第14卷 第1期 力学进展 Vol. 14 No. 1
1984年2月25日 ADVANCES IN MECHANICS Feb. 25, 1984

非线性振动理论中的多频共振问题

南京工学院 戴德成

一

由Cesari[1]和Артемьев[2]开始的关于多频共振问题的研究，近来得到了大发展[3,4]。这种研究使人们对多频共振问题的机理及其对系统响应的影响都有了新的认识。本文综述这些问题并指出在多频共振问题中比较成熟的几个领域。

共振问题是振动理论中的重要问题之一。本文谈到的多频共振是指共振关系中包含有三个或三个以上频率（外干扰频率和固有频率，但其中至少有一个固有频率）。这样本文就排除了对一般共振情形和一般二自由度系统内共振情形的讨论。

对多频共振问题的提法各不相同，本文所指多频共振包括下列几种情形[3,5]。

（i）$k\omega=\sum_{l=1}^{M}H\nu$（$k$, H 是整数，M 是外力频率数目），这时系统处在多频输入作用下。$k=1$时称为组合音（Combination tone）[1)]，$k=2,3,\cdots$时称为次组合音（Subcombination tone）[7,8]。

（ii）$\sum_{j=1}^{N}k_j\omega_j=0$（$N$是系统的自由度数目），称为内共振或自参数共振。两个频率的内共振研究得较早，但三个或三个以上频率情形则是近年的事，例如Кононенко[9]对多自由度系统研究了$\omega \pm\omega_k\approx2\omega$ 情形内共振问题，Чещанков[10]对四自由度系统研究了$\omega_4-\omega_3-\omega_2\pm\omega_1\approx0$ 情形下的内共振问题。

（iii）$\sum_{j=1}^{N}k_j\omega_j=H\nu$，这是最主要的情形，称为组合共振。例如 Tondl[11]研究了二自由度系统中$2\omega_1+\omega_2=\nu$ 情形组合共振问题。最早在实验上观察到和差型组合共振的是Yamamoto[12,13]。

（iv）$\sum_{j=1}^{N}k_j\omega_j=\sum_{l=1}^{M}H_l\nu_l$，称为多频共振。$j=1$ 时即情形（i）；$H_l=0(l=1,\cdots,M)$时即情形（ii）；$l=1$ 时即情形（iii）。

（v）$\sum_{j=1}^{N}K_{ij}\omega_j=\sum_{l=1}^{M}H_{il}\nu_l$（$i=1,\cdots,L\leqslant N$），称为多个多频共振情形。在[4，9]中有大量这方面例子。

1）这个提法与 Helmholtz 的提法含义不一样[6]，又，在 Helmholtz 提法下不包括共振情形。

多频共振问题是讨论当存在上述共振关系时能量在固有模态之间的交换或固有模态与外部能源之间的流动以及由此引起的它们对系统响应的影响，而不涉及这些解的拟周期性质。这些问题的讨论，对于共振机理的掌握和实际应用都有重大意义。

二

在多频共振研究方法上，传统的几何方法已无能为力。由于系统是非线性非自治的多自由度系统，利用现有数值计算方法作定性分析将是耗费大（机时长）而效果不一定理想，因此目前在计算机方法没有新的突破前，看来数值计算在多频共振研究上还不会有大的进展。多频共振研究主要使用定量方法。下面叙述一些较为系统的方法的发展。

Малкин[14] 首先提出形式如（iv）的多频共振问题，他指出了该问题的困难，但无论在理论上或在具体问题上都没有针对这种情形作进一步的具体讨论。

Тибилов[15] 提出了系统

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{jk}D^2+b_{jk}D+c_{jk})x_k=\varepsilon Q_j(t,\theta,x,Dx)\quad(j=1,\cdots,n;\ \theta=\theta_1,\cdots,\theta_m)$$

在 $k_1\omega_1+\cdots+k_s\omega_s+l_1\alpha_1+\cdots+l_q\alpha_q=0\quad(s''\leqslant n,\ q\leqslant m)$ 情形的渐近近似解。

笔者[16] 将系统加以推广，即研究系统

$$\dot{y}=\omega(x)+\varepsilon Y(t,x,y,\dot{x},\dot{y}),\quad \dot{x}=\varepsilon X(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\tag{1}$$

其中 y，ω，Y 为 m 维向量，x，X 为 n 维向量。于是这种系统包括了：①慢变参数系统（即不平稳过程）[17,18]；②方程右端依赖于惯性作用，这种提法已不仅在陀螺力学中出现[19,20]，而且在刚体动力学[21,22]，壳体动力学[22] 中也经常出现；③广泛一类大非线性及弱非线性系统经过适当变换可以归约到这种情形。如方程（1）形式提法，Moser[23] 也讨论过，现在还有人讨论（如[24,25]）。

文[16]中提出的最一般情形共振问题的提法如下：如果对于系统（1）存在点 $x=\xi^*\in\mathscr{D}$，使得等式

$$p_1\omega_1(\xi^*)+\cdots+p_m\omega_m(\xi^*)=0\tag{2}$$

成立，$p_1,\cdots,p_m$ 不同时为 0，且 $|p_i|\leqslant\overline{K}$，则称 $x=\xi^*$ 为系统的共振点；如果在 $\mathscr{D}$ 内找不到如上述定义的共振点，则称系统处于非共振状态。

如果在相应于等式（2）的共振点 $x=\xi^*$ 的 ε 邻域内找不到点 $x=\xi_1\neq\xi^*$，使等式

$$p_1'\omega_1(\xi_1)+\cdots+p_m'\omega_m(\xi_1)=0$$

成立，则称 $x=\xi^*$ 是系统的孤立共振点。

如果考虑到 $\xi=(\xi_1\cdots,\xi_n)$，ω_i 是标量，则在一般条件下，$p_1\omega_1(\xi)+\cdots+p_m\omega_m(\xi)=0$ 在 ξ 空间中表示一个 $n-1$ 维超曲面，称为 $n-1$ 维共振超曲面；如果在此超曲面的 ε 邻域内不存在其它共振关系式，则称该曲面为孤立共振超曲面。

这里以及以下所述，可推广到有任意个（少于快转相位的个数）共振关系式情形，即

$$\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\omega_j(\xi^*)=0\quad(i=1,\cdots,k,k\leqslant m-1)$$

如果系统的部分变元 x 始终保持在孤立共振点 ξ^* 的 ε 邻域内，则称系统中存在相应的稳定共振振动。

如果系统的部分变元x始终保持在孤立共振超曲面的ε邻域内，则称系统中存在相应的稳定共振振动。（Молчанов[26]也提出了多频共振超曲面概念，然而未见其有效的应用。）

接着根据一阶渐近近似公式确定了系统（1）中存在稳定和不稳定多频共振的充分条件，这些条件的定性上的严格论证已在文[27]中用积分流形方法作出。

作为文[16]的应用以及具体化，文[28]讨论了二自由度非线性系统中的组合共振问题。

Филатов[29] 研究了系统右端依赖于惯性项的较为一般的系统的渐近近似解及其误差分析，并以此为核心，最后完成了有关方法理论及应用的专著。

Гребеников[30]研究了系统右端为解析，而初始时刻满足共振关系时系统的平均方法并作了严格论证。这些结果及其在天体力学方面应用皆总结在他的专著中。

Zhuravlev[31]建议在系统右端解析且满足多频共振关系时结合Arnold方法与Delauney Zeipel方法，从而提出了一种形式上的渐近计算方案，希望对计算机上计算有些帮助。

除此之外，近年来关于多频共振研究方法方面值得注意的新动向是

Ⅰ．由KAM理论方法[22]以及Боголюбов的加速收敛法[33]得到的解析系统的拟周期解的基本结果带有精细的、基本上是“统计”的性质。Moser[23]直接研究了下列系统：

$$\dot{x}=a(y)+\varepsilon f(x,y,\varepsilon),\qquad \dot{y}=\varepsilon g(x,y,\varepsilon)$$

其中x,y是n维向量，而a,f,g是自己宗量的解析函数，$\det\frac{\partial a}{\partial y}\neq 0$。作变换$y=c+\sqrt{\varepsilon}\,Y$，$c$是常数（暂且是任意的），于是原方程归约为

$$\dot{x}=a(c)+\bar{\varepsilon}F(x,Y,\bar{\varepsilon},c),\quad \dot{Y}=\bar{\varepsilon}G(x,Y,\bar{\varepsilon},c)$$

此处$\bar{\varepsilon}=\sqrt{\varepsilon}$；$a,F,G$是自己宗量的解析函数。这样固定向量$c^0=(c_1^0,\cdots,c_n^0)$，使$\omega_s=a_s(c^0)$ $(s=1,\cdots,n)$是有理地独立的，且满足$|(j,\omega)|\geqslant\gamma(\|j\|^{\tau}+1)^{-1}(\tau>n-1,0<\gamma<1)$，$j=(j_1,\cdots,j_n)$是具有任意不同时为0的整数分量的向量。那么存在这样的球$U_R(\|c\|<R_0)$使得对球U_R内大多数（按勒贝格测度）点$c=(c_1,\cdots,c_n)$在充分小$\bar{\varepsilon}$时存在按$\bar{\varepsilon}$解析的拟周期解。但这些点在U_R内到处都不构成致密点集。上述结论应用于个别系统时其正确性的检验是很困难的问题，因为仅对于所研究系统的大多数（概率为1地）结论是正确的。这些拟周期解和相应于它的m——频率振动是非“粗糙”的。Митропольский等[34]将单频振动思想推广到多频共振情形，利用较迭代加速收敛法为“粗糙”的方法研究了较拟周期解为“粗糙”的多频振动研究对象。他们拟定了具体的p阶近似解的构造方法，并且研究了相应于多频振动解的不变流形的拓扑结构，为多频振动解的研究方法奠定了严格的定性基础。他们打算将有关结果推广于多频共振情形。

Ⅱ．应用数学中应用较广、发展较快的多重尺度方法，在流体动力学和流动稳定性问题方面取得了巨大的成功。Nayfeh将其广泛运用于多频共振各种情形[4]取得了很大成就。这种方法的思想被追溯到Poincare，虽然比Poincare方法有着较为灵活的特点，更适合于研究多频共振问题[4]，但也有着与Poincare方法一样的弱点，即不能用以作经过严格论证的近似定性分析。虽然多重尺度方法的严格论证已有许多人做过（例如[35]），但对于多频共振情形并未有人讨论过。因此多重尺度方法对多频共振问题的应用在理论上不能认为是严格的。这方面还有许多工作可做。

三

多频共振问题涉及的技术领域十分广泛，现介绍几个比较集中、比较成熟的领域。

Ⅰ. **参数激励** 多频共振问题最早是由参数激励问题中提出的[1,2,36]，其技术应用领域也较广泛，例如梁、板、壳的动力稳定性，输液管振动，充液壳体的振动问题等皆有多频共振问题存在[3,4]。这里仅介绍在多频共振时参数激励的特殊现象及有关的一些新动向。

当多自由度系统存在参数激励时，多频共振情形的研究显示了参数激励不稳定区的增加以及阻尼的作用有时不再是一般地缩小不稳定性区而是扩大不稳定性区，也即预示了产生不稳定性现象的可能性的增加，这对工程实际是很有意义的。

例如 Parthasarathy[37,18] 研究了受周期随转力作用的悬臂柱后指出：在多频共振 $\nu=\omega_2-\omega_1$ 时参数激发的不稳定性区增加了，而且当 R（刻划材料内耗的特征参数）增加时不稳定性区域扩大了。上述结果见图 1。

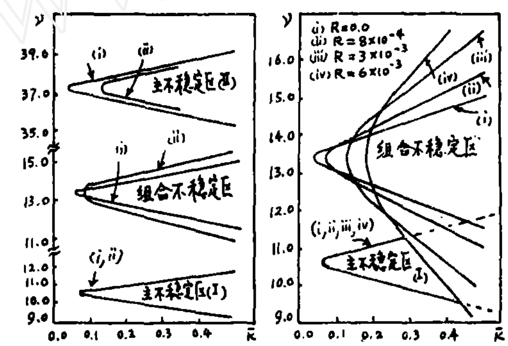

图 1 "R" 对组合不稳定区的影响（$P=10$，$G=0.1$）

当然多频共振不稳定性区在一般情形不十分显著，因而 Болотин[38] 持否定态度，但众多研究[3,4] 指出多频共振不稳定性区虽然在一般情形下不十分显著，其重要性不如主频不稳定性区，但就某些情形来说其存在及其危害是不容忽略的，因此 Болотин 在[39]中引用了上述这些性质。

Челомой[40] 提出了弹性系统动力稳定性研究方法，并给出了稳定性准则的论证。

笔者在综述现有研究方法基础上[41] 提出了弹性结构动力学和动力稳定性研究方法，在力学上严格研究了正交各向异性柱壳[42] 和粘弹性杆[41] 的多频共振的存在性和稳定性。

随机振动是目前振动问题中较活跃的分支，随着研究的深入，已开始研究随机作用与多频共振的复合效应。Schmidt[43] 研究了随机参数激励下非线性系统中多频共振问题，Ariaratnam[44] 研究了随机参数激励与谐波参数激励同时存在时非线性系统中的多频共振问题，更多的文献见[3]。在参数激励方面值得注意的比较系统的工作还可见[18,45]。

Ⅱ. **多自由度系统** 由于系统的复杂性，多频共振现象极为丰富。且已在各种技术领域中被观察到[4]，例如 Luukkala[46] 在石英传感器的驻波里，Adler 和 Breazeale[47] 在水下驻波里，Eller[48] 在两个耦合的非线性电子振荡器里都观察到了多频共振现象。多频共振现象

已被用来说明各种技术问题。例如Nayfeh等[49]在研究船舶的俯仰和横摇运动时导出如下方程：

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = -2\hat{\mu}_1 \dot{u}_1 + 2\alpha_1 u_1 u_2 + F_1\cos(\Omega t + \tau_1) \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = -2\hat{\mu}_2 \dot{u}_2 + \alpha_2 u_1^2 + F_2\cos(\Omega t + \tau_2) \end{cases}$$

其中u_1是横摇角，u_2是俯仰角，ω，$\hat{\mu}_n$，α_n，F_n和τ（$n=1,2$）都是常数。

当$\omega_2 \approx 2\omega_1$，$\Omega \approx \omega_2$和$F_1 = 0$时，可以得到$u_2$模态被强烈地激发，当$F_2$取小值时，$u_1$是很小的，$u_2$有一个上界；当$F_2$增加到超过一个临界值时，$u_1$的零值解是不稳定的，而$u_2$成为饱和的即自临界值后，再增加激励的幅值$F_2$，只引起横摇$u_1$模态的发展，而不进一步影响俯仰$u_2$模态。此时俯仰模态是饱和的，由于激励幅值增加而输入系统的全部附加能量都进入了横摇运动，上述结果示于图2（其中a_n是u_n的幅值，$f_2 \propto F_2$）。这些结果解释了Froude[50]所报告的一个现象：俯仰固有频率接近于两倍的横摇固有频率（内共振）的船舶有讨厌的横摇性质，因而与上述饱和现象相一致，当船逆浪前进或顺浪移动时，如波浪充分大并且有“合适”的频率，船会开始猛烈横摇。

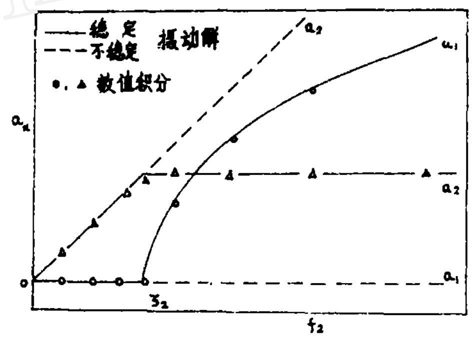

图 2

多自由度系统方面值得注意的比较系统的工作还可见［9，22］。

Ⅲ．**非线性波**　非线性波也是非线性振动理论工作者的工作领域[4]。Landou[51]早就指出：在非线性情形，如果弹性波的频率和波向量满足

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \qquad k_1 + k_2 = k_3$$

这时就会发生共振现象。70年代以来，这个现象在等离子体的非线性效应中已得到确认（例如见[52,53]）。

等离子体中波-波相互作用本质地是非线性的。当满足三个波的共振条件

$$\omega_k = \omega_{k'} + \omega_{k''}, \qquad k = k' + k'' \tag{A}$$

时，小幅值扰动相互作用表现得特别强烈。经过分析表明[52]，如果满足共振条件（A），则在共振波之间能有一个有效的能量转换，例如可以发生如图3所示状态的转换。

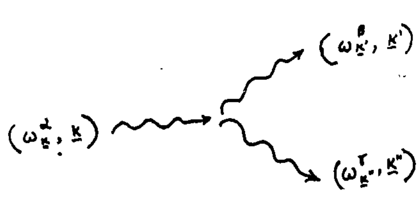

图 3

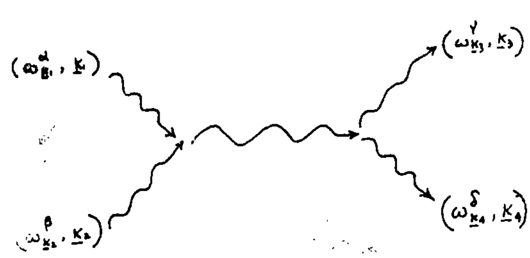

图 4

三波相互作用的最熟悉的例子是两个（高频）电子等离子体振荡与一个（低频）离子声波的共振相互作用，一般地，高阶非线性波-波相互作用也是可能的，例如当满足共振条件

$$\omega_{k_1}^{\alpha}+\omega_{k_2}^{\beta}=\omega_{k_3}^{\gamma}+\omega_{k_4}^{\delta}, \qquad k_1+k_2=k_3+k_4$$

时可能有图 4 所示的耦合作用。图 4 表明整个过程可由两个逐次进行的非共振三波过程组成。特别地，由（$\omega_{k_1}^{\alpha}, k_1$）和（$\omega_{k_2}^{\beta}, k_2$）融合成一个虚拟态（$\omega_{k_1+k_2}^{\gamma}$, k_1+k_2），这个态同时衰变成二个其它态（$\omega_{k_3}^{\gamma}, k_3$）和（$\omega_{k_4}^{\delta}, k_4$）。当然四个波的其它组合也是有可能的。

共振四波相互作用可在忽略离子动力学的宏观模型范围内的长波电子等离子体振荡中观察到。共振四波散射是振荡频谱中能量非线性转变的主要机理，所以共振多波相互作用研究是很有意义的。

经过各国科学工作者的努力，多频共振作为非线性振动理论中的一个有实际意义的重要物理现象的地位已经确立。但多自由度非线性系统是非常复杂的，例如现已有人提出研究多频自振（例如见[54]），其非自治问题当更加复杂。因此多频共振的机理与丰富的物理图景远不能说已被揭示得差不多了，它的研究还有待进一步深入，实际应用领域也有待扩大，在定性理论方面更是一个空白，大有活动余地。

参 考 文 献

1 Cesari, L., Sulla stabilita delle soluzioni dei sistemi di equzioni differentiali lineari a coefficienti periodici (4), Mem. Accad. Italia (6), 11 (1941): 633—695.

2 Артемьев, Н. А., Метод определения характеритических показателей и приложение его к двум задачам небесной механики, Изв. АН СССР, Мат., 8 (1944): 61—100.

3 Ibrahim, R. A., et al, Parametric vibration, Part 1, *Shock Vib. Digest*, 1 (1978): 15—50; Part 2, *ibid*, 2 (1978): 9—24; Part 3, *ibid*, 3: 41—57; Part 4, *ibid*, 4: 19—47; Part 5, *ibid*, 5: 19—38; Part 6, *ibid*, 9 (1981): 23—35.

4 Nayfeh, A. H., Mook D. T., Nonlinear Oscillations, Wiley-Interscience, New York (1979).

5 戴德成，非线性振动理论的特点与多频共振问题，第 2 届全国一般力学学术交流会论文（1980）.

6 Minorsky, N., Nonlinear Oscillations, Van Nostrand, Princeton (1962).

7 Van Dooren, R., Differential tones in a damped mechanical system with quadratic and cubic nonlinearities, *Int. J. Nonlinear Mech.*, 8 (1973): 575—583.

8 ——, Two mode subharmonic and harmonic vibrations of a nonlinear beam forced by a two mode harmonic load, *ibid*, 10 (1975): 271—280.

9 Ганиев, Р. Ф., Кононеко, В. О., Колебания твердых тел, Изд. «Наука» (1976).

10 Чешанков, Б. И., Об одном случае четырехчастотных колебаний, Теор. и прилож. мех. 3й нац. контр., Варна, 1977, София: 155—160.

11 Тондль, А., О решении некоторых задач квазилинейных систем, Тр. меж. симп. по нелиней. Колеб., Киев, Т. 1 (1963): 474—484.

12 Yamamoto, T., On the vibrations of a rotating shaft, *Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ.*, 9 (1957): 19—115.

13 ——, Response curves at the critical speeds of subharmonic and summed and differential harmonic oscillations, *Bull. JSME*, 3 (1960): 397—403.

14 Малкин, И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, Москва (1956).

15 Тибилов, Т. А., Асимптотический метод исследования переходных процессов в нелинейных колебательных системах, ДАН СССР, 153, 1 (1963): 64—66.

16 戴德成，关于某类非线性系统共振情形的研究，力学学报，4（1965）：285—295.

17 Митропольский, Ю. А., Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Изд. «Наука», Москва (1964).

18 Even-Iwanowski, R. M., Resonance Oscillations in Mechanical System, Elsevier, New York(1976).

19 Слезкин, Л. Н., О применении асимптотических методов к исследованию гироскопических систем, ДАН СССР, 147, 1 (1962): 57—59.

20 刘延柱，陀螺力学中的非线性振动方法，力学进展，11, 4（1981）.

21 戴德成，人造卫星姿态动力学中的非线性平面振动，南京工学院学报，2（1981）.

22 Ганиев, Р. Ф., Ковальчук, П. С., Динамика систем твердых и упругих тел, «Машиностроение», Москва (1980).

23 Moser, J., Convergent series expansions for quasiperiodic motions, *Math. Ann.*, 169 (1967): 136—176.

24 Нейштадт, А. И., Об осреднении в многочастотных системах, ДАН СССР, 226, 6 (1976): 1295—1298.

25 Хапаев, М. М., Об осреднении в многочастотных системах, Тр. меж. симп. по нелиней. колеб., Киев, Т. 9 (1981).

26 Молчанов, А. М., Резонансы в многочастотных колебаниях, ДАН СССР, 168, 2 (1966).

27 戴德成，某类非线性系统积分流形的研究，力学学报，3（1981）.

28 ——，二自由度非线性系统的组合共振问题，南京工学院学报，2（1982）.

29 Филатов, А. Н., Усреднение в системах дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, ДАН СССР, 172, 4 (1967).

30 Гребеников, Е. А., Некоторые качественные исследования дифференциальных уравнений небесной механики, Докторская диссертация, МГУ ГАИШ (1967).

31 Zhuravlev, S. G., Conditionally periodic solutions of the canonical system of differential equations in non-autonomous resonant case, *Celes. Mech.*, 19, 1 (1979): 77—94.

32 Арнольд, В. И., Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, УМН, 18, 6 (1963).

33 Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А., Самойленко, А. М., Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике, Наук Думка, Киев (1969).

34 Митропольский, Ю. А., Самойленко, А. М., Некоторые проблемы теории многочастотных колебаний, Ⅶ Int. Konf. uber Nichtlineare Schwingungen, 1977, 2 (1979): 107—116.

35 江福汝，高阶椭圆型方程一般边值问题的奇摄动，科学通报，23（1979）.

36 Mettler, E., Allgemeine Theorie der Stabitat enzwungener Schwingungen elastischer Kopper, *Ing. Arch.*, 17 (1949): 418—449.

37 Parthasarathy, A., Deterministic and stochastic stability of a nonautonomous circulatory system, Doctoral Dissert., Syracuse Univ. (1972).

38 Болотин, В. В., Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, М. (1956).

39 Вибрации в технике, Справочник, Т. 1, «Машиностроение», М. (1979).

40 Челомой, С. В., О динамической устойчивости упругих систем, ДАН СССР, 252, 2 (1980).

41 戴德成，弹性结构非线性动力学与动力稳定性问题的一个研究方法，南京工学院学报，4（1982）.

42 ——，正交各向异性柱壳的非线性参数共振问题，固体力学学报，3（1983）.

43 Schmidt, G., Vibrating mechanical systems with random parametric excitation, Proc. 14th IUTAM Congr. (1976): 439—550.

44 Ariaratnam, S. T., Tam, D. S. F., Moment stability of coupled linear systems under combined harmonic and stochastic excitation, Stochastic Problem in Dynamics, B. L. Clarkson (Eds.), Pitman (1977): 90—105.

45 Schmidt. G., Parametererregte Schwingungen. Deutscher Verl. der Wiss., Berlin (1975).

46 Luukkala, M., Fine structure of fractional harmonic phonons, *Phys. Lett.*, **25 A** (1967): 76—77.

47 Adler, L., Breazeale, M. A., Generation of fractional harmonics in a resonant ultrasonic wave system, *J. Acoust. Soc. Am.*, **48** (1970): 1077—1083.

48 Eller, A. I., Fractional-harmonic frequency pairs in nonlinear systems, *ibid*, **55** (1973): 871—873.

49 Nayfeh, A. H., Mook, D. T., Marshall, L. R., Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motions, *J. Hydronautics*, **7** (1973): 145—152.

50 Froude, W., Remarks on Mr. Scott Russell's paper on rolling, *Trans. Inst. Naval Arch.*, **4** (1863): 232—275.

51 Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Механика сплошных сред, Москва (1953): 763—766.

52 Davidson, R. C., Methods in Nonlinear Plasma Theory. Academic, New York (1972).

53 Weiland, J., Wilhelmsson, H., Coherent Nonlinear Interaction of Waves in Plasmas, Pergamon Press, Oxford, New York (1977): 42—50.

54 Павленко, А. П., Голубев, В. Б., Определение характеристик установившихся многочастотных автоколебательных режимов, Изд. выш. учеб. заведений, Машиностроение, 2 (1977): 98—102.

RESONANCE WITH SEVERAL FREQUENCIES IN NONLINEAR VIBRATION THEORY

Dai De-cheng

(Nanjing Institute of Technology)