

# 有限变形塑性动力学问题

太原工学院 杨桂通

## 一、引言

塑性动力学通常认为包括结构塑性动力响应, 弹塑性应力波的传播及其相互作用, 以及一些专门的工程应用问题, 例如穿甲与侵彻问题、动态断裂问题等。属于基础理论的还有固体材料动态特性, 动态本构关系理论以及材料在高速变形条件下的实验技术的研究等等。

在小变形范畴, 塑性动力学的研究工作已有较长的历史, 50年代以后是一个蓬勃发展的时期, 不少重要的结果是在最近二、三十年内取得的, 详见文献[1—10]。目前, 这方面的工作仍在继续, 许多工程问题仍在用小变形理论来处理, 并取得较好的结果。但必须指出, 无论是结构动力响应问题还是波的传播问题, 小变形理论有可能在一些情况是不合适的, 也有不少给问题的解带来误差过大或根本错误结论的例子。例如一个两端固定梁受均匀冲击载

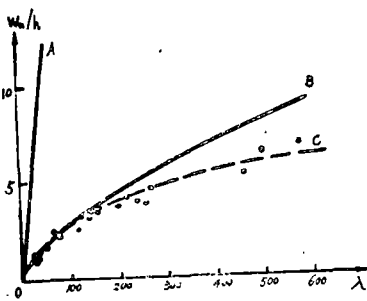


图 1

荷作用, 若按刚塑性小变形理论分析, 则可得图 1 中曲线 A 所表示的挠度与外部作用的关系<sup>[11]</sup>。若按有限变形理论分析, 则得曲线 B<sup>[12]</sup>, 而实验结果<sup>[13]</sup>却如曲线 C 所示。图中  $W_0$  为梁的中点挠度,  $h$  为梁高,  $\lambda = 4K_0/(P_0 h)$ ,  $K_0$  为外界在初始时刻所给予系统的动能,  $2l$  为梁的半跨长,  $P_0 = l/(4M_0)$  为静态极限载荷。图中实验点为 Symonds 等用软钢试件所做的实验结果。由图 1 可见, 小变形理论所给出的结果与实验结果相差极大。由此可见, 结构塑性动力响应问题的有限变形

理论有着重要的实际意义。象穿甲问题中靶板的未穿透变形分析就是一个典型的无限大薄板的非弹有限变形动力问题。

对于应力波的问题来说, 当应力水平不高的连续波在介质中传播时, 质点的位移较小, 一般地作为小变形问题处理, 便可得到足够精确的解答, 象波在细杆中的传播就是这样。但是, 关于塑性波的研究有两个通常的途径, 研究杆中应力波(一维应力)是一个代表的方面, 另一方面是通过波在板中的传播(一维应变波)来研究塑性波传播的有关规律。在这种情况下, 由于平板的正撞击, 可以实现更高的应变速度, 且由于波在平板中传播时受到横向约束, 板的运动主要地以膨胀反应来控制, 应力和压缩性的变化对于确定波形起着重要作

用。此时，热力学效应，塑性变形产生的熵变，高应力下的弹性常数的变化，弹性体积压缩变形的非线性性质，以及有限变形等均应计入。特别是当有激波发生时，应力、质点速度和应变在跨越激波阵面时均有间断，而比熵的间断要用应变间断量的三次项来描述。所以，在研究一维应变弹塑性波时，应当采用有限变形理论。

以上说明，在塑性动力学问题中，有限变形理论或大变形问题是一个重要的研究课题，已经引起了人们的广泛注意。但应当说，关于这一问题的研究，现在还处在一个开始阶段，系统的研究成果不多。这是由于固体材料在高速变形条件下呈现出一系列不同于静态的特性，所以使得塑性动力学问题的数学模型变得非常复杂，一般都要处理非线性偏微分方程的边值-初值问题。在这种情况下，再引进有限变形（几何非线性）自然问题变得更加困难，一般只能设法用近似方法求得数值解，只在少量特殊情况下才有希望求得封闭解或渐近解。

以下简单介绍这方面的情况。

## 二、基本关系式

引进流动坐标系  $x_i$  和相应于物体参考状态的参考坐标系  $X_i$ ，（ $i=1, 2, 3$ ）。令物体在  $X_i$  坐标方向的位移矢量为  $U_i$ ，于是有

$$x_i = X_i + U_i \quad (1)$$

若  $F_{i,j}$  为物质变形梯度， $G_{i,j}$  为 Green 变形张量，则有：

$$F_{i,j} = \delta_{i,j} + U_{i,j} \quad (2)$$

$$G_{i,j} = F_{K_i} F_{K_j} = \delta_{i,j} + U_{i,j} + U_{i,j} + U_{K_i} + U_{K_j} \quad (3)$$

Green 应变张量  $\gamma_{i,j}$  为

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j} &\equiv \frac{1}{2}(G_{i,j} - \delta_{i,j}) \\ &= \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{i,j} + U_{K_i} + U_{K_j}) \end{aligned} \quad (4)$$

物体的弹塑性变形可以进行分解，即将物体变形后在  $t$  时刻所达到的状态分解为两个步骤来完成。可以先完成弹性变形再完成塑性变形这样两步叠加；也可以先完成  $t$  时刻的塑性变形，而应力为无应力状态，再完成  $t$  时刻的弹性变形而达  $t$  时刻的最终状态，如图 2 所示。

实际上，在  $t_0$  时刻占有空间位置  $B$  内的质点  $X_K$ ，在  $t$  时刻位于  $B'$  中的位置为  $x_k$ （ $K, k=1, 2, 3$ ），即

$$x_k = x_k(X_K, t) \quad (5)$$

或者说，在  $t$  时刻占有空间坐标为  $x_k$  的质点，其初始位置为  $X_K$ ，即

$$X_K = X_K(x_k, t) \quad (6)$$

若引进中间构形坐标为  $X'_i$ （ $i=1, 2, 3$ ），则有

$$\bar{X}_K = X_K(X'_K, t), \quad x_k = x_k(X'_K, t) \quad (7)$$

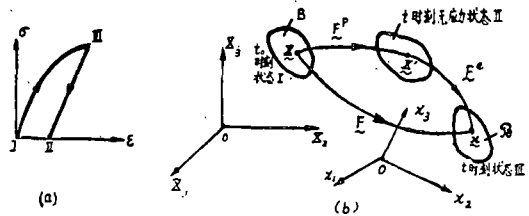


图 2

则物质变形梯度  $\mathbf{F}$  为

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X'_K} \cdot \frac{\partial X'_K}{\partial X_j} \quad (8)$$

由图 2 知

$$F^p_{jK} = \frac{\partial X'_K}{\partial X_j}, \quad F^l_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X'_K} \quad (9)$$

于是有

$$F_{ij} = F^l_{iK} F^p_{jK} \quad (10)$$

或

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^l \mathbf{F}^p \quad (11)$$

即：塑性变形梯度  $\mathbf{F}^p$  前乘以弹性变形梯度  $\mathbf{F}^l$ ，即得总变形梯度。

在小变形情况下，总应变可分解为弹性应变和塑性应变之和，即

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^l_{ij} + \varepsilon^p_{ij} \quad (12)$$

从而总应变率也可以分解为两部分之和

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^l_{ij} + \dot{\varepsilon}^p_{ij} \quad (13)$$

在有限变形情况下，总应变率  $D_{ij}$  是否也可按加法原则分解为弹性应变率  $D^l_{ij}$  和塑性应变率  $D^p_{ij}$ ，目前还在讨论中，详见文献[14—19]。

在讨论有限变形问题时，首先遇到的是选择合适的应力和应变的描述法。自然我们可以采用 Cauchy 应力（即真应力）和与之相应的 Almansi 应变张量。但我们知道，Cauchy 应力定位在整体坐标系即参考标架  $X_i$  上，而不随物体质点变动，因为真应力与变形后的物体相关联。这就给写本构方程带来困难，所以通常采用第二 Piola-Kirchhoff 应力（或 Kirchhoff 应力），其参考坐标随质点一起运动，而单元面积则基于未变形前的物体，与之相应的应变为 Green 应变张量。

这样，若有在流动构形中的任意体积为  $V$ ，表面为  $S$  的物体，其参考状态的体积为  $V_0$ ，表面为  $S_0$ 。设面力为  $T_i$ ，则 Kirchhoff 应力张量  $S_{ij}$  满足

$$T_K = F_{ij} S_{ij} N_K = S_{ij} (\delta_{ij} + U_{i,j}) N_K \quad (14)$$

此处  $N_K$  是  $S$  面外法线方向单位矢量的分量。运动方程为

$$(F_{ij} S_{ij})_{,K} + \rho_0 (f_i - \dot{v}_i) = 0$$

或

$$[(\delta_{ij} + U_{i,j}) S_{ij}]_{,K} + \rho_0 (f_i - \dot{v}_i) = 0 \quad (15)$$

其中  $\rho_0$ ， $f_i$  分别为物体的密度和体力， $\dot{v}_i$  为运动加速度

$$\dot{\mathbf{v}} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \mathbf{v}_{,K} \nu_K \quad (16)$$

Kirchhoff 应力张量与 Cauchy 应力张量  $\sigma_{ij}$  间的关系为

$$S_{ij} = \sqrt{|G_{ij}| / |g_{ij}|} \sigma_{ij} \quad (17)$$

此处  $G_{ij}$ ， $g_{ij}$  分别为变形后状态与变形前状态的度量张量。式 (15) 可写成 Galerkin 积分形式

$$\int_V \{ [S_{ij} (\delta_{ij} + U_{i,j})]_{,K} + \rho (f_i - \dot{v}_i) \} \delta v_i dV \quad (18)$$

弹性屈服不等式为

$$f(S_{ij}) \leq 0 \quad (19)$$

当取Mises条件时

$$f(S_{ij}) = 3J_2 = \frac{3}{2} G_{ik} G_{jl} S_{ij} S_{kl} \quad (20)$$

其中  $S'_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} G^{ij} G_{kl} S_{kl}$  为应力偏量。

应变率无关理论的本构关系为

$$dS^{ij} = E^{ijkl} (d\gamma_{kl} - d\gamma_{kl}^p) \quad (21)$$

或

$$dS^{ij} = (E^{ijkl} + E_p^{ijkl}) d\gamma_{kl} = D^{ijkl} d\gamma_{kl} \quad (22)$$

其中  $E^{ijkl}$  是弹性模量张量,  $E_p^{ijkl}$  是塑性模量张量。

在线性强化情况下, 有

$$D^{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{1}{2} (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{jk}) + \frac{\nu}{1-2\nu} G^{ij} G^{kl} \right] + E_p^{ijkl} \quad (23)$$

其中

$$E_p^{ijkl} = -\frac{3}{4} H^{-1} E^{ijmn} E^{pqkl} S'_{mn} S'_{pq} \quad (24)$$

$$H = E' J_2 + \frac{3}{4} E^{rsuv} S'_{rs} S'_{uv} = \left( E' G_{rs} G_{uv} + \frac{3}{4} E^{rsuv} \right) S'_{rs} S'_{uv} \quad (25)$$

$E'$  为线性强化模量 ( $= dS_{ij}/d\gamma_{ij}^p$ ),  $H$  称为强化参数。

当采用应变率相关理论时, 屈服函数可写为

$$F = \frac{1}{H} f(S_{ij}, \gamma_{ij}^p) - 1 \quad (26)$$

$H$  由下列微分方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{H} &= N_{ij} \dot{\gamma}_{ij}^p && \text{当 } \dot{\gamma}_{ij}^p \neq 0 \text{ 时} \\ \dot{H} &= 0 && \text{当 } \dot{\gamma}_{ij}^p = 0 \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

来确定。引进 Helmholtz 自由能  $\psi$ 。

$$\psi = \psi(\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^p) \quad (28)$$

则应力张量  $S_{ij}$  为

$$S_{ij} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_{ij}} \quad (29)$$

若采用 Perzyna 理论<sup>[20]</sup>, 则

$$\dot{\gamma}_{ij}^p = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial S_{ij}} \quad (30)$$

而应力率为

$$\dot{S}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\gamma}_{kl} + D_{ijkl} \dot{\gamma}_{kl}^p \quad (31)$$

此处 
$$E_{ijkl} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}}, \quad D_{ijkl} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}}$$

此外, 尚有其他类型的本构关系 [21-23]。

### 三、几个重要定理

以下给出在有限变形条件下的几个重要的塑性动力学的基本定理。主要是具有齐次本构方程的材料的结构变形的限界定理和极值原理, 以及一般性原理。

**虚速度原理** 和静力学中虚位移原理相应的在动力学问题中有如下虚速度原理: 外力在运动许可的虚速度  $\delta v$  上所完成的总虚功率等于总虚应变能率 (包括耗散能率), 即

$$\int_V S_{ij} \delta \dot{\gamma}_{ij} dV = \int_V \rho (f_i - \dot{v}_i) \delta v_i dV + \int_S T_{ij} \delta v_j dS \quad (32)$$

**位移限界定理** 在有限变形条件下, 我们可以从沿极值路径下的最小总势能原理或最小总余能原理导出动位移的限界公式, 例如由最小总势能原理 (沿极值路径)

$$\int_V W[q_i^*(t)] dV - \int_S T_{ij} U_{ij}^* dS \leq \int_V W[q_i^*(t)] dV - \int_S T_{ij} U_{ij}^* dS \quad (33)$$

其中  $U_{ij}^*$ ,  $q_i^*$  分别为满足位移边界条件及相容条件的位移场和应变场,  $U_{ij}^*$ ,  $q_i^*$  分别为同时由沿极值路径导出的应力  $Q_{ij}$ ; 满足运动方程和应力边界条件的位移场和应变场。注意到

$$W[q_i^*(t)] = \rho \int_0^{q_i^*(t)} Q_{ij} dq_{ij} \leq W[q_i^*(t)] = \int_0^{q_i^*(t)} Q_{ij} dq_{ij}$$

则在冲击载荷作用下有

$$\int_V W[q_i(t)] dV \leq \int_V W[q_i(t)] dV = K_0 - K(t) \quad (34)$$

其中 
$$K_0 = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{U}_i^0 \dot{U}_i^0 dV$$

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{U}_i(x, t) \dot{U}_i(x, t) dV$$

于是可导出 [12]

$$U_{An}^f \leq U_{An}^s \quad (35)$$

此处  $U_{An}^f$  是物体  $A$  点  $n$  方向的最终时刻 ( $t = t_f$ ) 的位移,  $U_{An}^s$  是相应于该点同一方向的静态极值路径下的位移。

运动终止时刻  $t_f$  为 [12]

$$t_f \geq \int_V \rho \dot{U}_i^0 \phi_i dV / \int_V Q_{ij} K_{ij} dV \quad (36)$$

其中  $\phi_i$  是与时间无关的速度场 ( $= \dot{U}_i^0$ ),  $K_{ij}$  是与  $\phi_i$  相应的应变率场 ( $= \dot{q}_{ij}^0$ )。

**极值原理** L. H. N. Lee 和 C. M. Ni 把 Тамуж 关于刚塑性体小变形理论的加速

度最小原理推广到有限变形情况, 即有<sup>[24]</sup>  $\delta J(\ddot{U}_i) = 0$  (37)  
 成立。其中泛函

$$J(\ddot{U}_m) = \int_V \rho \frac{\ddot{U}_m^2}{2} dV + \int_V S_{KL} \dot{\gamma}_{KL} dV - \int_{S_T} T_m \ddot{U}_m dS - \int_V \rho f_m \ddot{U}_m dV \quad (38)$$

其中 $\ddot{U}_i$ ,  $\dot{\gamma}_{KL}$ 分别为机动许可的加速度场和应变加速度场。 $\delta \ddot{U}_m$ 为在 $V$ 内的 $C^3$ 类函数, 且在 $S_u$ 上等于零,  $S_T$ 和 $S_u$ 分别为给定面力和位移速度的边界,  $S_T + S_u = S$ 。

此处泛函 $J(\ddot{U}_i)$ 为加速度 $\ddot{U}_i$ , 速度 $\dot{U}_i$ , 位移 $U_i$ 及其历史的函数。式(37)说明, 在所有满足边界条件的加速度场中, 满足运动方程的加速度场, 使泛函 $J$ 取最驻值, 且可以证明为最小值。

应当指出, 若 Kirchhoff 应力依赖于应变加速度 $\ddot{\gamma}_{ij}$ , 则上述最小原理存在着某些困难, 概可在某些类型的加速度场情况下, 式(37)才能成立。此时要求

$$\dot{\gamma}_{KL} (S_{KL}^* - S_{KL}) \leq 0, \quad \text{在 } V \text{ 内} \quad (39)$$

及  $S_{KL} = S_{KL}^*$ , 在 $S_T$ 上

其中带“\*”号的量为真实状态的量。当动力屈服面与静力屈服面重合时, 对于过应力模型理论, 必然有 $S_{KL}^*$ 在屈服面上, 而且有 $\dot{\gamma}_{KL}$ 正交于屈服面, 从而对外凸屈服面来说, 式(37)成立。而在其他一些情况, 式(39)第一式则尚待证明。

在结构塑性动力响应分析问题中, 模态解方法是一种有效的方法。有关的极值原理已得到证明, 见文献[25—30]。然而, 对于有限变形情况, 由于定常模态不复存在, 而需构造瞬时模态序列来求模态解<sup>[31—33]</sup>, 与之相应的极值原理或限界定理尚未见到报道。

#### 四、结构塑性动力响应

在小变形条件下发展了模态解方法<sup>[25—30]</sup>。这种方法与弹性振动问题中的振型分解法相类似, 把位移函数 $u_i(x, t)$ 分离变量, 写成

$$u_i(x_j, t) = T(t) \phi(x_j) \quad (40)$$

这种定常模态函数 $\phi(x_j)$ 在运动方程、协调方程为线性方程组及本构方程为齐次方程时是存在的。就是说, 在小变形情况, 不论是弹性、粘性或刚塑性、刚-粘塑性材料的结构, 定常模态是存在的。在有限变形情况, 这种定常模态一般是不存在的。为了解决这一问题, Symonds 和 Chon (1974, 1977, 1979)<sup>[31—33]</sup>发展了瞬时模态方法, 即从不同时刻的模态序列来求全过程的模态解。实际上, 对于每一个指定的瞬时 $t$ 的模态来说, 位移函数 $w'(x, t)$ 便是固定的。因而, 我们有一个非线性本征值问题。若 $t$ 时刻的非线性本征值问题已经解出, 给出了相应的位移速度 $\dot{w}_*(x, t)$ 和加速度 $\ddot{w}_*(t)$ 和 $\phi_1(r)$ ,  $\phi'_1(t)$ , 则在 $t + \Delta t$ 时刻的 $w(x, t)$ 和 $w'(x, t)$ 便可近似地得到, 例如

$$\left. \begin{aligned} w(r, t + \Delta t) &\approx w(r, t) + (\Delta t) \dot{w}_*(t) \phi_1(r) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \ddot{w}_*(t) \phi_1(r) \\ w'(r, t + \Delta t) &\approx w'(r, t) + (\Delta t) \dot{w}'_*(t) \phi'_1(r) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \ddot{w}'_*(t) \phi'_1(r) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

由此重复计算, 不难得解. 从对圆板大变形问题的解的结果来看, 理论结果接近于实验结果<sup>[33]</sup>.

求解有限变形的梁、板一类结构的塑性动力响应问题时, 若采用模态解的概念, 则总要遇到求解非线性本征值问题. 现以圆薄膜大挠度问题为例<sup>[34]</sup>, 说明这种情况. 此时, 运动方程为

$$(rN_r w')' = \rho r \ddot{w} \quad (42)$$

此处  $(r, \theta)$  为极坐标系,  $N_r$  为径向薄膜力,  $w$  为竖向挠度,  $\rho$  为单位面积质量. 本构关系为 (粘塑性材料)

$$\frac{N_r}{\bar{N}_0} = \left( \frac{\dot{\lambda}_r}{\dot{\lambda}_0} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (43)$$

其中  $\lambda_r = -\frac{1}{2}(\dot{w}')^2$  为曲率,  $\lambda_0 = 0$ ,  $\bar{N}_0 = \bar{\sigma}_0 h$  为塑性膜力,  $h$  为膜厚,  $\sigma_0$ ,  $\bar{\lambda}_0$ ,  $n$  为由实验确定的常数.

将以上关系式代入式 (42) 可得下列非线性方程:

$$\frac{\bar{N}_0}{(\bar{\lambda}_0)^{1/n}} \left\{ r w' (\dot{w}' w')^{1/n} \right\}' = \rho r \ddot{w} \quad (44)$$

或

$$a^{\alpha/2} [r w' (\dot{w}' w')^{\alpha/2}]' = b r \ddot{w} \quad (45)$$

此处  $a, b, \alpha$  均为无量纲的常数, 式 (45) 中的所有量已经无量纲化, 省略了在原有量纲的量上所加的区别符号, 例如无量纲的  $t^* = tV_0/h$ , 而星号省略. 问题的初始条件为

$$w(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = \dot{w}_0(r) = f(r) \quad (46)$$

圆膜中心有

$$\dot{w}(0) = V_0$$

边界条件为

$$w'(0, t) = 0, \quad w(R, t) = 0 \quad (47)$$

问题归结为求解非线性偏微分方程的初值-边值问题 (45), (46), (47). 由模态解概念, 取  $w(r, t) = T(t)\phi(r)$ , 并对形函数  $\phi(r)$  按

$$\int_0^1 \phi^2(r) r dr = 1 \quad (48)$$

正则化. 变换后可得下列非线性本征值问题:

$$[r(\phi')^{\alpha+1}]' + \Lambda^2 r \phi = 0 \quad (49)$$

$$\phi'(0) = \phi(1) = 0 \quad (50)$$

而函数  $T(t)$  则由一个非线性常微分方程所控制.

前已说明, 对于非线性运动方程, 定常模态是不存在的. 此处对于圆薄膜这样的特殊问题, 从物理上的考虑做了采用定常模态的近似处理. 模态的形式只与式 (49) 中的  $\alpha$  有关, 而与  $\bar{N}_0, \bar{\lambda}_0$  无关. 当  $\alpha \rightarrow 0$  时则导致线性本征值问题, 此时对应于理想塑性问题. 在一般情况, 则需求解非线性本征值问题. 目前可有两种途径:

1) 当  $\alpha$  为小参数时, 则可采用摄动法在线性本征值问题的解附近得到渐近解. 为此, 可采用 Rayleigh-Schrödinger 方法将  $\phi_n$  和  $\Lambda^2$  渐近展开为

$$\phi_n = \phi_{n0} + \alpha \phi_{n1} + \dots, \quad \Lambda_n^2 = \Lambda_{n0}^2 + \alpha \Lambda_{n1}^2 + \dots \quad (51)$$

一般地, 其一级近似解是容易得到的.

2) 将非线性本征值问题化为非线性初值问题来解. H. B. Keller (1968) [36] L. B. Rall (1968) [36] 曾做了这方面的工作(文献未见), C. L. Huang (1974) [37] 对此做了修正, 即将 Newton-Kantorovich 迭代法与延拓法结合起来求解. 我们知道, 用电子计算机解非线性初始问题已有不少成功的方案, 例如 Newmark- $\beta$  法, Wilson- $\theta$  法, Hilber- $\alpha$  法等等.

这样, 我们在塑性动力响应问题中所遇到的非线性本征值问题便不难处理.

此外, 当用有限元法求解时, 我们有

$$\Omega = \int_V \{ [S_{ij}(\delta_{ij} + U_{j,i})],_{K} + \rho(f_i - \ddot{U}_i) \} \delta U dV \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \Omega = \int_{V_0} (S_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}) dV_0 = \int_S [S_{ij} N_i (\delta_{ij} + \dot{U}_{j,i}) \tilde{U}_K] dS \\ + \int_{V_0} \rho (f_i - \ddot{U}_i) \tilde{U}_i dV \end{aligned} \quad (53)$$

其中  $\tilde{\gamma}_{ij}$ ,  $\tilde{U}_i$  分别为虚应变率和虚速度. 假定  $\Omega$ ,  $\dot{U}_i$  和  $S_{ij}$  可以对小参数  $\varepsilon$  展成 Taylor 级:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Omega^0 + \varepsilon \Omega^1 + \varepsilon^2 \Omega^2 + \dots \\ S_{ij} &= S_{ij}^0 + \varepsilon S_{ij}^1 + \varepsilon^2 S_{ij}^2 + \dots \\ \dot{U}_i &= \dot{U}_i^0 + \varepsilon \dot{U}_i^1 + \varepsilon^2 \dot{U}_i^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

则可用摄动法求解.

S. R. Bodner 和 Y. Partom 用基于位错动力学的本构关系解了厚球壳的大变形等问题 [22]. 他们仍假定总应变率可分解为弹性应变率和塑性应变率之和. 如前所述, 在什么情况下可完全适用, 什么情况下则带有近似性质, 什么情况下不适用, 尚待进一步研究.

## 五、弹塑性应力波

如前所述, 在应力波的传播问题中, 一维应变波的有限变形理论具有重要的实际意义. 此时, 波动方程为

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} = \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} \quad (55)$$

此处  $x_1$  为波的传播方向,  $v_1$  为  $(x_1)$  质点速度, 相容条件为

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} \quad (56)$$

本构方程若取 Orowan 公式

$$\dot{\gamma}_1^p \equiv \Phi = bNv \quad (57)$$

其中  $b$  为 Burgers 矢量,  $N = N(\gamma^p)$  为可动位错密度,  $v = v(\tau, \gamma^p, \theta)$  为平均位错速度,  $\dot{\gamma}^p$  为塑性应变率 ( $\equiv \Phi$ ),  $\theta$  为绝对温度. 由此可得



$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 c_1^2} \frac{\partial T_{11}}{\partial t} - \frac{2 \lambda_1^p K}{3 \rho_0 c_1^2} \Phi \quad (58)$$

此处  $c_1^2$  和  $K$  为  $\gamma_1$  和  $\gamma_1^p$  的函数。

在一维应变时, 变形梯度张量为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^p = \begin{bmatrix} \gamma_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2^p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^l = \begin{bmatrix} \gamma_1^l & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^l & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^l \end{bmatrix}$$

不可压缩条件化为  $\gamma_1^l (\gamma_2^l)^2 = 1$ . 考虑到  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^l \mathbf{F}^p$ , 有  $\lambda_1^l = \lambda_1 / \lambda_1^p, \lambda_2^l = (\lambda_1^p)^{1/2}$ . 进一步可按通常的办法得出一维应变(有限变形)弹塑性波的特征线和沿特征线的相容关系式为

$$dx_1 = \pm c_1 dt \quad (59)$$

和

$$dT_{11} \mp \rho_0 c_1 dv_1 = \frac{2}{3} \gamma_1^l K \Phi dt \quad (60)$$

从而可沿特征线进行数值积分求解, 详见文献[33--41].

以下考虑非线性弥散波. 若计入微观结构效应, 则在一维情况下, 有  $\varepsilon_{11} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon''_{11}$ , 其中  $\varepsilon'_{11}$  为非线性弹性应变:

$$\varepsilon'_{11} = (\lambda + 2\mu) \left[ U_{1,1} + \frac{3}{2} (1 + m_0) U_{1,1}^2 \right], \quad m_0 = \frac{2}{3} E_1 E_0^{-1} \quad (61)$$

$E_0, E_1$  分别为一次和二次项的弹性常数.  $\varepsilon''_{11}$  为考虑物质微观结构效应的关系式<sup>[42]</sup>:

$$\varepsilon''_{11} = -\frac{h^2}{4m} U_{1,111} \quad (62)$$

此处  $h$  是 Planck 常数,  $m$  是质点质量,

将以上关系式代入运动方程, 可得

$$c_0^2 [1 + 3(h + m_0) U_{1,1}] U_{1,11} + c_0^2 l_0^2 U_{1,111} - \ddot{U}_1 = 0 \quad (63)$$

其中  $l_0$  是具有长度量纲的参数. 此方程仍可采用特征线法, 为此引进新变量

$$\xi = c_0 t - X, \quad \tau = \varepsilon X \quad (64)$$

后, 可得一阶迁移方程为

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \frac{(1 + m_0)}{\varepsilon c_0} \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{l_0^2}{\varepsilon} \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \xi^3} = 0 \quad (65)$$

其中  $\alpha$  为波幅因子, 定义为  $\alpha \equiv -c_0 U_0$ . 而  $U_0$  则为若将  $U$  展成级数  $U = \sum \varepsilon^i U^i$  时的第一项近似值.  $\varepsilon$  的指标已经省略. 显然,  $\varepsilon$  为待定小参数.

类似地, 可以得到二阶迁移方程. 从所得到的方程的结构可以知道, 式(63)的一级近似式, 即一阶迁移方程为一典型的 KdV 方程. 而其二级近似式, 即二阶迁移方程则为非齐次 KdV 方程.

对于一维圆截面杆的情况, 若杆轴方向为  $X^3$  方向, 则式(61)经 Rayleigh 改进后, 可改写为<sup>[43]</sup>

$$\varepsilon''_3 = \frac{1}{2} \rho v^2 R^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial t^2} \quad (67)$$

若计入粘性效应, 则尚需增加  $\eta \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t}$  项,  $\eta$  为粘性系数,  $\nu$  为泊松系数,  $R$  为杆截面的半径。

由此有

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \frac{1+m_0}{\varepsilon c_0} \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{n_0}{\varepsilon c_0} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{l_0^2}{\varepsilon} \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \xi^3} = 0 \quad (68)$$

此处  $l_0 = \nu R$ ,  $\xi = c_0 t - X^3$ ,  $\tau = \varepsilon X^3$ ,  $n_0 = \eta \rho_0^{-1}$ 。此方程为 KdV-Burgers 方程, 同时考虑了耗散与弥散效应。这类方程已有成熟的方法可以求解, 例如散射反演法等<sup>[44-46]</sup>。从而可得到问题的孤波解。

有限变形塑性动力学问题, 实际上是固体动力学问题中的物理非线性和几何非线性问题。如上所述, 问题的基本理论还很不完善, 问题的求解也十分困难, 目前的实验技术和实验手段也不多。然而, 由于这类问题在工程技术和科学研究的一些领域内的重要性, 塑性动力有限变形理论已引起了广泛的注意, 研究工作将会进入一个新阶段。国内研制成功的 Hopkinson 杆技术, 轻气炮实现高速平板正碰撞技术, 大型激波管等已在开展各种研究工作, 有的成果是可贵的。

## 参 考 文 献

- 1 Cristescu, N., Dynamic Plasticity, North-Holland(1967).
- 2 Размагулин, X.A., Демьянов, Д.А. и Прочность при интенсивных и кратковременных нагрузках, ФМ.М. (1961).
- 3 Goldsmith, W., Impact, London(1960).
- 4 Nowacki, W.K., Stress Waves in Non-Elastic Solids(1978).
- 5 王仁, 在冲击载荷作用下结构塑性分析近况, 中国力学学会第一次年报分析非线性理论学术讨论会论文集(1965)1-22.
- 6 王仁, 熊祝华, 董文彬, 塑性力学基础, 科学出版社(1982): 第十一章.
- 7 杨桂通, 熊祝华编著, 塑性动力学, 清华大学出版社(待出版).
- 8 Jones, N., A literature review of the dynamic plastic response of structures, Shock Vib. Dig., V.7, 8(1975):89-105.
- 9 ---, Recent progress in the dynamic plastic behavior of structures, Part I, ibid, V.10, 9(1978):21-33; Part II, ibid, V.10, 10(1978):13-19.
- 10 Lee, L.H.N., Dynamic plasticity, Nuclear Engng. and Design, V.27, 3(1974):386-397.
- 11 Symonds, P.S., Mntel, T.J., Impulsive loading of the plastic beams with axial constraints, J.Mech.Phys.Solids, V.6, 1(1958):186-202.
- 12 ---, Chon, C.T., Bounds for finite deflections of impulsively loaded structures with time-dependent plastic behavior, Int.J.Solids Structures, V.11(1975):403-423.
- 13 ---, Jones, N., Impulsive loading of fully clamped beams with finite deflections and strain-rate sensitivity, Int.J.Mech.Sci., V.14(1972):49-69.
- 14 Lee, E.H., McMeeking, R.M., Concerning elastic and plastic components of deformation, Int.J.Solids Structures, V.16(1980):715-721.
- 15 ---, Elastic-plastic deformation at finite strain, J.Appl.Mech., V.36, 1(1969):1-6.
- 16 Nemat-Nasser, S., Decomposition of strain measures and their rates in finite deformation elastoplasticity, Int.J.Solids Structures, V.15(1979):155-166.
- 17 Lehmann, Th., On large elastic-plastic deformation, Proc.Int.Symp.on Foundation of Plasticity, Warsaw(1972); Noordhoff, Amsterdam(1974).
- 18 Guo, Zhong-heng, A note on the decomposition of elastoplastic finite deformations, Int.J.Solids Structures, V.17, 9(1981):925-927.
- 19 Lee, E.H., Some comments on elastic-plastic analysis, ibid, V.17, 9(1981):859-872.
- 20 Perzyna, P., Fundamental problems in viscoplasticity, Adv.in Appl.Mech., V.9(1966).
- 21 Bonder, S.R., Partom, Y., Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials, J.Appl.Mech., V.42(1975):385-389.
- 22 ---, ---, A large deformation elastic-viscoplastic analysis of a thick-walled spherical shell, ibid, V.39, 3(1972):751-759.
- 23 ---, ---, A representation of elastic-viscoplastic strain hardening behaviour for generalized straining histories, Mechanical Properties at High Rates of Strain, ed.Harding J., London, Inst.of Phys.(1974):102-110.

- 24 Lee, L.H.N., Ni, C.M., A minimum principle in dynamics of elastic-plastic continua at finite deformation, Proc. Int. Symp. on Foundations of Plasticity, Warsaw (1972).
- 25 Martin, J.B., Symonds, P.S., Mode approximations for impulsively-loaded rigid-plastic structures, J. Engng. Mech. Division, V. 92, EM5 (1966):43-66.
- 26 ---, Lee, L.S.C., Approximate solution for impulsively loaded elastic-plastic beams, J. Appl. Mech., V. 35 (1968):803.
- 27 Lee, L.S.C., Mode responses of dynamically loaded structures, *ibid*, V. 39 (1972):904-910.
- 28 Martin, J.B., Extremum principles for a class of dynamic rigid-plastic problems, Int. J. Solids Stru., V. 8 (1972):1185.
- 29 Symonds, P.S., Chon, C.T., On dynamic plastic mode-form solutions, J. Mech. Phys. Solids, V. 26 (1978):21-25.
- 30 ---, Wierzbicki, T., On an extremum principle for mode-form solutions in plastic structural dynamics, J. Appl. Mech., V. 42, 3 (1975):630-640.
- 31 ---, Chon, C.T., Approximation techniques for impulsive loading of structures of time dependent plastic behavior with finite deformation, Proc. Inst. of Phys. Conf. on Mechanical Properties of Materials at High Strain Rates, Series No. 21 (1974):299-473.
- 32 Chon, C.T., Symonds, P.S., Large dynamic plastic deflection of plates by mode method, J. Engng. Mech. Div., V. 103, EM1 (1977):169-187.
- 33 Symonds, P.S., Chon, C.T., Finite viscoplastic deflections of an impulsively loaded plate by the mode approximation technique, J. Mech. Phys. Solids, V. 17 (1979):115-133.
- 34 Wojno, W., Wierzbicki, T., Perturbation solution for impulsively loaded viscoplastic plate, Int. J. Non-linear Mech., V. 15, 3 (1980):211-223.
- 35 Koller, H.R., Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems, Blaisdell, Waltham, Massachusetts (1968).
- 36 Rall, L.B., Davidenko's methods for the solution of non-linear operator equation, NRC Tech. Summary Report, No. 948, The University of Wisconsin (1968).
- 37 Huang, C.L., A direct method for solving nonlinear eigen-value problems, in Computational Methods in Nonlinear Mechanics, eds. J.T. Oden, et al (1974).
- 38 Lee, E.H., Elastic-plastic waves of one dimensional strain, Proc. 5th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. (1966):405-420.
- 39 ---, Lin, D.T., Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis, J.A.P., V. 38 (1967):19.
- 40 ---, Plastic-wave propagation analysis and elastic-plastic theory at finite deformation, Proc. 17th Sagamore Army Materials Research Conf., in Shock Wave and the Mech. Properties of solids, eds. J.J. Burke, et al (1971).
- 41 Clifton, R.J., On the analysis of elastic/visco-plastic waves of finite uniaxial strain, *ibid* (1971).
- 42 Kaliski, S., Quantum eq. of the theory of elasticity, based on the classical formulation of quantum mechanics, J. Techn. Phys., V. 17 (1976):81-84.
- 43 Энгельбрет, Д.К., Нигул, У.К., Нелинейные волны деформации, "Наука" Москва (1981).
- 44 屠理彰, 非线性方程的迭代求解, 应用数学与计算数学, V. 1 (1979) 21-42.
- 45 Whitham, G.B., Linear and Nonlinear Waves, John Wiley & Son (1974).
- 46 杨桂通, 固体中的非线性波, 力学进展, V. 12 (1982) 94-104.

## PROBLEMS ON DYNAMICS OF FINITE DEFORMATION PLASTICITY

Yang Gui-tong  
(Taiyuan Institute of Technology)