面以及整个旋转叶轮的最优化理论

1.  $S_2$  流面的最优化命题——最优流型问题 整个  $S_2$  流面的最优化问题, 一般讲应当是

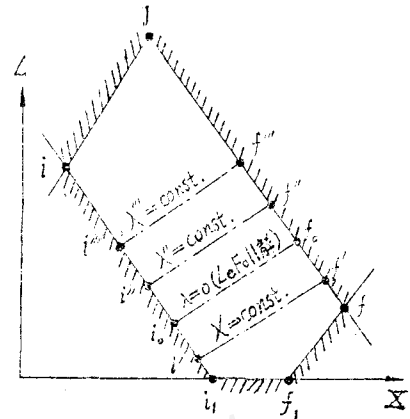


图 5  $L-X$  平面上的可行域

要求找出能使某一指定性能指标达到极值的内外机壳的最优形状和  $S_2$  面上最优的  $C_u r$  分布。为了解决这个问题,需用到内外壳(端壁)边界层理论和叶端间隙的损失计算。据我们所知,迄今还没有人作过整个  $S_2$  流面的优化理论的研究。目前,在  $S_2$  流面优化方面已进行的工作都还只限于它的一个简化形式——最优流型问题,即只考虑各列叶轮轴向间隙内的气流参数的最优径向分布问题。现有的最优流型的文献可分为两类:一类是把气流径向平衡方程用作等式约束(如[1, 2, 4, 38]);另一类则不考虑气流径向平衡条件(如[65, 66])。当然,前一类工作更合理,因为气流径向平衡条件是反映间隙中气流物理过程和保证最优解现实可行性的必要条件;后一类工作只把这个条件用于最后计算流线曲率,一般讲,这样求得各条流线未必能在各轴向间隙中协调起来。在所用的数学模型方面,也可分两种,其一归化为一个最优控制论(或变分学)问题(如[1, 2, 4, 49, 65]);另一种则是归化为一个数学规划问题(如[67, 71, 73])。选择的性能指标有级轮周效率极大(如[66, 69]),或级的余速损失极小(如[61, 65]),或功率极大(如[2, 38, 39])。

当把求解轴向间隙中最优气动热力参数分布问题归结为变分学的等周问题时,取轮周效率极大为性能指标,给定级进口的流量分布为常数作为约束条件得出的解析解表明<sup>[60]</sup>,轴向间隙中的径向分速为零,且级出口的绝对气流并不是轴向出口的,取末级余速损失极小作为优化准则时,在同样约束条件下得出的解析解表明<sup>[95]</sup>,级的绝对气流是轴向出口的,轴向速度分量是速度系数和流量系数的函数,当这些系数沿叶高不变时,轴向分速沿叶高才为常数,对理想圆柱形级,这时  $C_u r = \text{const}$  是最优的扭曲规律。对这种圆柱形级在考虑泄漏时最优扭曲规律的研究表明<sup>[70]</sup>,有中等径向间隙(如  $\delta = 1.5\text{mm}$ )小  $D/l$  ( $= 3.6$ )时,  $C_u r = \text{const}$  仍是最优的扭曲规律,此时轮周效率极大;但短叶片级中(如  $D/l = 8$ ),随着径向间隙增大(如  $\delta$  从 0 到  $1.5\text{mm}$ ),欲使轮周效率极大,则需减小反动度的径向梯度,直至最后为零,可见短叶片圆柱级中考虑泄漏的最优扭曲规律已远离  $C_u r = \text{const}$ 。

最优流型的分析表明,把导叶设计成反向扭曲,使气流稍向根部区域集中,提高根部一段叶片的通流能力,这不仅在额定工况时是合理的<sup>[40]</sup>,而且在变工况运行时也是有益的,特别在小容积流量时,它比普通级的效率增加更大<sup>[72]</sup>。因为在这种级的出口,流量沿径向分布均匀,减少了气流的脱流区域,并使余速损失大大减小。优化结果可使末级的平均效率提高 5—7%。

选定某性能指标作为优化准则后,应存在唯一的最优扭曲规律与它对应;如果这时外加某种规律,则只能将这种规律当作约束条件处理。[38, 39]分析了几种简单规律[如规定间隙中密流分布(为常数),出口绝对速度的切向分量(为零)等]下级最大功状态的气动热力参数分布。[54]取轮周效率为优化准则,用三种常用扭曲规律(等环量、等密流、等 $\alpha_1$ 角)为约束条件对动叶片长为 1050mm 的末级进行的优化计算表明,它们的积分效率计算值都接近于最优值;当把这些扭曲规律作为轴向间隙径向平衡计算的封闭关系式时,在相同的初始条件下,优化可使级效率提高 3% 左右。

[49]用最优控制论方法作的比较计算表明,导叶和动叶的速度系数对最优扭曲规律有显著的影响。由于流动的空间性,这些系数在计算中应该迭代修正。但当导叶的进口几何角等于  $90^\circ$  时,可用精度较低的简单方法估算导叶和动叶的速度系数<sup>[73]</sup>。如何合理选择速度系数是  $S_2$  流面优化计算中需要进一步探讨的问题。另外,由于流动的三元性,流线的形状(斜

率, 曲率) 应该迭代计算, 如何设法减少迭代次数, 显著缩短计算时间也是优化计算中需要解决的问题。

**2. 整个旋转叶轮的最优化理论** 在这里, 要求在更多的设计约束(例如, 叶片的离心应力约束、振频约束等)下把整只叶轮叶片的最优形状同时求出来。已有的有关文献似乎只有[6, 46, 53, 68], 其中[53, 68]把它作为一个数学规划问题, 而[6, 46]则将它归化为一个最优控制论问题来求解。

## 四、结论与展望

从以上的综合论述可以看到, 叶轮机叶片气动设计的最优化理论的建立与发展, 还只是最近十多年来的事。虽然已进行了不少工作, 取得了较大的进展, 但从四化建设和叶片设计的实际要求(高效率, 高速, 高负荷, 高温等)来看, 还远不能满足。目前, 研究工作和成果主要集中在亚声速下的平面叶栅(轴流式 $S_1$ 面)和最优流型问题上。因此, 叶片气动优化理论的研究, 无论从深度和广度都必须进一步大力向前推进。为此, 我们觉得今后应当从下列几个具体方面开展研究:

1) 大力开展混流式叶栅、整个 $S_2$ 流面流动和整个三元旋转叶轮气动优化理论的研究, 并逐步推广到跨声速流动。

2) 应当开展旋转着的轴流、径流、混流叶轮中的边界层理论和实验的研究, 包括任意旋成面叶栅叶面边界层和内外机壳壁面边界层的研究, 特别是建立“分离、转捩、表面曲率和湍流”的判别准则和计算方法。

3) 简化的叶栅优化理论(单背弧流速优化)应当与C型杂交命题结合使用, 以得到更为全面的合理的结果<sup>[26]</sup>。

4) 为配合优化命题的需要, 应加强旋成面叶栅和整个叶轮内完全三元流动的反命题和各类杂交命题<sup>[7-10, 44]</sup>的研究和推广使用。

5) 考虑到大多数叶轮机实际流动的Re数都较高( $>10^5$ ), 所以, 采用第一类物理模型(无粘核心流+边界层)是比较合理和简便的。

6) 考虑到目前的最优控制理论的发展现状, 由常微分方程描述的系统的理论要比分布参数系统的理论更加成熟、可靠, 对计算机的要求也较低, 因此, 至少在现阶段, 我们应着重发展以前者为基础的叶片气动优化理论, 尽可能考虑各种可能的实际设计约束, 以充分保证最优解的现实可行性, 能直接为叶片设计的实践服务。当然, 今后随着分布参数系统最优控制论的进一步成熟, 我们也应当逐步采用它。

7) 考虑到我们已经建立了叶栅反命题和杂交命题的一系列变分原理<sup>[7]</sup>, 所以今后一个值得探讨的方向是把这些变分原理(用以代替最优化问题中的一些状态方程)直接同叶片最优化理论结合起来, 以得出最优化问题更为简洁、方便的数学表达形式。

8) 在求解叶片最优化问题时, 也可把有限元法结合进来, 其主要优点是可以避免通常求解多点边值问题的困难<sup>[45]</sup>。

9) 应当在叶片气动优化中逐步考虑到更多的实际因素, 例如把传热、传质等条件也包括进来(即增加可控手段)的优化命题<sup>[28]</sup>, 以更好地适应高温高负荷叶片的实际要求。

10) 与叶片优化理论研究配合, 应当开展相应的实验研究。

## 参 考 文 献

- 1 薛明伦, 轴流式叶轮机械的最佳气动设计问题, 中国科学院力学所研究报告(1975, 12).
- 2 谷传纲, 轴流式压气机最优流型的理论研究, 上海机械学院学报, 1(1982).
- 3 官锡芳, 最优控制问题的计算方法, 科学出版社(1979).
- 4 刘高联, 叶轮机内部气体运动的最优流型问题(1963). (未发表)
- 5 —, 可压缩绕流下平面叶栅的气动最优化理论, 上海机械学院研究报告(1982).
- 6 Liu, G.L., Aerodynamic optimization theory of a 3-D axial-flow rotor-blading via optimal control, Proc. 6th Int. Symp. on Air-Breathing Engines, June 1983, Paris.
- 7 —, Variational principles (VP<sub>s</sub>) and generalized VP<sub>s</sub> for hybrid aerodynamic problem of air-foil cascades on an arbitrary stream sheet of revolution, Pt. I, *Scientia Sinica*, 23, 10(1980); Pt. II, *Chinese J. Engng Thermophysics*, 2, 4(1981).
- 8 刘高联, 矩函数及其在旋成面叶栅反命题和杂交命题中的应用, 工程热物理学报, 3, 2(1982).
- 9 —, 陶城, 任意旋成面叶栅气动反命题及杂交命题的通用解法, 动力工程, 2(1981).
- 10 —, 旋成面叶栅一些杂交气动命题的新解法(I), 工程热物理学报(将发表).
- 11 Papailiou, K. D., Boundary layer optimization for the design of high-turning axial-flow compressor blades, *Trans. ASME, J. Engng for Power*, 93, 1(1971).
- 12 Huo, S., Blade optimization based on boundary layer concept for compressible flow, AGARD ograph No. 164(1972).
- 13 Ruzicka, M., Dosazitelne nejmensi-energeticke ztraty turbinovych lopatkovych mrizi, *Strojnický Casopis*, 13, 6(1962).
- 14 Citavy, J., 2-D compressor cascades with optimum velocity distributions over the blade, ASME Paper 74-GT-71(1974).
- 15 Sage, A.P., Optimum systems control(1968).
- 16 Leitmann, G. (ed.): Optimization techniques, AP(1962).
- 17 Ritch, P. S., Discrete optimal control with multiple constraints, (I) and (II), *Automatica*, 9, 4(1973).
- 18 Mehra, R.K., et al. A generalized gradient method for optimal control problems with inequality constraints and singular arcs, *Trans. IEEE, AC-17*, 1(1972).
- 19 Lions, J. L., Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin(1968).
- 20 Бутковский, А. Г., Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. Изд. «Наука», Москва(1965).
- 21 Pironeau, O., On optimum profiles in Stoke's flow, *J. Fluid Mech.*, 59, Pt. 1(1973).
- 22 —, On optimum design in fluid mechanics, *ibid*, 64, Pt. 1(1974).
- 23 Uher, J., Mathematicka teorie optimalniho navrhu profilu lopatkove mrize, *Strojnický Casopis*, 31, 4(1980).
- 24 Katskuni, H., Laminar wing theory of stream turbines, *Hitachi Review*, 16, 2(1967).
- 25 华耀南、陈乃兴, 平面叶栅叶型的优化设计, 第3届全国工程热物理年会宣读论文(1982, 10).
- 26 王学军, 轴流通风机叶栅叶型的优化设计研究, 东北工学院硕士论文(1983, 3).
- 27 吉永明, 平面对称低速扩压器的最优设计方法, 上海机械学院硕士论文(1980).
- 28 刘高联, 带有最优壁面吸气分布的扩压器的最优化设计方法(1982). (未发表)
- 29 Liebeck, R.H., Design of subsonic airfoils for high lift, *J. of Aircraft*, 15, 9(1978).
- 30 Smith, A.M.O., High-lift aerodynamics, *ibid*, 12, 6(1975).
- 31 Hicks, R.M., et al, Application of numerical optimization to the design of low-speed airfoils, NASA TM X-3213(March 1975).
- 32 —, Airfoil section drag reduction at transonic speeds by numerical optimization, NASA TM X-73097(Jan. 1976).
- 33 Eppler, R., Ergebnisse gemeinsamer Anwendung von Grenzschicht- und Profiltheorie, *ZFW*, 8(1960): 247-260.
- 34 Goldstein, A. W., Mager, A., Attainable circulation about airfoils in cascade, NACA Rep. 953(1960).
- 35 Payne, D., In "Gas Turbine Blading Design", Symp. at Borough Polytechnic(1970).
- 36 Dunham, L., A parametric method of turbine blade profile design, ASME Paper 74-GT-119(1974).
- 37 LeFoll, J., A theory of representation of the properties of boundary layer on a plane, Proc.

- Seminar "Advanced Problems in Turbomachinery", von Karman Institute for Fluid Dynamics (1965).
- 38 Черный, Г. Г., Режимы наибольшей работы ступени лопаточной машины, Сборник «Теоретическая Гидромеханика», №. 11, М. Оборонгиз (1953): 115—151.
  - 39 —, Режим наибольшей работы ступени без направляющего аппарата на входе в рабочее колесо и с ограниченной скоростью на выходе из него, Сборник «Теоретическая Гидромеханика», №. 19, М. Оборонгиз (1956): 137—146.
  - 40 Frith, D. A., Design of blade sections for axial-flow compressors, Proc. 2nd Int. Symp. on Air-Breathing Engines (1974).
  - 41 Beightler, C. S., Phillips, D. T., Wilde, D. J., Foundations of Optimization (2nd ed.), Prentice-Hall (1979).
  - 42 姚福生, 汽轮机通流部分最佳参数选择方法的探讨, 机械工程学报, 2 (1979)
  - 43 刘高联, 平面叶栅气动最优理论的进展, 上海力学学会专题讲座 (1979, 9).
  - 44 —, 旋转叶轮中完全三元气动力学杂交命题及其通用解法 (I), 上海机械学院研究札记 (1982, 11).
  - 45 Nakamichi, J., et al, Application of the finite element method to an optimal control problem, *Int. J. Numerical Methods in Engng*, 12, 10 (1978): 1559—1575.
  - 46 刘高联, 平面叶栅气动设计的最优化理论 (一), (二), 东方汽轮机, 总第9期 (1977); 或: 力学学报, 4 (1980); 2 (1982).
  - 47 —, 王甲升, 叶轮机械气体动力学基础, 机械工业出版社 (1980).
  - 48 Бойко, А. В., Говорущенко, Ю. Н., Определение оптимальных параметров группы турбинных ступеней, Энергомашиностроение, 9 (1978).
  - 49 —, и др., Метод оптимального проектирования осевой турбинной ступени, Теплоэнергетика, 4 (1977).
  - 50 邹滋祥, 任意回转面上可压缩流动透平叶栅壁面最佳流速分布的计算方法, 工程热物理学报, 4 (1980).
  - 51 Бойко, А. В., и др., Проектирование дозвуковых турбинных профилей оптимальной аэродинамической формы, Теплоэнергетика, 7 (1978).
  - 52 —, и др., Создание и экспериментальное исследование новых аэродинамически совершенных дозвуковых турбинных профилей, Изв. вузов энергетика, 4 (1981).
  - 53 Шубенко-Шубин, Л. А., и др., О проектировании лопаточного аппарата оптимальной формы для энергетических тепловых турбин, Энергомашиностроение, 8 (1981).
  - 54 —, и др., Оптимальное проектирование последней ступени мощных паровых турбин, Научная Думка (1980).
  - 55 —, и др., Аналитический метод проектирования решеток профилей турбомашин, Энергомашиностроение, 1 (1973).
  - 56 Мамаев, Б. И., и др., Построение решетки турбинных профилей методом доминирующей кривизны, Теплоэнергетика, 2 (1979).
  - 57 周盛、林保真、沈孟育, 轴流式叶轮机械中的跨音流动(下), 北京航空学院科学研究报告, ВН-В865 (1982.6).
  - 58 龚增锦、张天松, 跨音速叶栅的造型、气动计算与优化初步 (一), 中国工程热物理学会会议资料 (1981, 5).
  - 59 Венедиктов, В. Д., и др., Исследование трансзвуковых турбинных решеток и возможности их оптимизации численным методом, Теплоэнергетика, 4 (1981).
  - 60 刘高联, 扩压式平面叶栅稠度的优选公式, 透平压缩机, 1 (1979).
  - 61 透平的控制旋涡设计, 叶轮机械气动热力计算、设计与试验经验交流会文集 (1977, 1).
  - 62 席少霖、赵凤治, 最优化计算方法, 东方汽轮机厂七·二一大学印 (1978, 4).
  - 63 吴宝仁编译, 用高次多项式设计空动性能完善的亚音速透平叶栅的叶型, 东方汽轮机厂工作报告 (1982, 6).
  - 64 吴宝仁, 一本《大功率汽轮机末级的优化设计》的新书, 动力工程, 2 (1983).
  - 65 Шубенко-Шубин, Л. А., и др., Аналитический метод оптимизации параметров последней ступени при минимуме потерь энергии с выходной скоростью, Теплоэнергетика, 7 (1976).
  - 66 —, и др., Оптимизация кинематических характеристик пространственного потока в последних ступенях мощных паровых турбин, Энергомашиностроение, 5 (1977).
  - 67 —, и др., Об использовании методов нелинейного программирования для оптимизации характеристик в осевых зазорах ступеней турбомашин, Пробл. машиностр., 7 (1978).
  - 68 —, и др., Аналитический метод проектирования длинных рабочих лопаток турбомашин, Энергомашиностроение, 5 (1973).
  - 69 Федоров, А. В., Об оптимальном течении газа в осевых зазорах турбомашин, Ж. техн. физ., 8 (1981).
  - 70 Бойко, А. В., и др., Оптимальные законы закрутки турбинной ступени с учетом протечек,

- Теплоэнергетика, 1 (1982).
- 71 —, Оптимальное проектирование проточной части осевых турбин, Изд. «Вища Шк.», Хариков (1982).
- 72 Индурский, М. С., Оптимизация параметров последней ступени паровой турбины с учетом работы на переменных режимах, Теплоэнергетика, 3 (1979).
- 73 Стоянов, Ф. А., и др., Исследование влияния потерь в турбинной ступени на оптимальное распределение характеристик в ее межвенцовых зазорах, Пробл. машиностр., 12 (1980).

## PROGRESS IN AERODYNAMIC OPTIMIZATION THEORY OF TURBOMACHINE BLADING

Wu Bao ren

(Zhejiang Yinxian General Machinery Works)

Liu Gao-lian

(Shanghai Institute of Mechanical Engineering)

### 《力学进展》1983年第13卷更正

期	页	行	误	正
2	封二	倒 9	杨海星	杨海兴
2	217	左倒15	一引	一些
2	217	左倒14	冻些	冻引
3	312	倒 2	V.3	V.2
3	312	倒 1	V.2	V.3
4	395	10	贡截	贡献
4	520	倒 1	杨海星	杨海兴
4	521	13	稳性	稳定性
4	522	倒 2	485	475
4	448	公式(12)第2式的 $F(\alpha, s)$ 改为 $G(\alpha, s)$		
4	封三	倒12—11两行与倒10—9两行英文位置互换, 页码不变		