

有相变的颗粒群-气体系统的多相流体力学

清华大学工程力学系 周力行

研究有相变(蒸发、燃烧)的颗粒群-气体系统的多相流体力学,对探讨大气中的云雾,反应堆安全的冷却,火炮的发射,固体火箭尾喷管的流动,各种液雾、金属粉、煤粉与空气的混合与燃烧,煤粉的气化,流态化燃烧,燃烧产物中烟粒的生成与清除,以及各种喷雾冷却、喷雾干燥过程等等都有重要意义。随着计算机技术、数值计算方法及计算流体力学、计算传热学、计算燃烧学的发展,已逐渐有可能对工程中各种实际的有多相流体的装置建立数学模型,进行数值计算,对各种流动、传热、传质的参数作出预估,从而减少实验研究的工作量,这就促使多相流体力学得到了不断发展。

没有相变的颗粒群-气体系统以及有相间质交换的汽泡-液体系统,在管道输送、锅炉汽水流动等领域中已进行了比较充分的研究。相比之下,有相变的颗粒群(液雾或固体颗粒),气体系统的多相流体力学的研究尚不够充分。存在着几种不同的基本观点和基本模型。

在一些早期的简化分析中,不考虑颗粒群的存在对气相流场、温度场、浓度场等等的影响,按单相气体动力学来研究各种气相场,再分析其中颗粒的运动[1]。多相流体力学区别于单相流体力学的观点之一,就是由颗粒群和气体的相互作用(质量、动量和能量的相互作用)关系中来考察气相中以及颗粒群的运动、传热、传质、反应等等。

一、物理学上的相和力学上的相

由物理学或热力学的观点来看,流动系统往往是两相或至多为三相的,例如液滴+气体,固体颗粒+气体,固体颗粒+液体,汽泡+液体,固体颗粒+液滴+气体等等。但是,由力学的观点来看,即使是物理学上的两相系统,例如固体颗粒-气体系统或是液滴-气体系统,也应当看成是多相系统。其原因是,在空间同一点上,不同种类或不同的初始尺寸的颗粒具有不同的速度和温度。因此在多相流体力学中,把不同初始尺寸的颗粒看成是不同的“相”。

二、无滑移模型

最直观而简单的是 Spalding 在70年代初提出的“无滑移”模型[2,3]。其基本点是认为,空间各处不同尺寸和不同经历的颗粒群都和当地气流具有相同的速度,也就是各颗粒相和气相间无“滑移”或无“滞后”。颗粒群类似于气体混合物中某种气体组分,有湍流扩散。颗粒

群与气相间的质量、动量、能量相互作用可以看成是类似于气体混合物中各气体组分的反应一样。现在用一部分守恒关系来说明这一模型。多相流体中的气相连续方程是

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_g v_j) = S \quad (1)$$

第 k 种颗粒相的连续方程为

$$\frac{\partial \rho_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{pk} v_j) = S_{pk} - \frac{\partial J_{pkj}}{\partial x_j} \quad (2)$$

其中 ρ_g, ρ_{pk} 为多相流中气相及 k 种颗粒相表观密度; $\rho_{pk} = n_{pk} m_{pk}$; n_{pk}, m_{pk} 为第 k 种颗粒单位容积中颗粒数及单个第 k 种颗粒质量; S_{pk} 为第 k 种颗粒相变(蒸发、燃烧)造成的物质源; J_{pkj} 为第 k 种颗粒扩散流分量。可以写

$$S = -S_p = -\sum_k S_{pk} \quad \text{或} \quad S + \sum_k S_{pk} = 0$$

以及

$$S_{pk} = n_{pk} m_{pk} = n_{pk} dm_{pk}/dt_{pk}, \quad \rho_p = \sum_k \rho_{pk} = \sum_k n_{pk} m_{pk}$$

多相流总体连续方程为

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_m v_j) = 0 \quad (3)$$

其中 $\rho_m = \rho_g + \rho_p = \rho_g + \sum_k \rho_{pk}$ 为多相混合物密度。如果取 $f_{pk} = \rho_{pk}/\rho_m$ 为多相混合物中第 k 种颗粒相的相对质量浓度, 以及 $J_{pkj} = -D_{pk} \rho_m \partial f_{pk} / \partial x_j$, 则式(2)化成

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m f_{pk}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_m f_{pk} v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_{pk} \rho_m \frac{\partial f_{pk}}{\partial x_j} \right) + S_{pk} \quad (4)$$

式(4)就是 Spalding 推出的颗粒群统计守恒方程或颗粒群扩散方程[1,2], 只不过推导方法略有不同。这个式子形式上完全类似于单相气体混合物中某气体组分的扩散方程。式(4)也可以由颗粒群统计律推出[1], 也就是, 无需以颗粒群当作连续介质的假定为前提。气相动量方程可表达为

$$\frac{\partial (\rho_g v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_g v_j v_i) = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i + S v_i \quad (5)$$

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu_{eff} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

其中 F_i 为气相所承受的体积力; μ_{eff} 为气体有效(层流加湍流)粘性系数。

$S v_i$ 为由于相间质量交换所带来的气相动量变化。用类似观点可以写出气相能量方程及各气相组分守恒方程, 加上相变所产生的源项。

在最简单的一种处理办法中, 甚至完全忽略相变造成的源项, 于是多相流问题就成为通常的气相湍流场加上式(4)所表达的颗粒群守恒关系。利用这种办法曾经计算过有碳粒的扩散火焰[2]及钝体稳定的液雾燃烧[4]。另一方面, 考虑相变造成的源项, 利用上述多相流模型, 曾对有回流的煤粉轴对称二维火焰进行了数值分析[5], 得到了一些有益的结论。

三、多连续介质模型

和上述观点不同的是,由60年代末开始,苏绍礼(S.L.Soo) [6—8]多年来发展了多种连续介质的多相流概念。后来,对这种模型,Drew [9,10]给出了较细致的描述。在这种模型中把气体或不同尺寸或种类的颗粒相都当作连续介质看待,不用单个颗粒运动及其轨迹的概念,只考察颗粒群的集体特性。在使用体平均概念之后,认为各相均占据同一空间,空间各点有对应于各个相的不同的速度、温度等等。这种模型同时考虑湍流扩散和相与相间平均速度的差别,即承认各种颗粒相和气相间有滑移。但是在概念上把多组分气体流动推广于多相流,认为颗粒群和气相间滑移不大,它就是颗粒群相对于气流或多相流整体的湍流扩散所造成的。按这一模型的概念,考虑到 $v_{pkj} \neq v_{gj} \neq v_{mj}$,其中 v_{pkj} , v_{gj} , v_{mj} 分别表示第 k 种颗粒相,气相及多相混合物的速度分量,而且有

$$\rho_m v_{mj} = \rho_g v_{gj} + \rho_p v_{pj} = \rho_g v_{gj} + \sum_k \rho_{pk} v_{pkj}$$

则多相流中气相连续方程,颗粒相连续方程及总体连续方程可分别表达为

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_g v_{gj}) = S \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{pk} v_{pkj}) = S_{pk} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_m v_{mj}) = 0 \quad (8)$$

按本模型的概念,令颗粒群扩散流为

$$J_{pkj} = \rho_{pk} (v_{pkj} - v_{mj}) = -D_{pk} \rho_m \frac{\partial f_{pk}}{\partial x_j}$$

则颗粒群连续方程(7)可化成扩散方程形式

$$\frac{\partial \rho_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{pk} v_{mj}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_{pk} \rho_m \frac{\partial f_{pk}}{\partial x_j} \right) + S_{pk} \quad (9)$$

或者在利用式(8)之后,可化为

$$\rho_m \frac{df_{pk}}{dt_m} = \rho_m \frac{\partial f_{pk}}{\partial t} + \rho_m v_{mj} \frac{\partial f_{pk}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_{pk} \rho_m \frac{\partial f_{pk}}{\partial x_j} \right) + S_{pk} \quad (10)$$

对多相流中各相的动量方程,苏绍礼和Drew的描述方法有所不同。取多相混合物控制体 V (图1),设控制体表面为 A ,控制体中的诸颗粒相与气相交界面总和为 A_p 。设控制体 V 的尺寸显著小于物理系统的特征尺寸,但又包含足够的颗粒数。按照Drew提出的多相流精确方程概念,多相流中气相动量方程可表示为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \beta_g \rho v dV &= \int_A \tau_n dA + \int_V \beta_g \rho F dV + \int_V (\Sigma f_{pk}) dV \\ &\quad - \int_{A_p} \rho_z v_r (v_r - v_s) \cdot n_r dA \end{aligned} \quad (11)$$

其中 β_g 为相函数, 坐标处于气相中时 $\beta_g = 1$, 坐标处于颗粒相中时 $\beta_g = 0$; ρ, v 为气相内部真实密度及真实速度, 不等于体平均的气相表观密度 ρ_g 及表观速度 v_r ; τ_n 为应力; F 为体积力, f_{pk} 为阻力; v_g 为相交界面处气相速度 (相对于惯性坐标系); v_r 为相交界面 (非物质面) 速度; n_r 为相交界面的法向单位向量。

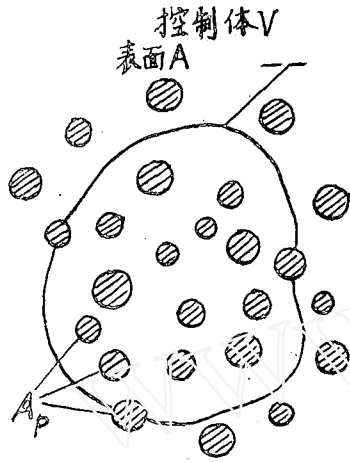


图 1

按照苏绍礼给出的体平均概念, 多相流中的气相动量的平均方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g v_g) + \nabla \cdot (\rho_g v_g v_g) = -\nabla p_g + \nabla \cdot \tau_g + \rho_g F_g + \sum f_{pk} - \frac{1}{V} \int_{A_p} \rho_g v_g (v_g - v_s) \cdot n_g dA \quad (12)$$

式 (11) 及式 (12) 中的 $\int_{A_p} \rho_r v_r (v_r - v_g) \cdot n_r dA$ 或

$$\frac{1}{V} \int_{A_p} \rho_g v (v_g - v_s) \cdot n_g dA$$

代表相间质交换所带来的

动量相互作用。既然多连续介质模型中认为颗粒相也是连续介质, 也可以仿照上述方法写出其动量方程, 例如按苏绍礼的体平均概念, 可以把第 k 种颗粒相动量方程写成

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{pk} v_{pk}) + \nabla \cdot (\rho_{pk} v_{pk} v_{pk}) = -\nabla p_{pk} + \nabla \cdot \tau_{pk} + \rho_{pk} F_{pk} - f_k - \frac{1}{V} \int_{A_{pk}} \rho_{pk} v_{pk} (v_{pk} - v_s) \cdot n_{pk} dA \quad (13)$$

式 (12) 及式 (13) 中, F_{pk} 代表第 k 种颗粒群所受体积力; p_g, p_{pk} 表示气相及第 k 种颗粒相的分压; τ_g 及 τ_{pk} 表示气相及第 k 种颗粒相的应力张量; n_g 及 n_{pk} 表示相交界面法向朝各该相外部的单位向量。用类似办法也可写出颗粒相能量方程。这里的特点是, 作为连续介质的颗粒群, 由于颗粒群, 和气流间脉动的相互作用, 认为颗粒群本身有湍流扩散, 湍流粘性及湍流导热, 从而产生颗粒相的湍流应力、热流等等。对稠密颗粒群 (如流态床中), 还有颗粒与颗粒间碰撞所产生的扩散、粘性、导热等等。

四、有滑移颗粒群的假连续介质模型

以上两种模型都是在 Euler 坐标系中处理颗粒群问题。这两种模型或是不考虑滑移, 或是认为滑移不大, 即滑移纯属湍流脉动造成的。但实际的多相流中常常颗粒群和气流的速度值和方向差别很大, 即滑移是很大的, 不能只用湍流扩散的相互作用来表达这种滑移。此外, 如将苏绍礼的模型用于处理颗粒初始尺寸不均匀同时颗粒尺寸又不断变化的情况, 必须用相与相间不断交换颗粒数的体系。曾用这种办法来研究煤粉燃烧 [11], 方法相当复杂, 工作量很大。另一类模型是只把气体看成是连续介质, 颗粒群则作为滑移的分散群, 或者作为假连续介质来处理。这就是说, 承认颗粒群对气流造成分布于整个体积中的物质源、动量源、热源等等 (就这点着, 似乎颗粒群的作用是连续的), 但又不认为颗粒相有其自身的

压力、剪力、热流等(就这点看,认为颗粒群是分散的)。用这种模型便于考虑颗粒群和气相间较大的滑移,易于把较复杂的单颗粒变化律(如煤粒挥发及多相反应律)耦合进去,并且可以在 Lagrange 坐标系中处理颗粒群问题,数值计算比较方便。60年代初,笔者[12]和 Williams [13]曾分别按照统计群的概念来描述液雾二相流。近年来 Crowe 提出的处理颗粒群的模型[14,15],其基本想法是类似的。这种办法曾用于计算回流区中的喷雾[16]和管内喷雾冷即[17],并被 Lockwood [18], Smoot [19,20]用于煤粉燃烧数值计算中。

按有滑移的颗粒群假连续介质模型,气相连续方程在形式上和式(6)完全一样。作为假连续介质的颗粒群的连续方程也可以写为式(7)的样子,但由于这个模型中原来不具备湍流扩散概念,所以式(7)不能改造成扩散方程形式。按这一模型中的颗粒轨迹概念,由式(7)可以写

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(n_{pk}m_{pk}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(n_{pk}m_{pk}v_{pkj}) &= n_{pk} \frac{dm_{pk}}{dt_{pk}} \\ &= n_{pk} \frac{\partial m_{pk}}{\partial t} + n_{pk}v_{pk} \frac{\partial m_{pk}}{\partial x_j} \end{aligned}$$

由此可得沿轨迹的颗粒数守恒关系

$$\frac{\partial n_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(n_{pk}v_{pkj}) = 0 \quad (14)$$

显然,式(14)只适用于颗粒只有轨迹运动的概念,而不适用于有湍流扩散的情况。例如,在定常一维的情况下,上式成为

$$n_{pk}u_{pk} = \text{const} \quad (15)$$

气相动量方程在形式上仍可利用式(11)或式(12),因为这里不牵涉到颗粒相自身的压力及剪力问题,唯一差别是将其中的 ∇p_g 改成 ∇p (只承认气相有压力)。问题是如何处理物质交换所引起的动量作用项。对有相变的问题,相交界面状况可如图2所示。设 w 代表紧邻相交界面处的气体相对于相交界面的速度, w'' 代表相交界面相对于颗粒中心的内移速度,则相交界面相对于惯性坐标系的速度是 $v_s = v_p + w''$, Crowe 取

$$\int_{A_p} \rho_g v_g (v_g - v_s) \cdot n_g dA = \int_{A_p} \rho_g (v_p + w'' + w) w dA \approx - \int_V v_p S dV$$

于是 Crowe 给出的多相流中气相动量方程是

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_g v_{gi}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_g v_{gj} v_{gi}) &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ &+ \sum_k f_{pk_i} + \rho_g F_i + \sum_k v_{pk_i} S_{pk} \end{aligned} \quad (15)$$

多相流中第 k 种颗粒群动量方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{pk} v_{pk_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_{pk} v_{pk_j} v_{pk_i}) = - f_{pk_i} + \rho_{pk} F_{pk_i} + v_{pk_i} S_{pk} \quad (16)$$

多相流总体动量方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g v_{gi} + \sum_k \rho_{pk} v_{pk_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_g v_{gj} v_{gi} + \sum_k \rho_{pk} v_{pk_j} v_{pk_i})$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_s F_i + \sum_k \rho_{pk} \bar{F}_{pk i} \quad (17)$$

在式(17)中相间动量耦合项 $\Sigma f_{pk i}$ 及 $\Sigma v_{pk i} S_{pk}$ 消失了。式(16)可改写成

$$\rho_{pk} \frac{\partial v_{pk i}}{\partial t} + \rho_{pk} v_{pk j} \frac{\partial v_{pk i}}{\partial x_j} = -f_{pk i} + \rho_{pk} F_{pk i}$$

从而得到单颗粒运动方程

$$m_{pk} \frac{dv_{pk i}}{dt_{pk}} = -\frac{f_{pk i}}{n_{pk}} + m_{pk} F_{pk i} \quad (18)$$

式(18)意味着颗粒加速与变质量无关, 即有蒸发、凝结或反应的颗粒将和无相变颗粒的加速情况相同, 这和实际情况不一致。实验表明, 有蒸发及有反应的颗粒, 其加速情况和无相变颗粒相差颇大[1]。笔者[21,22]认为, Crowe在考察质交换的动量相互作用项时, 过分强调了单颗粒周围过程, 而且扔掉一些数量级不好估计的项, 因而取得上述结果。正如苏绍礼所指出的[23], 考察多相流时, 不能过分突出单颗粒周围气相流场的细节。因此我们认为, 可以认定通过相交界面时速度由颗粒相的 v_p 突跃为气相的 v_g (图2), 这时可取

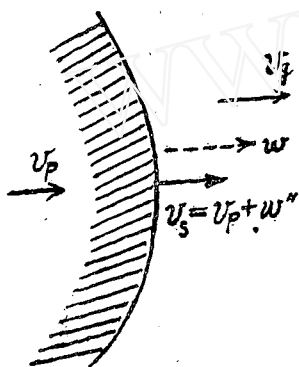


图 2

$$\int_{A_p} \rho_g v_g (v_g - v_s) dA \approx \int_{A_p} v_g g dA = \int_V v_g S dV$$

其中 g 代表颗粒表面 Stefan 流的物质流量。故多相流中的气相动量及颗粒群动量方程应是

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g v_{g i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_g v_{g j} v_{g i}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \Sigma f_{pk i} + \rho_g F_i + v_{g i} S \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{pk} v_{pk i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{pk} v_{pk j} v_{pk i}) = -f_{pk i} + \rho_{pk} F_{pk i} + v_{g i} S_{pk} \quad (20)$$

由式(20)所导出的单颗粒运动方程是

$$m_{pk} \frac{dv_{pk i}}{dt_{pk}} = -\frac{f_{pk i}}{n_{pk}} + m_{pk} F_{pk i} + \dot{m}_{pk} (v_{pk i} - v_{g i}) \quad (21)$$

其中 $f_{pk i}/n_{pk}$ 表示无相变时的单颗粒阻力(相交界面粘性阻力及压力阻力), $\dot{m}_{pk} (v_{pk i} - v_{g i})$ 为变质量惯性力。此式表明, 当气体与颗粒速度不一致时, 除了通常的阻力之外, 变质量也会影响颗粒变速。多相流整体动量方程则仍为式(17)。

文献[21]用类似上述的相间耦合概念, 导出多相流中气相能量、颗粒相能量和整体能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g h_g) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_g v_{g j} h_g) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial x_j} \right) + \sum_k n_{pk} Q_k$$

$$+ \sum_k S_{k1} Q_{ch;1} + S h_g + \sum_s w_s h_{gs0} - Q_{rg} \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_p h_{pk}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_p v_{pkj} h_{pk}) = S_{k2} Q_{ch;2} - n_{pk} Q_k + S_{pk} h_g - n_k Q_{rk} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g h_g + \sum_k \rho_p h_{pk}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_g v_{pkj} h_g + \sum_k \rho_p v_{pkj} h_{pk}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial x_j}) + \sum_k S_{k1} Q_{ch;1} + \sum_k S_{k2} Q_{ch;2} \\ &+ \sum_s w_s h_{gs0} - Q_{rg} - \sum_k n_{pk} Q_{rk} \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $h_g = \int_0^T c_{pg} dT$ 为气相显焓; T_g 为气相温度; $Q_k = -4\pi r_k^2 \lambda_k \left(\frac{dT}{dr} \right)_k$ 为第 k 种颗粒的每个颗粒与气相间对流换热(考虑 Stefan 流影响); Q_{rg} 为气体辐射热; Q_{rk} 为第 k 种颗粒每个颗粒辐射热(对壁及其他颗粒); $S_{k1} Q_{ch;1}$ 为颗粒蒸发或挥发物或表面反应产物在颗粒膜层中燃烧放热; $S_{k2} Q_{ch;2}$ 为颗粒表面蒸发、挥发吸热或多相反应的热效应; $h_{pk} = \int_0^{T_k} c_{pk} dT$ 为颗粒显焓; $\sum_s w_s h_{gs0}$ 为气相自由流(颗粒表面膜层外)中反应热; h_{gs0} 为气相 s 组分生成焓。

可以注意到, 在式(24)中, 相间能量耦合项 $\sum n_{pk} Q_k$ 及 $h_g S = -\sum h_g S_{pk}$ 消失了, 而多相混合物显焓的变化, 除对外导热及辐射之外, 则是各类反应热效应的结果。由式(23)可写出单颗粒能量方程

$$m_{pk} \frac{dh_{pk}}{dt_{pk}} = \dot{m}_{pk} Q_{ch;2} - \dot{m}_{pk} (h_g - h_{pk}) - Q_k - Q_{rk} \quad (25)$$

文献[24]把颗粒放热全部加给气相, 造成计算所得颗粒温度偏低, 事实上多相反应放热或吸热对颗粒能量平衡有影响, 即影响颗粒温度。文献[25]则反之, 把颗粒的全部燃烧热都加到颗粒上, 使计算所得颗粒温度过高。我们认为, 式(22)及(23)所给出的关系较为恰当[22]。

五、Euler 坐标系中更合理的模型

颗粒群假连续介质模型及其 Lagrange 坐标处理法虽有如上述的一系列优点, 但也有弱点。一个是气相的 Euler 坐标系偏微分方程组加上颗粒的 Lagrange 坐标系中常微分方程组, 在数值计算中不易获得稳定, 再一个是不可能认真考虑湍流扩散。文献[20]中虽然按扩散漂移速度对颗粒动量方程作了修正, 还不等于全面考虑颗粒湍流扩散。进一步的工作必须既考虑较大滑移, 又考虑湍流扩散, 这就要寻找 Euler 坐标系中更合理的模型。Spalding 进行了这方面的努力, 提出了如下一般表达法[26], 并对一维流进行了初步探讨[27]。

Euler 坐标空间任一小体积内包含体积分数为 γ_k 的 k 相, 共个 n 相, 即 $\sum_{k=1}^n \gamma_k = 1$ 。各

相都弥散在同一空间中, 并在运动中相互渗透。设 v_{ki} 代表 k 相速度的 i 方向分量, $\bar{\rho}_k$ 为 k 相的物质密度, 则可以写出 Euler 空间中 k 相的连续方程、动量方程及能量方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}_k \gamma_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}_k \gamma_k v_{kj}) = S_k \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}_k \gamma_k v_{ki}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}_k \gamma_k v_{kj} v_{ki}) = -\gamma_k \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{kij}}{\partial x_j} + \bar{\rho}_k \gamma_k F_{ki} + I_{ki} \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\gamma_k(\bar{\rho}_k \tilde{h}_k - p)] + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}_k \gamma_k v_{kj} \tilde{h}_k) = \gamma_k Q_k + H_k + J_k \quad (28)$$

式中 τ_{kij} 为第 k 相本身剪切力; F_{ki} 为第 k 相所受体积力; I_{ki} 为第 k 相与其他相的相互作用所产生的动量交换; \tilde{h}_k 为第 k 相单位质量滞止焓(热焓加化学焓加 k 相动能); Q_k 为单位体积中第 k 相与外界的净辐射换热; H_k 为第 k 相本身的内部导热(包括化学焓交换); J_k 为第 k 相与其他相的相互作用产生的能量交换。多相流整体的连续方程、动量方程和能量方程为

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}_k \gamma_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}_k \gamma_k v_{kj}) \right] = 0 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}_k \gamma_k v_{ki}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}_k \gamma_k v_{kj} v_{ki}) \right] \\ & = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \tau_{kij}}{\partial x_j} + \bar{\rho}_k \gamma_k F_{ki} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial t}[\gamma_k(\bar{\rho}_k \tilde{h}_k - p)] + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}_k \gamma_k v_{kj} \tilde{h}_k) \right\} = \sum_{k=1}^n (\gamma_k Q_k + H_k) \quad (31)$$

其中相间质量、动量、能量耦合项 S_k , I_{ki} , J_k 都互相抵消了。此外如第 k 相内部的某化学组分 s 的质量分数为 m_{ks} , 则该组分守恒方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}_k \gamma_k m_{ks}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}_k \gamma_k v_{kj} m_{ks}) = \gamma_k w_{ks} + D_{ks} + K_{ks} \quad (32)$$

其中 w_{ks} 为第 k 相单位容积中化学反应引起的组分 s 的生成率; D_{ks} 为第 k 相内部 s 组分的扩散; K_{ks} 为第 k 相与其他相的相互作用造成的 s 组分的物质交换。最后 Spalding 把多相流中所有的各种守恒方程都写成下述形式:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}_k \gamma_k \varphi_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}_k \gamma_k v_{kj} \varphi_k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_{\varphi} \gamma_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} \right) + \Phi_k \quad (33)$$

其中 φ_k 表示第 k 相的某种性质, Γ_{φ} 为该种性质在第 k 相内部的输运系数, Φ_k 为方程中源

项, 包括相间相互作用项在内。Spalding 认为, 虽是在 Euler 坐标中求解多相流问题要有更多的方程, 更多的辅助关系及更复杂的边界条件, 但方程 (33) 具有和单相体系各方程类似的形式, 因此没有原则上的困难。笔者认为, 首先要解决的问题乃是根据较大滑移和湍流扩散同时存在的物理图象, 将上述方程组具体化 (例如给出 I_k , J_k 等项完备的内容), 其次才谈得上去探讨数值计算的求解方法。此外, 多相流问题, 特别是喷雾问题, 如何正确给定初始及边界条件, 也是比较复杂的问题。总之, 近二十多年来, 有相变的颗粒群-气体系统的多相流体力学在其发展中已取得显著的成绩, 但仍有不少重要的问题和基本规律有待于进一步的探索和研究。在这些方面, 多相流体力学比单相流体力学而言, 远远还是不成熟的。

参 考 文 献

- [1] 周力行 (1980), 《燃烧物理及反应流体力学》, 第九章, 清华大学。
- [2] Spalding, D. B. (1972), *Mathematical models of continuous combustion*, 《Emissions From Continuous Combustion Systems》.
- [3] Spalding, D. B. (1976), *Basic equations of fluid mechanics and heat and mass transfer, and procedures for their solution*, Imper. Colled. DME HTS/76/6.
- [4] Elghobashi, S.; Pratt, D. T.; Spalding, D. B. (1976), 3rd Intern. Symp. on Air Breathing Engines, München: 447.
- [5] Gibson, M. M., Morgan, B. B. (1970), *Mathematical models of combustion of solid particles in a turbulent stream with circulation*, *J. Inst. Fuel*, **43**: 517.
- [6] Soo, S. L. (1967), 《Fluid Dynamics of Multiphase Systems》, Blaisdell (Ginn).
- [7] Soo, S. L. (1973), 《Dynamics of Charged Suspensions》, Pergamon Press, Oxford.
- [8] Soo, S. L. (1973), 《Fluid Dynamics of Particulate Systems》, Univ. of Illinois at Urbana-Champaign.
- [9] Drew, D. A. (1971), *Averaged field equations for two-phase media*, *Stud. Appl. Math.*, **50**, 2: 133.
- [10] Drew, D. A. (1971), *Averaged equations for tow-phase flow*, *Stud. Appl. Math.*, **50**, 3: 205.
- [11] Blake, T. R.; et al (1977), *Annual Report for the U. S. Energy Res. & Devel.*, Admin. Rept., FE-1770-32.
- [12] 周力行 (1965), 《燃气轮燃烧室试验技术学术会议论文集》, 中国工业出版社。
- [13] Williams, F. A. (1965), *Combustion Theory*, Addison-Wesley, Mass.
- [14] Crowe, C. T. (1976), *Proc. 1976 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst.*: 214.

- [15] Crowe, G. T. (1978), Spring Meeting of the Cent. St. Sec. of the Comb. Inst.
- [16] Crowe, C. T., et al (1974), Fall Meeting of the West. Sec. of the Comd. Inst.
- [17] Crowe, C. T., et al (1977), *J. Fluid. Eng.*, **99**, 2: 325.
- [18] Lockwood, F. C., et al (1980), *Comb. Flame*, **38**, 1: 1.
- [19] Smoot, L. D., et al (1979), 《Pulverized-coal Combustion and Gasification》.
- [20] Smoot, L. D. (1980), 18th Symp. on Comb., Waterloo.
- [21] 周力行 (1981), 颗粒群(液雾或煤粉)燃烧两相流体力学中的两相耦合关系, 中国工程热物理学会燃烧学术会议(黄山).
- [22] 周力行、杨泽亮(1982), 高温射流稳定的二维轴对称煤粉火焰积分近似数学模型, 工程热物理学报, **3**, 1: 96.
- [23] Soo, S. L. (July 1980), 《Lectures in Peking》.
- [24] Smith, P. J., Smoot, L. D. (1980), *Comb. Sci. Tech.*, **23**, 1—2: 17.
- [25] Stickler, D. B., et al (1979), AIAA 17th Aerosp. Sci. Meeting, Paper-79.0298.
- [26] Spalding, D. B. (1980), EPRI Workshop Proceedings: Basic Two-Phase Flow Modeling in Reactor Safety and Performance, V. 2.
- [27] Spalding, D. B. (1979), One-dimensional Two-Phase Flow, with Unequal Velocities, Imp. Colled. DME HTS/79/10.