

流与接触；寻求学科之间的渗透，目前在多刚体系统和振动方面取得的成果，要归功于力学方法与控制技术的结合，稳定性理论则是力学、信息论、控制论和数学（微分方程定性理论）共同努力的结果；制定若干年的科研计划，使科研人员能纵览全局；注意在科研手段使用方面的灵活性。

（上海交通大学 刘延柱译）

在微观结构基础上骨的粘弹性性能分析

T. Gottesman Z. Hashin

引言

晚近，骨结构的清晰图象已经得到。密质骨是复合材料，它由骨单位、间质系统和把二者粘结在一起的有机粘弹性粘结物质所组成。Ascenzi, Bonucci (1967) (1972) 首次将骨单位分离出来；之后，Frasca 等 (1976) 用改进了的技术又作了分离。骨单位为空心柱体 (图 1)，它由胶原纤维及羟磷灰石晶体构成。

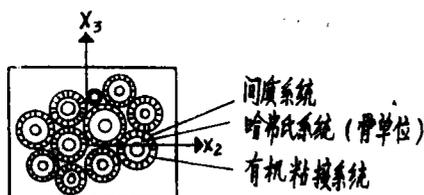


图 1 皮质骨横截面示意图

胶原分子为长链结构，它们排列成称为胶原纤维的三重长螺旋线。羟磷灰石是晶状的各向异性材料。它在胶原纤维上结晶，共同构成坚实的胶原-羟磷灰石纤维。这些纤维排列成平行于骨的轴线的同心板层 (Bloom 和 Fawcett 1962)，这些板层之间的空间由羟磷灰石填充。许多此种同心板层围绕 Havers 管形成一个骨单位。过去认为骨由羟磷灰石纤维构成并用胶原粘结的概念是不适当的，因为

胶原不是各向同性材料，而是方向性很强的材料，羟磷灰石则需要胶原纤维在其上结晶。胶原纤维是粘弹性的 (Fung 1968)，而羟磷灰石晶体是弹性的 (Katz 和 Ukraincik 1971)。由于每个粘弹性胶原纤维埋置在弹性的羟磷灰石晶体里，因而认为骨单位具有弹性性能是合乎逻辑的，但在更恰当模型中，必须考虑骨单位稍具粘弹性性能。

Swedlow 等 (1975) 得到关于骨单位结构的清晰的电子显微镜照片。Yoon 和 Katz (1976) 证明这样的结构可考虑为横向各向同性的。

间质系统也由板层组成，然而，这里的板层不是同心的，它们具有不同的大小和形状。宏观上可认为间质系统类似于变截面的纤维。它们在骨中的相对体积约为骨单位中的相对体积的 0.25 倍。

有机粘结材料已知是粘弹性的，由粘多糖构成；其精确的力学性质至今还不知道，因为它在分离过程中会分解。这些性质的量级可由其他组织分离而得到透明质酸的已知性质估计。骨中基体的相对体积很小，小于 1%。

以往将骨描述为复合材料的著作由 Lakes 和 Katz (1974) 给出。现有的模型均未考虑骨的如近几年实验所描述的那样的实际详细结构。最后这种模型，本文已列表。Katz 和 Ukrainci (1972) 考虑到骨的复合结构，但未顾及其粘弹性性能，

骨的微观力学模型

骨可认为是二相的纤维增强复合材料。一相为粘弹性粘结材料，另一相为骨单位。在固体力学的常用术语中，这样的粘结材料称为基体，下面，我们在力学的意义上使用基体这个术语。

正如引言所述，骨是由有机粘结基体、骨单位和间质系统所构成的。估计间质系统对骨的力学性质的作用很困难，因为就作者所知，间质系统至今尚未分离出来，其性质更未测试。类似于骨单位板层的一些板层构成间质系统，但是它们的排列是不同的。本文假定：模型中骨单位的相对体积 = 骨中骨单位的相对体积 + 骨中间质系统的相对体积，即把间质系统作为骨单位来处理。

骨单位是空心的，并假定由弹性各向同性均质材料构成。假定骨单位随机地排列，因此，宏观上可认为骨是横向各向同性的。骨单位半径是可变的，其内外径之比 (a/b) (见图 2) 假定为常数。

这个假设考虑在生长过程中，内部的 Havers 管和骨单位的结构物质一起生长；且该假设与皮质骨横切片的许多电子显微镜照片的观察是一致的 (Swedlow 等 1975)。

粘弹性粘结基体假定为各向同性，剪切时具有牛顿流体的性能，在静水压力下是弹性的。选择这个模型是因为它最简单，受剪切时呈现率相关的性能，在静水压力下具有率无关的性能，上述特点是大多数粘弹性材料所具有的典型性能。

力学分析

由于骨是由骨单位和粘结基体构成的，故可采用纤维增强材料的理论进行分析。如图 1 所示以及如 Yoon 和 Katz (1976) 用超声波的传播所显示，骨中的骨单位是随机分布的，骨对称于 x_3 轴，因此，骨是横向各向同性的材料。为了从力学观点表征这样的材料，需要选择 5 个弹性常数 E_A , ν_A , k , G_A 和 G_T 。

假定骨是统计上均质的，所以，复合材料的等效弹性模量定义为平均应力与平均应变相关的应力-应变关系。表征骨的等效弹性常数为 E_A^* , ν_A^* , k^* , G_A^* 和 G_T^* 。

横向各向同性材料的等效应力-应变关系为：

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\bar{\sigma}_{11}}{E_A^*} - \frac{\nu_A^*}{E_A^*} \bar{\sigma}_{22} - \frac{\nu_A^*}{E_A^*} \bar{\sigma}_{33} \quad (1)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22} = -\frac{\nu_A^*}{E_A^*} \bar{\sigma}_{11} + \frac{1}{E_T^*} \bar{\sigma}_{22} - \frac{\nu_T^*}{E_T^*} \bar{\sigma}_{33} \quad (2)$$

$$\bar{\varepsilon}_{33} = -\frac{\nu_A^*}{E_A^*} \bar{\sigma}_{11} - \frac{\nu_T^*}{E_T^*} \bar{\sigma}_{22} + \frac{1}{E_T^*} \bar{\sigma}_{33} \quad (3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2G_A^*} \bar{\sigma}_{12} \quad (4)$$

$$\bar{\varepsilon}_{13} = \frac{1}{2G_A^*} \bar{\sigma}_{13} \quad (5)$$

$$\bar{\varepsilon}_{23} = \frac{1}{2G_T^*} \bar{\sigma}_{23} \quad (6)$$

在上述应力应变关系中出现 6 个弹性常数, 这些常数的物理意义如下: E_A^* 为 x_1 方向简单拉伸时的等效轴向杨氏模量, 定义为 $\bar{\sigma}_{11}/\bar{\varepsilon}_{11}$; E_T^* 为 x_2 或 x_3 方向简单拉伸时的等效横向杨氏模量, 定义为 $\bar{\sigma}_{22}/\bar{\varepsilon}_{22}$ (或 $\bar{\sigma}_{33}/\bar{\varepsilon}_{33}$); ν_A^* 为 x_1 方向拉伸时的等效轴向泊松比, 定义为 $\bar{\varepsilon}_{22}/\bar{\varepsilon}_{11}$; ν_T^* 为 x_2 方向拉伸时的等效泊松比, 定义为 $-\bar{\varepsilon}_{11}/\bar{\varepsilon}_{22}$; G_A^* , G_T^* 分别为等效轴向和横向剪切模量, 分别定义为纯轴向和纯横向剪切时平均应变与平均应力之比。

为表征横向各向同性材料, 在上面列举的 6 个弹性常数中仅有 5 个是必需的。可以证明, E_T^* 和 ν_T^* 是 E_A^* , ν_A^* , G_T^* 和 k^* 的函数, 这里 k^* 是等效横向体积模量, 定义为平均应力的各向同性部分与平均应变的各向同性部分之比:

$$\bar{\sigma} = 2k^*\bar{\varepsilon}, \quad \bar{\sigma} = (1/2)(\bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33})$$

$$E_T^* = \frac{4k^*G_T^*}{k^* + mG_T^*} \quad (7)$$

$$\nu_T^* = \frac{k^* - mG_T^*}{k^* + mG_T^*} \quad (8)$$

其中 $m = 1 + \frac{4k^*\nu_A^{*2}}{E_A^*}$ 。

使用 k^* 较使用 E_T^* 和 ν_T^* 更方便, 因为它更易于计算。Hashin (1977) 给出了纤维增强材料的应力-应变关系的详细分析。

为了计算骨的等效弹性性质, 用 Hashin 和 Rosen (1964) 引进的复合柱体群来描述

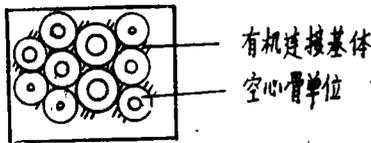


图 2 假设模型的横截面

骨。选择复合柱体群是因为两者的几何相似性 (见图 2, 3) 以及有可能将等效弹性模量作为柱体群所呈现的相性质的函数进行分析计算。所得结果与特殊的几何形状无关, 而只取决于基体和纤维的相对体积之比; 且所得结果与实验和数值计算吻合。

在复合材料理论的术语里, 纤维用于结构元素而基体用于周围的连续介质。将骨当作复合的纤维增强材料, 则纤维即为骨单位, 而基体为粘结物质。下标 f 和 m 通常分别表示纤维和基体。就骨而言, 用 o 代替 f 表示骨单位, m 表示粘结材料 (或基体)。

柱体群的弹性分析已在别处给出 (Hashin 和 Rosen 1964; Hashin 1972)。本文仅描述了柱体群的等效弹性模量的模型和结果。柱体群的结构如下: 每个复合柱体包含一个圆柱形的纤维和一个同心的基体壳。在第 n 个复合柱体中, 纤维半径是 a_n , 复合柱体半径为 b_n 。在所有复合柱体中, 比值 a_n/b_n 是相同的, 且柱体高均为 H 。如今, 用不重叠的复合柱体, 将高为 H , 横截面为 A 的柱体样品渐渐填满。由于复合柱体所有尺寸都被认为是可以得到, 因此, 在极限情况下, 样品体积 V 全部由不重叠的复合柱体所构成 (图 3)。

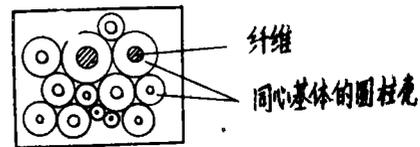


图 3 组合的复合材料圆柱壳的横截面

可以证明, 整个柱体群的 4 个等效弹性模量 E_A^* , ν_A^* , k^* 和 G_A^* 是与一个复合柱体相应的

等效弹性模量相等的,而这一事实使得有可能计算这些弹性模量.柱体群的等效弹性模量为:

$$E_A^* = E_m \nu_m + E_f \nu_f + 4(\nu_f - \nu_m)^2 \nu_f \nu_m / \left(\frac{\nu_m}{k_f} + \frac{\nu_f}{k_m} + \frac{1}{G_m} \right) \quad (9)$$

$$\nu_A^* = \nu_m \nu_m + \nu_f \nu_f + (\nu_f - \nu_m) \left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_f} \right) \nu_m \nu_f / \left(\frac{\nu_m}{k_f} + \frac{\nu_f}{k_m} + \frac{1}{G_m} \right) \quad (10)$$

$$k^* = \frac{k_m(k_f + G_m)\nu_m + k_f(k_m + G_m)\nu_f}{(k_f + G_m)\nu_m + (k_m + G_m)\nu_f} \quad (11)$$

$$G_A^* = G_m \frac{G_m \nu_m + G_f(1 + \nu_f)}{G_m(1 + \nu_f) + G_f \nu_m} \quad (12)$$

从这个模型不能解析地计算 G_T^* . 只可能得到 G_T^* 的上下界,由 Hashin 和 Rosen (1964) 以及 Hashin (1965) 用弹性变分原理导出:

$$G_T^*(-) \leq G_T^* \leq G_T^*(+) \quad (13)$$

$$G_T^*(+) = G_m \frac{(1 + \alpha \nu_f^2)(\rho + \beta_1 \nu_f) - 3\nu_f \nu_m^2 \beta_1^2}{(1 + \alpha \nu_f^2)(\rho - \nu_f) - 3\nu_f \nu_m^2 \beta_1^2}$$

$$\alpha = \frac{\beta_1 - \gamma \beta_2}{1 + \gamma \beta_2}, \quad \gamma = \frac{G_f}{G_m}, \quad \rho = \frac{\gamma + \beta_1}{\gamma - 1}$$

$$G_T^*(-) = G_m + \nu_f / \left[\frac{1}{G_f - G_m} + \frac{(k_m + 2G_m)\nu_m}{2G_m(k_m + G_m)} \right]$$

$$\beta_1 = \frac{1}{3 - 4\nu_1}, \quad \beta_2 = \frac{1}{3 - 4\nu_2}$$

下面,将下界用作 G_T^* 的近似值: $G_T^* \cong G_T^*(-)$.

空心骨单位作为复合的骨材料的纤维部分来处理,因此,需要知道这些复合材料的力学性质.空心骨单位是轴对称的,表征其特征需要 5 个常数 E'_{A_o} , ν'_{A_o} , G'_{A_o} , k'_o 和 G'_{T_o} . 换言之,骨单位可用具有相同弹性常数的等价的横向各向同性的纤维予以替换.符号 o 表示骨单位,撇号指与骨单位的等价性质.我们希望将骨单位的等价性质表达为构成骨单位的材料的性质的函数.如模型中所假设的,骨单位材料是弹性的、各向同性的,其弹性常数为 E_o , k_o , G_o , ν_o . 其中只有两个模量是独立的.骨单位本身是圆柱体.柱心是空的柱体,它相对于骨单位的体积比为 ν ,其弹性模量为零.在此情况下,圆筒壁的材料起着基体的作用.将下式代入方程(9)~(12),

$$E_f = G_f = \nu_f = k_f = 0 \quad (14)$$

$$E_m = E_o; \quad G_m = G_o; \quad \nu_m = \nu_o; \quad k_m = k_o \quad (15)$$

我们得到骨单位的等价弹性模量的表达式为:

$$k'_o = \frac{k_o G_o (1 - \nu)}{G_o + \nu k_o} \quad (16)$$

$$E'_{A_o} = E_o (1 - \nu) \quad (17)$$

$$\nu'_{A_o} = \nu_o \quad (18)$$

$$G'_{A_o} = G_o \frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)} \quad (19)$$

精确计算等效横向剪切模量 G'_T 是不可能的。对于复合纤维材料的 G_T ，只存在上、下界。当基体比纤维密度大时，Hashin (1972) 给出了上、下界。设 G'_T 处于上、下界之间，为计算简便起见，选上界为近似值。

$$G'_{T_o} = G_{T_o}(+) = G_o + \frac{1 - \nu_o}{G_o + 2G_o(k_o + G_o)} \nu_o \quad (20)$$

骨单位的等价模量的实验资料是可以得到的 (Ascenzi 和 Bonucci 1967, 1972)，所以，用 E'_{1o} 、 k'_o 、 G'_{1o} 、 G'_{T_o} 和 ν'_o 置换由方程 (9) — (13) 给出的骨的等效弹性模量 E_f 、 k_f 、 G_{Af} 、 G_{Tf} 和 ν_f 。

本文将骨当作由弹性纤维 (骨单位) 和线性粘弹性有机粘结材料组成的复合纤维。为了表征粘弹性材料，其松弛函数和蠕变函数必须知道。松弛函数是对应变的 Heaviside 阶梯函数的响应，而蠕变函数是对应力的 Heaviside 阶梯函数的响应：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^0 H(t) \\ \sigma_{ij}(t) &= C_{ijkl}(t) \varepsilon_{ij}^0 \end{aligned} \right\} \text{松弛}; \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^0 H(t) \\ \varepsilon_{ij}(t) &= S_{ijkl}(t) \sigma_{ij}^0 \end{aligned} \right\} \text{蠕变} \quad (21)$$

松弛和蠕变张量 C_{ijkl} 和 S_{ijkl} 是互相关联的。借助于松弛和蠕变函数，有可能描述材料对任何应力或应变的响应。

本文旨在将骨的松弛和蠕变函数作为多相性质函数来计算。为了完整起见，得到了相应的应力-应变微分方程和流变模型。

由于骨具有横向各向同性的对称性，故可用 5 个松弛函数或 5 个蠕变函数来表征其特性。为了计算这些函数，要用对应原理 (Correspondence Principle)。直接联系于复合材料的等效弹性和粘弹性性质的对应原理是 Hashin (1965, 1966) 发展的。下面将对二相材料 (一相是弹性，另一相是粘弹性) 的特殊情况对对应原理加以解释。这个原理是带普遍性的，它对于任何相数的材料均适用。

现在考虑一种二相复合材料，相 (1) 为粘弹性，相 (2) 为弹性。对于由二个弹性相组成的类似的材料，假设这种复合材料的弹性模数张量 \mathbf{C}^* 就是通常听说的相性质 $\mathbf{C}^{(1)}$ 、 $\mathbf{C}^{(2)}$ 和几何形状 $[g]$ 的函数

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{f}(\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(2)}, [g]) \quad (24)$$

当相 (1) 为粘弹性时，

$$p \hat{\mathbf{C}}^*(p) = \mathbf{f}(p \hat{\mathbf{C}}^{(1)}(p), \mathbf{C}^{(2)}, [g]) \quad (25)$$

即随着 $p \hat{\mathbf{C}}^{(1)}(p)$ 置换 $\mathbf{C}^{(1)}$ ， p 乘以松弛张量的拉氏变换与相性质函数相同； p 乘粘弹性相松弛张量的拉氏变换称为变换域 (T.D.) 模量。利用上述原理和方程 (9)，(11) — (13)，骨模型变换域模量为下列形式：

$$\hat{p}k^*(p) = \frac{pk_m(k'_o + p\hat{G}_m)\nu_m + k'_o(p\hat{k}_m + p\hat{G}_m)\nu_f}{(k'_o + p\hat{G}_m)\nu_m + (p\hat{k}_m + p\hat{G}_m)\nu_f} \quad (26)$$

$$p\hat{E}_A^*(p) = p\hat{E}_m\nu_m + E'_o\nu_f + \frac{4[\nu_o - \nu_m(p)]^2\nu_m\nu_f}{\nu_m/k'_o + \nu_f/p\hat{k}_m + 1/p\hat{G}_m} \quad (27)$$

$$p\hat{G}_A^*(p) = p\hat{G}_m \frac{p\hat{G}_m\nu_m + G'_0(1+\nu_f)}{p\hat{G}_m(1+\nu_f) + \hat{G}'\nu_m} \quad (28)$$

$$p\hat{G}_I^*(p) = p\hat{G}_m(1+\nu_f) / \left[\frac{p\hat{G}_m}{G'_0 - p\hat{G}_m} + \frac{\nu_m}{1 + [3 - 4\nu_m(p)]} \right] \quad (29)$$

其中变换域泊松比 $\nu_m(p)$ 的定义在形式上与弹性相类似:

$$\nu_m(p) = -\frac{\hat{\varepsilon}_{22}(p)}{\hat{\varepsilon}_{11}(p)} = -\frac{\hat{\varepsilon}_{33}(p)}{\hat{\varepsilon}_{11}(p)} = \frac{3\hat{K}(p) - 2\hat{G}p}{2[3\hat{K}(p) + \hat{G}(p)]} \quad (30)$$

$p\hat{K}_m(p)$, $p\hat{G}_m(p)$, $p\hat{E}_m(p)$ 为有机粘结基体的松弛模量, 借助于微观力学模型假设可对其进行计算。式中 $\hat{K}(p)$ 为三维体积松弛模量 $K(t)$ 的拉氏变换。

由于粘结基体假设为可压缩的牛顿流体, 其本构方程是:

$$s_{ij} = 2\eta_n \dot{e}_{ij} \quad (31)$$

$$\sigma_{kk} = 3K \varepsilon_{kk} \quad (32)$$

式中 s_{ij} 和 e_{ij} 分别为应力偏量和应变偏量。这些方程描述这样的材料: 剪切时呈粘性而三向均匀受压(isotropic stressing)时呈弹性。变换域模量 $p\hat{K}_m$ 和 $p\hat{G}_m$ 可直接从方程(31)和(32)得到:

$$p\hat{K}_m = K_m \quad (33)$$

$$p\hat{G}_m = p\eta_n \quad (34)$$

其他变换域松弛模量可通过各向同性材料各模量之间的关系得到:

$$p\hat{E}_m = 9K_m\eta_n p / (3K_m + \eta_n p) \quad (35)$$

$$\nu_m(p) = (3K_m - 2\eta_n p) / [2(3K_m + \eta_n p)] \quad (36)$$

一旦松弛函数已知, 即可得到蠕变函数。可以证明, 对于线性粘弹性材料, 变换域松弛张量和变换域蠕变张量之间的关系为

$$p^2 C_{ijkl}(p) S_{klmn}(p) = I_{ijmn} \quad (37)$$

我们只计算三个具有重要物理意义的蠕变函数: 受轴向剪切时的蠕变函数 $g_A^*(t)$, 受横向剪切时的蠕变函数 $g_T^*(t)$ 和受非轴向拉伸时的蠕变函数 $e_A^*(t)$ 。对于这三种特殊情况, 方程(37)变为

$$p^2 \hat{E}_A^*(p) \hat{e}_A^*(p) = 1 \quad (38)$$

$$p^2 \hat{G}_A^*(p) \hat{g}_A^*(p) = 1 \quad (39)$$

$$p^2 \hat{G}_T^*(p) \hat{g}_T^*(p) = 1 \quad (40)$$

$\hat{E}_A^*(p)$, $\hat{G}_A^*(p)$ 和 $\hat{G}_T^*(p)$ 可从方程(27) — (29) 得到。与时间相关的蠕变函数通过变换域蠕变函数求逆得到。式中只有 $g_T^*(t)$ 仍为近似值。

至此,使用了粘弹性基体是可压缩牛顿流体的假设。为了将松弛函数和蠕变函数作为时间的函数来计算,必须对基体作特殊流变模型假设;不过,应用 Abel-Tauber 定理,仅仅计算多相材料初始和最终的性质,可以取消这个假设。在计算复合材料的初始和最终性质时使用 Abel-Tauber 定理的详细分析由 Hashin (1966, 1972) 给出。这些定理陈述如下:如果 $\hat{\phi}(p)$ 为函数 $\phi(t)$ 的拉氏变换,且极限存在,那么

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \hat{\phi}(p) = \phi(0), \quad \lim_{p \rightarrow 0} p \hat{\phi}(p) = \phi(\infty)$$

对于粘结基体作如下假设:

$$G_m(0) \geq G_m(t) \geq G_m(\infty) \quad (41)$$

$$G_m(\infty) \ll K_m \quad (42)$$

$$K_m(0) \approx K_m(\infty) = K_m \quad (43)$$

这些假设对于每种典型的粘弹性材料是合理的(先前已述及的很简单的流变模型)。

借助于各向同性材料各常数之间的关系,可得到基体的其他初始和最终性质:

$$E_m(0) = \frac{9K_m G_m(0)}{3K_m + G_m(0)} \quad (44)$$

$$E_m(\infty) = 3G_m(\infty) \quad (45)$$

$$\nu_m(\infty) = \frac{1}{2} \quad (46)$$

$$k_m(0) = K_m - \frac{1}{3} G_m(0) \quad (47)$$

$$k_m(\infty) = K_m \quad (48)$$

结果

得到的松弛函数为:

$$k^*(t) = \frac{(v_f k'_o + v_m k'_m)(k'_o v_m + k'_m v_f) - k'_m k'_o}{k'_o v_m + k'_m v_f} \exp\{-[(k'_o v_f + k'_m v_m)/\eta]t\} + \frac{k'_m k'_o}{k'_o v_m + k'_m v_f} \quad (49)$$

$$E_A^*(t) = E'_o v_f + 9k'_m v_m \exp[-3(k'_m/\eta_m)t] \quad (50)$$

在 $E_A^*(t)$ 的表达式中,第二项随时间 t 按指数幂衰减,且 $v_f \gg v_m$, $E'_o > k'_m$, 故骨在拉伸时具有弹性性质,因此,骨单位具有控制作用,所以,

$$E_A^*(t) \approx E'_o v_f \quad (51)$$

$$G_A^*(t) = G'_{A_o} \left[1 + \frac{v_m^2}{(1 + v_m)^2} \right] \exp\{-[G'_{A_o} v_m / \eta_m (1 + v_f)]t\} + \frac{\eta_m v_m}{1 + v} \delta(t) \quad (52)$$

$$G_T^*(t) = A_{GT} e^{\gamma_1 t} - B_{GT} e^{\gamma_2 t} + \frac{\delta(t)}{(8 - 7v_m)\eta_m} \quad (53)$$

式中

$$A_{GT}, B_{GT} = \frac{1}{(8-7\nu_m)(y_2-y_1)} \left[\eta_m \nu_m y_{2,1}^2 + (7\nu_m G'_{To} + 3k_m \nu_m + 8 - 8\nu_m) y_{2,1} \right. \\ \left. + \frac{3G'_{To} k_m (2-\nu_m)}{\eta_m} \right] \\ y_{1,2} = \frac{1}{8\eta_m} \left[-(16k_m + 7\nu_m G'_{To}) \pm \sqrt{36k_m^2 + 49\nu_m^2 G'_{To}{}^2 - 12\nu_m G'_{To} k_m} \right]$$

由于 $\delta(t)$ 项出现于松弛函数之中, 故如表 1 所示, 对于轴向和横向剪切, 在相应的流变模型中要串联一个阻尼器。这是因为对基体选择了十分简单的流变模型之故。正如所见, 基体的粘弹性对骨的 $G_A^*(t)$ 和 $G_T^*(t)$ 具有重要作用;

$$v_A^*(t) = - \frac{A v e^{-\alpha v t} + v_{\infty} + 2v_0 v_f}{E v e^{-\alpha v t} + 1} \quad (54)$$

式中

$$A_v = \frac{-3V_m(E'_o v_f + 3k_m \nu_m + 3k_m \nu_m v_f)}{2(9k_m \nu_m + E'_o v_f)} \\ B_v = \frac{-9k_m \nu_m}{9k_m \nu_m + E'_o v_f}, \quad \alpha_v = \frac{3k_m E'_o v_f}{(9k_m \nu_m + E'_o v_f)\eta_m}$$

得到的蠕变函数为

$$e_A^*(t) = \frac{1}{E'_o v_f} - \frac{9k_m \nu_m}{E'_o v_f (9k_m \nu_m + E'_o v_f)} \exp\{-[3k_m E'_o v_f (9k_m \nu_m + E'_o v_f)\eta_m]t\} \quad (55)$$

略去时间相关部分 (正如前面所假设的 $E'_o v_f \gg 9k_m \nu_m$),

$$e_A^*(t) \approx \frac{1}{E'_o v_f} \approx \frac{1}{E_A^*}$$

上式显示了弹性性质;

$$g_A^*(t) = \frac{1}{G'_{Ao}} \left[\frac{\nu_m^2}{(1+\nu_f)^2} - 1 \right] \exp\{-[G'_{Ao}(1+\nu_f)\eta v]t\} \\ + \frac{1}{G'_{Ao}} \left[1 - \frac{\nu_m^2}{(1+\nu_f)^2} \right] + \frac{\nu_m}{\eta_m(1+\nu_f)} \quad (56)$$

$$g_T^*(t) = A e^{x_1 t} + B e^{x_2 t} + C + Dt \quad (57)$$

式中

$$A, B = - \frac{1}{x_2 - x_1} \left[8\eta_m^2 \nu_m + \frac{1}{x_{1,2}} \eta_m^2 \nu_m (6k_m + 7\nu_m G'_{To}) \right. \\ \left. + \frac{1}{x_{1,2}^2} 3\eta_m^2 \nu_m^2 k_m G'_{To} \right] \\ C = \eta_m^2 \nu_m (6k_m + 7\nu_m G'_{To}) \frac{1}{x_2 x_1} + 3\eta_m^2 \nu_m k_m G'_{To} \frac{x_2 + x_1}{x_2^2 x_1^2} \\ D = \frac{3\eta_m^2 \nu_m^2 k_m G'_{To}}{(x_2 - x_1)x_2 x_1}$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{\eta_m \nu_m} (7 \nu_m G'_{10} + 8) \pm \sqrt{-\frac{1}{\eta_m \nu_m^2} (7 \nu_m G'_{10} + 8)^2 - 4 \frac{6 G'_{10} k_m}{\eta_m \nu_m}}$$

从 $G_A^*(t)$ 和 $G_I^*(t)$ 的形式可以预期 $g_A^*(t)$, $g_I^*(t)$ 与时间线性相关, 它也源出于粘结材料所假设的性质。

相应的微积分形式的应力-应变关系和流变模型示于表 1。

表 1

加载条件	微分应力-应变关系	流变模型
x_1, x_2 平面的压力	$[\eta_m D + (k'_m \nu_m + k_m \nu_f)] \sigma_{11} =$ $= 3[(k_m \eta_m \nu_m + k'_m \eta_m \nu_f) D + \nu_m k'_m] \epsilon_{11}$	
轴向拉伸	$\sigma_{11} = L \frac{9 k_m \eta_m D}{3 \nu_m + \eta_m D + \nu_m \nu_f} \epsilon_{11}$	
轴向剪切	$[\eta_m (1 + \nu_f) D + G'_{A0} \nu_m] \sigma_{12} =$ $[2 \eta_m^2 \nu_m D^2 + 2 \eta_m G'_{A0} (1 + \nu_f) D] \epsilon_{12}$	
横向剪切	$[\eta_m (8 - 7 \nu_m) D^2 + \eta_m (6 k_m + 7 \nu_m G'_{10} - 3 k_m \nu_m) D$ $+ 3 \nu_m G'_{10} k_m] \sigma_{23} = [2 \eta_m^2 (8 - 7 \nu_m - 8 \nu_f) D^3$ $+ 2 \eta_m^2 (6 k_m + 7 \nu_m G'_{10} - 3 k_m \nu_m) D^2 +$ $+ 2 \eta_m (3 k_m G'_{10} \nu_m + 8 \eta_m G'_{10} k_m) D] \epsilon_{23}$	

如果不假设任何特殊的流变模型以及不应用 Abel-Tauber 定理, 也可得到 $t = 0$ 及 $t = \infty$ 时骨的等效性质, 其结果是:

$$k^*(0) = \frac{k(0)[k_o + G_m(0)]\nu_m + k_o[k_m(0) + G_m(0)]\nu_f}{[k_o + G_m(0)]\nu_m + [k_m(0) + G_m(0)]\nu_f} \quad (58)$$

$$k^*(\infty) = \frac{k_o k_m}{k_m \nu_f + k_o \nu_m} \quad (59)$$

可以观察到 k^* 减小, 但 $k^*(\infty)$ 不为零。减小量取决于 k_m 与 G_m 之比。如果 $G_m(0)$ 比 k_m 小得多, 可略去 k^* 的时间相关部分。轴向拉伸时, 有

$$E_A^*(0) = E(0)\nu_m + E'_o \nu_f \approx E'_o \quad (60)$$

$$E_A^*(\infty) = E(\infty)\nu_m + E'_o \nu_f = 3G_m(\infty)\nu_m + E'_o \nu_f = E'_o \nu_f \quad (61)$$

再强调一次, 当假设骨单位为弹性时, E_A^* 的时间相关部分是可以忽略的。剪切时的情况有所不同,

$$G_A^*(0) = G_m(0) \frac{G_o(1 + \nu_f) + G_m(0)\nu_m}{G_o \nu_m + G_m(0)(1 + \nu_o)} \approx G_m(0) \frac{1 + \nu_f}{\nu_m} \quad (62)$$

$$G_A^*(\infty) = G_m(\infty) \frac{1 + \nu_f}{\nu_m} \quad (63)$$

$G_m(t)$ 随时间显著减小, $G_A^*(t)$ 亦如此。剪切时骨的性能类似于粘弹性基体的上述特性, 对基体不假设任何特殊模型, 这个特点也能看得十分清楚。

讨论和结论

骨的粘弹性性能的分析是建立在复合柱体群这一模型的基础上的, 而这又是最初为研制纤维复合材料提出的。

在骨单位性质和粘结材料粘性性质的基础上, 得到了横向各向同性骨的 5 个松弛模量和 5 个蠕变柔度。

Berme 等 (1977) 发表了新的实验方法, 用以确定作为横向各向同性材料的骨的 5 个弹性模量, 他用的是牛的 Havers 股骨。对人的皮质骨也建立了类似的方法。通过测量骨单位的力学性质, 在粘弹性效应开始之前, 模型可以检验零时间性能。

为了比较本文的模型和以往的模型, 必须测量骨单位和骨的 5 个弹性模量, 看它们与各种现存的模型吻合程度如何。零时刻骨的粘弹性函数是必须计算的, 这就得到弹性性能。如前所述, 过去从未作过粘弹性分析, 因此对于时间相关性能无法比较。

目前, 本文模型的重要性主要是定性的。由于我们的模型从对称的观点和结构上正确地描述了骨的特性, 因此, 本文的结果可用于: (1) 得到关于应该做并且难以定量估计的实验的指示; (2) 得到诸如生长因素和环境适应性的生物学机理的解释。从该模型可以看到, 重要的是测量拉伸时骨单位的粘弹性性质, 这是因为如方程 (51) 所示, 骨单位的粘弹性对 $E_A^*(t)$ 有很大的影响, 简单的松弛和蠕变实验必须在骨单位上做。由于基体材料在分离过程中遭到破坏, 所以粘弹性基体的性质是未知的。不过, 它可从模型中计算得到。计算 $G_f^*(t)$ 也将是可能的。至于生物机理的解释: 骨的短期适应性借助于骨单位水平上 Ca 浓度的变化而达到; 但是稍微改变一个分量, 整个骨的力学性质将改变。在骨的生长和长期适应性问题中, 骨单位的数量和大小均改变, ν_f 和松弛函数亦如此, 正如方程 (49) — (53) 所示。在移植领域里, 骨的合适的模型是重要的, 因为它有助于指示植入材料必须充分满足生物相容性条件。

一个更好更接近真实情况的模型应该考虑到间质系统和骨单位中的胶原具有非线性粘弹性性质, 这里的骨单位如鼠尾的实验所示。这样的模型当然也能更合理地描述有机基体。

参 考 文 献 (略)

周鸿康译自: *J. Biomech.*, 13, 2 (1980): 89—96. (孙家驹校)