

关于非线性振动*

天津大学 陈予恕

机械振动是工程技术、物理科学中十分广泛的现象。研究各种系统的振动规律,可延长其使用寿命,改善产品性能,提高舒适性,降低噪声;另外,利用振动可提高劳动生产率。

系统的振动的方程是非线性微分方程时,我们称这种振动为非线性振动。多自由度系统非线性振动方程的一般形式^[1]为

$$\frac{dx_s}{dt} a_{s,1}x_1 + \dots + a_{s,n}x_n + f_s(\omega t) + \varepsilon F_s(\omega t, x, \varepsilon) \quad (s=1, 2, \dots, n)$$

其中 $a_{s\beta}$ 为常数, ε 为小参数, f_s 和 F_s 为 ωt 的以 2π 为周期的周期函数,且 F_s 为 x 的多项式和为 ε 的解析函数。

严格说来,自然界中一切动力学现象都是非线性的。振动理论的发展和生产力的发展有十分密切的联系,在其发展的初期往往将系统线性化,因而线性振动理论早在18世纪就发展和完善了。由于科学技术发展的需要,提出了线性振动理论不能说明的一些现象和特点^[2-4]:

1. 线性系统中的叠加原理,对非线性系统是不适用的。
2. 在非线性系统中对应于平衡状态和周期振动的定常解一般有数个,需研究解的稳定性问题,才能确定哪一个解在生产实际中能实现。
3. 在线性系统中,由于有阻尼存在,自由振动总是被衰减掉,只有在外干扰力作用下,才有定常的周期振动。在非线性系统中,如自激振动系统,在存在阻尼的情况下即使无外干扰力也有定常的周期振动。
4. 在线性系统中,强迫振动的频率和干扰力的相同。在非线性系统中,在单频干扰力作用下,其定常强迫振动解中除有和干扰力同频成分外,还有与之成倍数的频率成分存在。
5. 在线性系统中,固有频率和起始条件及振幅无关。在非线性系统中,固有频率则和振幅有关,保守系统中,振幅、频率、相位又和起始条件有关。
6. 非线性系统的参数或初始值微小变化引起系统相位状态变化的现象叫分叉现象。它是不同于线性系统的很重要的一种现象。
7. 非理想(具有有限功率能源)的系统,自同步系统等不少系统不能线性化,必须研究其非线性振动方程才能了解其振动规律。

* 本文曾在中国力学学会全国非线性力学会议(1982年10月18—22日,无锡)全体会议上报告。

在振动理论的发展中遇到的这些特点,以及从本世纪20年代起,由于工业技术发展的需要,特别是无线电技术发展的需要,非线性振动理论获得了迅速的发展。但在非线性振动理论中,目前尚无适应各种不同类型的非线性振动方程的通用的解析方法,仅有少数非线性振动方程有精确解。人们为了尽可能深入了解振动系统的非线性特性,已研究出不少有效的近似方法:如定性方法中的相平面法;定量方法中的数值解法和近似解析解法。

数值解法,主要有迭代法,有限元法和配置法等^[6],其中如欧拉法,隆格-库达法,阿达木斯法,米尔恩法,变分法等等。一般来说,非线性振动方程的数值解法费时较多,因此近似解析解法仍在蓬勃发展,其主要方法有:

1. 摄动法(也称小参数法) 当 $\varepsilon=0$ 时,系统有频率为 ω 的周期振动,这种带有 ε 的小项是对系统周期振动的一种摄动。把解按小参数 ε 的幂级数展开,可求出满足一定误差要求的近似解,这种方法称为摄动法,它是由Poincaré于1892年研究行星运动时提出来的,所以又称Poincaré法^[6]。为了消除近似解中的永年项,后径Lindstedt^[7]等把振动频率也按小参数展开,即引进一个新的自变量(或称时间尺度) $\tau=\omega t$,其中 ω 是 ε 的幂级数,即对出现永年项的自变量进行坐标变换。Ляпунов^[8]引入了“本征时间”变换 $\tau=\frac{2\pi}{T+\alpha}t$,使

解对本征时间来说,其周期为 2π 。А. Н. Крылов^[9]采用了将解和频率的平方按小参数展开的方法,使计算得到较大的简化。Малкин^[10]系统地发展了小参数法,使之适应各种不同类型的非线性振动方程的需要。Блехман^[11]在研究自同步理论问题时发展了Малкин关于研究多自由度系统周期解稳定性的理论。Стурюк^[3]将解设成为 $\varepsilon^0 t, \varepsilon t, \dots$ 多个时间尺度的函数,提出了多尺度法,它使小参数法不但能方便地处理阻尼系统,而且可以处理非定常过程等问题。

2. 渐近法(或称三级数法) Van der Pol^[12]1926年在解决自激振动(振荡器)问题时,首先引入缓变系数法,即认为演化系统的解的振幅和相位,是时间 t 的慢变函数,把它作为原非线性方程的近似解。Н. М. Крылов和Боголюбов^[13]从本世纪30年代起对该法进行了系统的研究,他们首先将振动方程化成标准形式,然后进行变换(现在文献上称为КБМ变换),得到解的基波的振幅和相位角的导数都是 $O(\varepsilon)$ 量级的不显含 t 的函数,因此可用一个周期的平均值代替该函数的近似值,故称此法为平均法。他们于1947年提出了一种求任何阶近似解的渐近法(三级数法),Боголюбов和Митропольский^[14]对此方法作了严格的证明。后Боголюбов又用渐近法解决了多自由度非线性系统的单频振动问题。Митропольский^[15]于1955年将该法发展后,用它解决了具有缓变参数的非线性系统的非定常解的问题。Самойленко^[16]进一步发展了КБМ法,从理论上完整地解决了多自由度系统的多频振动问题。从50年代以来,Кононенко^[17]应用三级数法,系统地解决了具有非理想能源的机械系统的非线性振动问题,他为三级数法在力学系统中的应用做了大量的工作。

3. 点映射法 它是一种基于数学变换理论的方法,属于拓扑学和近代微分几何学的范畴。点映射法出现得很早,它是由Poincaré^[18]提出来的。自从Ландронов^[19]特别是Hayashi^[20]和Hsu, C. S.^[21]等人开始应用此法研究非线性振动之后,该法在非线形振动理论中才广泛地受到重视。点映射法研究非线性振动方程,包括强非线性振动系统,是一个

十分有效的方法,它在研究系统的全局性态、具有周期系数的非自治系统等问题方面,都有其优越性。

其他如谐波平衡法、直接变分法(包括 Ritz 法和 Галёркин 法),也都是经常应用的方法,特别是对具有强非线性项的系统进行分析时,它们都是很有效的解析方法。

频闪法^[22],模拟计算机的应用等方法,在研究非线性系统的性态方面,也具有很大的优越性。另外,非线性振动的实验研究^[23],不但是发展和验证理论的必需,而且可直接得到复杂非线性系统的各种规律。以上这些方法都有自己的特点,同时也有局限性。为了扩大它们的应用范围,还需做大量的研究工作。

其他还有积分流形方法,泛函方法等一些数学理论方法。

第9届国际非线性振动会议于1981年8月在苏联基辅举行。会议的目的是,进行从第8届会议以来非线性振动理论及其应用方面研究工作的总结,讨论非线性振动进一步发展的方向,解决各个研究中心工作的协调和扩大合作的问题等。会议的成果代表着当前世界非线性振动研究的水平。会议主要学术报告的基本内容如下。全体会议上的5个报告为:

苏联 Митропольский^[24]做了“平均法的发展”的报告。他将平均法用来研究带慢变参数的振动系统之后,又应用于不可导右端的系统,带时滞变量的系统,奇异摄动系统,泛函空间的方程组,以及接近双曲线型的偏微分方程等方面,取得了重大成就。他的其他重要成果见^[25]。

日本 Hayashi^[26]做了“映象法在解某些类型非线性微分方程中的应用”的报告。映象法在解具有周期干扰力的微分方程时也很有效。在前几届国际会议报告的基础上,这次着重研究了周期解的分叉(bifurcation)以及混沌状态(chaotic states)的出现。根据对两个例子的研究结果得知,当周期解变成不稳定时,一个反不稳定固定点就出现,因而发生周期解的分叉,结果产生低阶亚谐振。在某些条件下,分叉现象陆续发生,导致振动的混乱状态,实验证实了这些结果。

波兰 Пшеворска-Ролевич^[27]做了“广义周期系统”的报告。研究了方程组

$$Dx = A_0x + A_1S_hx + B_0u + B_1S_hu$$

其中 D 为线性空间 X 中的正反算符, A_0, A_1 为在 X 中的线性算符, B_0, B_1 为 X 中的线性空间 u 中的线性算符, 而 S_h 为作者定义的位移。对上述方程组建立了可控性和检测性的准则。也可研究更复杂的和具有位移非线性 S_h 的系统。

比利时 Mawhin^[28]做了“某些非线性波系统的周期振动”的报告。对方程组

$$U_{,t} - U_{,xx} = f(t, x, u)$$

在边界条件 $u(0, x) - u(2\pi, x) = u_{,t}(0, x) - u_{,t}(2\pi, x) = 0$, $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ ($t \in [0, 2\pi]$, $x \in [0, \pi]$) 下, 利用 Levy-Schauder 型变量、变分法、Галёркин 法、单调算子和全局隐函数定理等, 求得了半线性方程的解的存在性与唯一性定理。

美国 Crandall^[29]做了“稳态随机振动的非高斯闭合方法”的报告。在宽带随机信号所激发的非线性系统中, 统计线性化的方法是经常应用的, 其中高斯分布中的未知参数可根据从振动方程导出的恒等时间间断而计算。这个方法的系统推广就是非高斯闭合方法, 其中恒等时间间断增加的数目, 是利用非高斯响应分布族中计算的附加参数确定的。

会议的学术报告分四个大组进行。第一大组是非线性振动理论的分析方法。在本组的报

告中,以渐近法和平均法的进一步发展,积分微分方程,偏微分方程,在 Banach 空间中的微分方程,奇异摄动微分方程,随机微分方程等为中心内容。

关于研究具有复杂非线性特性系统振动的报告,研究具有小参数非线性问题的线性方法,研究奇异摄动系统的定常解和在物理学中应用积分流形方法等问题的报告引起了很大的兴趣。如 Самойленко^[16]做的“非线性力学系统中的渐近法”的报告,发展了由 KBM 所建立的渐近法,从理论上完整地解决了多自由度系统的多频振动问题,证明具有多维不变圆环是多自由度方程组存在 m 个频率振动的必要条件。在第6,7,8届国际非线性振动会议上,作者报告了以下的问题:在不变圆环 T^m 的邻域中引入局部坐标的问题,在 Галеркин 法的基础上建立不变圆环 T^m 的问题,在稳定不变圆环的邻域内研究轨迹的性质的问题,以及渐近稳定平衡位置的分叉问题,并给出了求多自由度非线性多频振动解的方法。

Красносельский^[30]做了“具有复杂非线性系统的振动”的报告。提出了研究具有不连续和内部滞后非线性系统的强迫振动的新方法,求得了无滑动时(包括不连续表面的干扰)周期解存在的条件,发展了求解的迭代法。他提出低强度噪声对具有不连续环节系统的动力学影响的计算方法。

Мышкис^[31]做了“非线性一维连续介质中的周期振动”的报告。研究了一维连续介质纵向振动的方程,得到了空间驻波的表达式和求驻波解的实际方法,研究了内、外阻尼对振动特性的影响。所得结果可以用来研究长铁轨的纵向动力学问题。

Ки, У. Н.^[32]做了“非线性随机系统的分析方法”的报告。报告的第一部分是对同时具有随机输入和随机参数的非线性系统的 Taylor-Cauchy 变换方法的推广,可解多自由度非线性系统。第二部分是关于同时具有随机输入和随机参数的非线性系统的 Volterra-Wiener 泛函方法的推广。第三部分综述了关于 Wiener 理论及其在综合和识别方面的最新应用。

第二大组是非线性振动理论的定性方法。报告的大多数是关于发展微分分布和微分泛函方程的定性方法。有很多报告是关于动力学系统的理论,分叉理论,稳定性理论,周期和概周期解的理论。不少报告涉及微分方程定性理论高速发展的方向——奇异吸引动力学系统,以及应用它们来模拟复杂的振动现象。

Румянцев^[33]做了“非完整系统的几个振动和稳定问题”的报告。研究了非完整保守系平衡的和定常运动的稳定性问题,以及在其稳定状态邻域内振动的问题。给出该类系统根据 Ляпунов 定义的临界状态稳定性问题的新研究结果。

Неймарк^[34]做了“杂乱的和随机的自激振动”的报告。综述了动力学系统的杂乱随机振动的复杂稳态运动研究工作。叙述了杂乱的、随机的振动的物理机制。给出在力学、电学、化学和生物学中实现该类运动的简单例子。在相空间中研究了杂乱的和随机的自激振动问题和派生分叉等问题。

Yoshizawa^[35]做了“非自治系统渐近特性”的报告。他指出很多作者处理了 Ляпунов 函数 $V(t, x)$ 沿解有一个负定导数这样一个削弱的条件; LaSalle 利用解的正有限集合的不变性质推广了自治系统稳定性定理,他的问题是寻求在什么地方解的正有限集合是确定的。对非自治系统,作者对封闭集合给了一个充分条件后讨论了这个问题,此处 $f(t, x)$ 的边界是假定的。此后出现了很多关于函数 $f(t, x)$ 为弱边界条件的论文。文中包括对这个方向的简单回顾和一些新的结果。

Hsu, C. S.^[21]做了“非线性系统全局分析的域映象法(cell to cell mapping)”的报告。作者指出,一个非线性系统常常有很多局部的渐近稳定状态和周期运动。对这些问题来说,决定它们的吸引区是非常重要的。解决这个问题,有效的方法是近两年才发展起来的域映象法。用域映象法可研究平衡状态,周期解和映象的吸引区域,该法用来研究非线性系统的振动问题是非常有效和省机时的。

第三大组是力学系统中的非线性振动问题。本组报告的主要内容有:能源问题中非线性振动理论的发展,卫星动力学非线性振动问题的研究,在机械系统中控制振动问题的研究,研究物体在具有自由表面的液体中的非线性动力学问题的解法,陀螺仪系统非线性振动问题,空间实验室稳定工作条件的研究等。

Фролов^[36,37]做了“考虑能源时非线性振动理论的发展”的报告。能源功率与机械动载荷所需功率的可比性,提出了考虑它们相互影响的必要性。报告综述了这种相互影响过程的各种不同物理模型,研究了单自由度系统、多自由度系统、参数系统及具有液体的系统等,同时研究了系统参数随机变化时的振动特性,研究了具有双能源(其特性不同)系统的振动规律,给出了单层非线性共振筛和能源相互影响的研究结果。

Блехман^[38]做了“拉格朗日-第利赫里关于平衡位置稳定性定理对某些周期运动和旋转运动的推广”的报告。作者运用对有势系来说,稳定运动对应于极小值的概念,研究了弱联系的刚体的同步旋转运动,其中包括和振动系统相联系的不平衡轴系,围绕重心旋转的相互吸引的质点等,并讨论了某些天文学现象。

Писаренко^[39]做了“具有非线性滞后特性的运动学激振机械系统的振动问题”的报告。作者利用非线性力学的渐近法,对具有集中质量,考虑弹性变形时有非线性滞后能量损失的弹性杆和板组成的非保守系统的强迫振动进行了研究,激振形式是运动学的,且激振器的固定点随着时间按周期规律进行变化。

Tondl^[40]做了“非线性系统惯性激振的一种解法”的报告。作者对位于一面为硬弹簧而另一面为软弹簧之间的质量较大惯性物体的振动系统进行了研究。该系统的振动方程是具有周期系数的非线性微分方程。得到了参数振动的一些有兴趣的结果。

Луковский^[41]做了“盛有自由表面液体的有限物体非线性动力学问题的一种直接解法”的报告。作者假设物体作空间运动,从非线性的角度研究了装有部分不可压缩理想液体的物体和液体的相互影响。作者建议了一种直接解法,在其基础上对流体动力学给了一个Остроградский形式的变分原理,并指出在第一类动力学问题的情况下,哈密顿变分原理可导出波的非线性理论的方程,同时包括液体自由表面的非线性运动学的边界条件。

Черноусько^[42]做了“机械振动的最佳控制问题”的报告。作者研究了小参数微分方程所描述的非线性振动控制系统。将方程组化成具有快速旋转相角的控制系统的形式,提出了最佳控制的问题,并在Понтрягин的最大原理和КБМ法的基础上进行研究,制定了求最佳控制的渐近解的方法。利用该法研究了控制绕质心转动刚体的最佳或近似最佳振动参数的方法。

Schmidt^[43]做了“自激、强迫和参数振动相互影响”的报告。具有非线性弹性恢复力和非线性阻尼的一个自由度系统的强迫振动,其周期性、非线性参数振动和自激振动的相互影响问题已经研究过了。作者研究了直齿齿轮的节距误差、外形误差等制造误差,和偏心距

等将引起强迫振动；啮合刚度的周期振动激起系统的参数振动；啮合的齿面之间的干摩擦激起自激振动。系统的振幅表示这些因素相互影响的结果，依此可找到齿轮传动中减小振动的可能性。

Huang^[44]做了“机构中弹性连杆的非线性振动问题”的报告。作者曾研究了机构的刚体动力学问题，在本文中发展了机构中弹性连杆的振动分析方法。机构中弹性连杆的振动方程是非线性的，该方程用КБМ法来解。将方程化成标准方程后，以Hamming的校正数值方法解之。作为例子，用数值方法解了具有一个弹性连杆的曲柄滑块机构的振动问题。

第四大组是关于非线性振动理论在物理学、电子学、生物学中的应用问题。本组报告表明，生态学的非线性振动、细胞运动的自激机制和其他生理过程的力学研究有了很大的发展。不少报告还讨论了电子技术和电子学中具有自随机特性系统的分析方法。

Минакова^[45]做了“具有不能通约的自激振动系统的同步过程”的报告。作者指出，在研究自激振动系统的相互作用时，研究自激振动和接近于振动的倍频而不能通约的振动之间的相互作用是很有兴趣的。这种情况是在接入电路具有高品质因数(Q值)的共振元件时发生的。与自激振动系统中具有谐振有关的非线性相互作用，确定了在不同步和同步状态下运动的多频性。

Asfar^[46]做了“多自由度自激振动系统对多频激振的响应”报告。作者研究了在多频干扰力作用下两个自由度自激振动系统：包括机械系统，如弹性转子系统的振动问题，切削刀具的二维振动；电路系统，如两个线性耦合van der Pol振荡器；以及许多其他物理系统。作者用多尺度法研究了以上系统的一次近似解，分析了不同参数对振动规律的影响。

Романовский做了“细胞运动自激机制”的报告。Колесов做了“数学模拟生态学的非线性振动问题”的报告。Бюков, В. И.做了“化学反应中复杂振动问题”的报告。这些报告都引起了与会者很大的兴趣。

我国代表首次参加了这一学术会议，做了一个30分钟的和三个15分钟的学术报告。

闻帮椿在“非线性振动理论在力学中的应用”小组会上做了“非线性自同步振动机频率俘获的研究”^[47]和“具有冲击、干摩擦、分段质量的非线性系统的强迫振动”^[48]两个报告。

陈予恕在“非线性振动理论分析方法”小组会上做了“多自由度非线性系统交叉解及其应用”^[49]的报告。并在“非线性振动理论在力学中的应用”大组会上，做了题为“大型非线性共振筛振动特性现场实验研究”^[23]的30分钟的报告。我们的报告受到了与会者的赞赏。

最近几年我国非线性振动研究工作的发展很迅速。我国已经举行了第1届和第2届非线性振动学术交流会。第1届全国非线性振动学术交流会于1979年12月在济南举行。参加会议的高等院校和科研单位共25个，代表46人。山东工学院、天津大学为这次会议的召开做了大量的工作。第2届全国非线性振动学术交流会于1981年11月在安徽黄山召开。有75个高等院校和科研单位的108名代表参加。从代表的组成和数量看，较第1届会议有了迅速的扩大。不少报告密切联系国民经济各部门所提出的实际问题，取得了可喜的成果。参加第9届国际非线性振动会议的代表向第2届全国非线性振动学术交流会做了“会议情况”和“会议学术报告内容简介”的报告。

第2届全国非线性振动学术交流会分两个阶段进行。第一阶段是学术交流,共宣读交流了67篇学术论文,论文的内容比较广泛,涉及数学^[50]、近代物理^[51]、一般力学^[52]、流体力学^[53]以及机械、电机、建筑结构等工程中的非线性振动问题,无论从论文的数量和质量看,均较第1届全国非线性振动学术交流会有着显著的进展。在非线性和微分方程的分析方法和定性理论研究方面,参数振动,结构非线性振动等某些方面,都有了较深入的研究。对振动机械^[54]、转子动力学、电力输送和交通运输机械某些非线性振动问题的研究取得了有意义的成果,部分成果为我国四化建设解决了某些重大振动理论问题^[55]。与此同时,非线性振动理论研究的某些新的分支,在会上也有所反应。

第二阶段是专题报告,共讲了12个专题。报告者系统地介绍了非线性振动理论中的点映象法、频闪法、数值解法、参数振动、随机振动、振动工程、结构振动、一般力学中的非线性方法和非线性振动理论在刚体力学与在加速器中的应用,其内容包括非线性振动中的基本理论和方法,以及最近的发展成果。

马鞍山钢铁学院、东北工学院、天津大学为这次会议的召开做了大量的工作。

我们知道,由于在自然界中见到的大部分动力学过程都是属于非线性振动范畴的,所以从30年代起非线性振动得到了迅速的发展。随着科学技术的发展,非线性振动必将获得更快的发展。不对广泛存在的非线性振动现象进行深入的研究,热核反应、微电子学、声学、光学、流体力学、机械动力学、生物学等学科就不可能继续很快发展。因此对目前尚未了解的振动运动进行基础研究,以便发现和描述它们,是非线性振动发展的方向。

参 考 文 献

- 1 陈子恕, 求具有任意个循环坐标的拟线性运动方程组概周期解的一个方法及其应用, 力学学报, V. 8, 3 (1965).
- 2 Stoker, J. J., Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems, Interscience Publishers Inc. (1950).
- 3 Nayfeh, A. H., Mook, D. T., Nonlinear oscillations, Wiley-Interscience (1979).
- 4 Бабаков, И. М., Теория колебаний, ГИТТЛ (1958).
- 5 Вибрации в технике, том 2, Колебания нелинейных механических систем, Машиностроение (1979).
- 6 Poincare, H., Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, Paris, Gauthier-Villars (1892-1899).
- 7 Lindstedt, A., Differentialgleichungen der Störunstheorie, Mem. Acad. Sci. St. Petersburg, XXXI (1883).
- 8 Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат (1950).
- 9 Крылов, А. Н., Вибрация судов. Собрание трудов, Т. X, Изд. АН СССР (1948).
- 10 Малкин, И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, ГИТТЛ (1956).
- 11 Блехман, И. И., Джанелидзе, Г. Ю., Вибрационное перемещение, Изд. Наука (1964).
- 12 Van der Pol, B., On relaxation oscillation, Phil. Mag., V. 7, 2 (1926).
- 13 Крылов, Н. М., Боголюбов, Н. Н., Введение в нелинейную механику, Изд. АН УССР (1937).
- 14 Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, ГИТТЛ (1955).
- 15 Митропольский, Ю. А., Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Изд. АН УССР (1955).
- 16 Самойленко, А. М., Об асимптотических разложениях решений систем нелинейной механики. Труды 5.6.7.8.9 международной конференции по нелинейным колебаниям (1969, 1972, 1975, 1978, 1981).
- 17 Кононенко, В. О., Колебательные системы с ограниченным возбуждением, Изд. Наука (1964).
- 18 Poincare, H., Sur les courbes definiées par les equations differentielles, J. Math. Pure Appl., Ser. 3, V. 7 (1881).

- 19 Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, ГИФМЛ (1959).
- 20 Hayashi, C., Selected papers on nonlinear oscillations, Nippon Printing and Publishing Co., Osaka (1975).
- 21 Hsu, C. S., Cell-to-cell mapping for global analysis of nonlinear systems. "Труды 9 межд. конф. по нелинейным колебаниям" (1981). (以下凡未写出处的, 均载于此文集)
- 22 Minorsky, N., Nonlinear oscillations, D Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey (1962).
- 23 Чань Юй-шу (陈子恕等), Заводские колебательные исследования крупных нелинейных резонансных грохотов.
- 24 Митропольский, Ю. А., Развитие метода усреднения.
- 25 Исследования Ю. А. Митропольского в области теории нелинейных колебаний и теории нелинейных дифференциальных уравнений, Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний, Наука Думка, Киев (1977).
- 26 Hayashi, C., Abe, M., Oshima, K., Kawakami, H., The method of mapping as applied to the solution for certain types of nonlinear differential equations.
- 27 Пшеворска-Ролевич, Д., Обобщенные периодические системы.
- 28 Mawhin, J., Periodic oscillations of some nonlinear wave systems.
- 29 Crandall, St. H., Non-Gaussian closure techniques for stationary random vibration.
- 30 Красносельский, М. А., Покровский, А. В., Колебания в системах со сложными нелинейностями.
- 31 Мышкис, А. Д., Филимонов, А. М., Периодические колебания в нелинейных одномерных сплошных средах.
- 32 Ки, У. Н., On the analysis of nonlinear stochastic systems.
- 33 Румянцев, В. В., О некоторых задачах устойчивости и колебаний неавтономных систем.
- 34 Неймарк, Ю. И., Хаотические и стохастические автоколебания.
- 35 Yoshizawa, T., Asymptotic properties in nonautonomous systems.
- 36 Фролов, К. В., Развитие теории колебаний нелинейных систем при учете свойств источника энергии.
- 37 Гончаревич, И. Ф., Фролов, К. В., Теория вибрационной техники и технологии, Изд. Наука (1981).
- 38 Блехман, И. И., Обобщения теоремы Лагранжа-Дирихле об устойчивости положений равновесия на некоторые классы периодических и вращательных движений.
- 39 Писаренко, Г. С., Богинич, О. Е., Колебания кинематически возбуждаемых механических систем нелинейно-гистерезисного типа.
- 40 Tondl, A., On a special case of inertial excitation of nonlinear systems.
- 41 Луковский, И. А., Об одном прямом методе решения нелинейных задач динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью.
- 42 Черноусько, Ф. Л., Акуленко, Л. Д., Управление колебаниями механических систем.
- 43 Schmidt, G., Interaction of self-excited, forced and parametrically excited vibrations.
- 44 Huang, T. C., Youn, Y., Nonlinear vibration analysis of elastic links in a mechanism.
- 45 Минакова, И. И., Минина, Г. П., Синхронные процессы в автоколебательных системах с несоизмеримыми частотами.
- 46 Asfar, K., Nagfeh, A., Mook, D., Response of self-excited multi-degree-of-freedom systems to multifrequency excitations.
- 47 Wen Bang-chun (闻帮椿), Research concerning frequency entrainment of nonlinear self-synchronous vibrating machines.
- 48 —, Ji Sheng-qing (纪盛青), Forced oscillations of nonlinear systems with impact, dry friction and stage masses.
- 49 Чань Юй-шу (陈子恕), Перекрестное решение нелинейных колебательных систем с несколькими степенями свободы и его применение.
- 50 戴德成, 某类非线性积分流形的研究——多频共振稳定性准则的积分流形方法证明, 力学学报, 3 (1981).
- 51 罗诗裕, 马丢方程的一阶不稳定区及其在回旋加速器中的应用, 应用数学和力学, V, 3, 4 (1982).
- 52 陈子恕, 两自由度分段线性系统的一种解法, 固体力学学报, 1 (1982).
- 53 周恒, 赵耕夫, К-Б方法在流动稳定性问题中的应用, 力学学报, 3 (1982).
- 54 闻帮椿, 刘凤翥, 振动机械的理论及应用, 机械工业出版社 (1982).
- 55 陈子恕, 金志胜, 王继宗, 大型双质量非线性共振筛的几个动力学问题, 天津大学学报, 3 (1981).