

# 固体中的非线性波

太原工学院 杨桂通

## 一、引言

波的传播问题是物理学中的经典理论问题。从17世纪至今人们逐渐认识了各种类型的波。这些波的区别主要源于它们赖以传播的介质性质和具体问题条件的不同。在固体中传播的波通常称为应力波。于是,应力波的特征就依赖于固体的力学性质、几何形状和波源等条件的特征。人们最早认识的是各种弹性波,到十九世纪,弹性波的理论实验研究有很大的发展,并大致形成了一个完整的理论体系,这是因为弹性理论的基本定理和基本方程为弹性波的传播问题提供了建立支配各类弹性波的偏微分方程(组)的依据。这些方程和相应的附加条件(初始条件和边界条件)一起构成了封闭的定解问题。在线性本构关系、小变形理论和线性附加条件的情况下,定解问题是线性的。对于这类数学问题已有针对多种不同情况的多种有效的求解方法,详见文献[1]。

固体中非线性波的研究则落后很长一个时期,其主要原因大概为求解描述这类问题的非线性偏微分方程(组)的数学上的困难。到目前为止也还只有少数简单情况可以得到解析解。问题的特点是通常的叠加原理被破坏,从而产生不同频率波的相互作用,出现各种复杂的现象。

固体中的非线性波,就其形成的原因来说,大致可分为三类:1.由固体材料本构关系非线性的特征所形成的非线性弹性波和弹塑性波;2.由几何变形的非线性所导致的非线性波;3.由固体介质的非线性弥散所形成的非线性弥散波。还可有由多种因素形成的含有复杂内容的非线性波。在以上三种类型的非线性波中,要算弹塑性波、弹粘塑性波的研究成果较多,因为这类应力波一般可归结为拟线性双曲型偏微分方程,特征线理论是解这类问题的十分有效的工具。第二种类型的非线性波将遇到很大的数学上的困难,至今缺乏严格的求解理论和系统的方法,只有极简单的一维问题在特殊的几何形状和外力作用下的不可压缩材料的条件下才得到处理,而由理性力学中发展了的奇异面理论虽然可以帮助我们认识一些非线性波的某些性质,但物体受冲击作用后的全部响应仍无法给出解答。非线性弥散波的研究引起了人们的广泛注意。目前,仅对几种可化为典型非线性偏微分方程的问题可以进行讨论。

人们熟知,下列二阶线性双曲型偏微分方程

$$\Delta u - (1/c^2)\partial^2 u/\partial t^2 = 0 \quad (1)$$

在波的传播理论中有着重要意义。其中 $\Delta$ 为Laplacc算符。(1)的解可以写成行波的形式,这一方程和简单振子的振动方程 $(d^2x/dt^2) + \omega^2x = 0$ 相似,它们都可以增加表示所谓非线性效应、阻尼效应和外部作用的项。例如在(1)中增加非线性项,便成为

$$\Delta u - (1/c^2)\partial^2 u/\partial t^2 = L_1(u) + L_2(u^2) + L_3(u^3) + \dots \quad (2)$$

此处  $L_1, L_2, L_3$  为线性算子, 用上式等号右边的项来反映波在介质中传播时的各种非线性效应。下面我们说明固体中非线性波动方程的建立, 波传播的特性以及一些有关的问题。

## 二、非线性弹性波

非线性弹性本构关系可写为下列一般形式:

$$\sigma_{ij} = 3K\chi(e)e\delta_{ij} + 2\mu\gamma(\varepsilon_i)(\varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}) \quad (3)$$

或

$$\varepsilon_{ij} = (1/3K)\kappa(s)\sigma\delta_{ij} + (1/2\mu)g(\tau^2)(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) \quad (4)$$

其中  $K, \mu$  分别为体积压缩模量和剪切模量,

$$\chi(e) = 1 + \chi_1 e + \chi_2 e^2 + \dots + \chi_k e^k$$

$$\kappa(s) = 1 + \kappa_1 s + \kappa_2 s^2 + \dots + \kappa_k s^k$$

$$\gamma(\varepsilon_i) = 1 + \gamma_2(\varepsilon_i) + \gamma_4(\varepsilon^2) + \dots + \gamma_{2k}(\varepsilon_i^k)$$

$$g(\tau^2) = 1 + g_2(\tau^2) + g_4(\tau^4) + \dots + g_{2k}(\tau^{2k})$$

$$e = (1/3)\varepsilon_{ii}, \quad \varepsilon_i = (2e_{ij}e_{ij})^{1/2}, \quad \sigma = (1/3)\sigma_{ii}$$

$$\sigma_i = [(1/2)s_{ij}s_{ij}]^{1/2}, \quad \tau = \sigma_i/\mu, \quad e = \sigma/(3K)$$

本文采用了Einstein约定求和。

对于波在一维杆中传播的最简单情况, 若取  $\sigma = E\varepsilon(1 + E_1\varepsilon)$ , 则波动方程为

$$(1 + 2E_1\partial u/\partial x)\partial^2 u/\partial x^2 = (1/c_0^2)\partial^2 u/\partial t^2 \quad (5)$$

则在  $x-t$  平面上的两族特征线为

$$dx/dt = \pm C(\varepsilon), \quad C(\varepsilon) = C_0(1 + 2E_1\varepsilon), \quad C_0 = \sqrt{E/\rho} \quad (6)$$

沿特征线的一致性条件为

$$dv = \pm C d\varepsilon \quad (7)$$

此处  $v = \partial u/\partial t = f\{t - [x/C(\varepsilon)]\}$  为质点速度。若初始条件与边界条件为

$$\partial u(x, 0)/\partial t = \partial u(x, 0)/\partial x = 0 \quad (8)$$

$$v(0, t) = \partial u(0, t)/\partial t = \varepsilon\phi(t) \quad (9)$$

$\varepsilon$  为无量纲的小参数, 且表示质点运动速度的最大值与线性化声速之比。由边界条件有

$$v(x, t) = \varepsilon\phi[t - (x/C(\varepsilon))] = \varepsilon\phi[t - x(1 - 3\varepsilon E_1\phi)^{-1/3}] \quad (10)$$

如令

$$u(x, t) = \varepsilon u_1(x, t) + \varepsilon^2 u_2(x, t) + \dots \quad (11)$$

则

$$v = \partial u/\partial t = \varepsilon\phi(s_1) - \varepsilon^2 E_1 x \phi(s_1)\phi'(s_1) + \dots \quad (12)$$

此处  $s_1 = t - x$  为向右发展的线性化特征线, 上式在  $x \rightarrow \infty$  及  $x \geq O(\varepsilon^{-1})$  时都出现与假定的非一致性, 即当  $x \rightarrow \infty, v \rightarrow \infty$  及  $x \geq O(\varepsilon^{-1})$  时, 第二项与第一项变为同量级。为了改变这种情况, 使得展开式一致有效, 有各种技巧可以采用, 常见的有应变坐标法, 应变参

数法, 多重尺度法等等。

用多重尺度法, 式(11)改用新变量写成

$$u(x, t, \epsilon) = \epsilon u_1(s_1, s_2, x_1) + \epsilon^2 u_2(s_1, s_2, x_1) + \dots \quad (13)$$

其中  $s_1 = t - x$ ,  $s_2 = t + x$ 。用此新变量可求出相应的空间和时间导数, 从而可得方程(5), (8), (9)的解的一级近似为

$$v(x, t, \epsilon) = \epsilon \phi(\xi) + \dots \quad (14)$$

其中  $t - x = \xi + \epsilon E_1 x \phi(\xi) + \dots$ 。由  $\epsilon = \partial u / \partial x$  及  $\partial u / \partial x = -\partial u / \partial s_1 + C(\epsilon)$ , 得应变的一级近似值为

$$\epsilon = -\epsilon \phi(\xi) + \dots \quad (15)$$

波沿特征线  $\xi = \text{const}$  传播速度为

$$(dt/dx)^{-1} \approx 1 - E_1 \epsilon \quad (16)$$

可见,  $\epsilon$  不同, 传播速度也不同。

一般说来, 非线性方程在全部时间内不一定存在单值的解。波在沿杆传播时, 由于这种非线性性质, 波形将发生变化。图1为  $E_1 > 0$  时初始为正弦的应变波逐渐变形的过程。

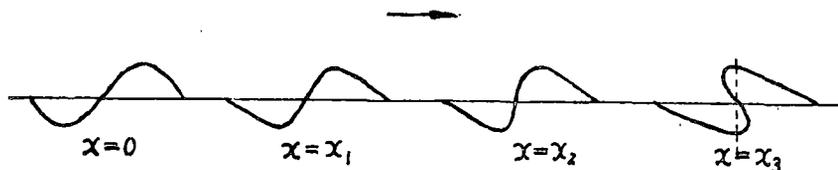


图1  $E_1 > 0$  的情况

在  $x = x_3$  处连续波变成多值的原因是由于没有计入介质的粘性效应及导热效应所产生的波形的陡化。实际上, 多值是不可能的, 因而形成激波。问题进一步的讨论, 应计入粘性效应, (5)应改为

$$(1/c_0^2) \partial^2 u / \partial t^2 - (1 + 2E_1 \partial u / \partial x) \partial^2 u / \partial x^2 + \mu \partial u / \partial t = 0$$

$\mu$  为阻尼系数, 当  $\mu$  不小于某一临界值  $\mu_c$  时, 连续波就不会在有限距离内形成激波。

非线性弹性波根据所采用的本构关系的不同, 所得到的非线性偏微分方程的类型和特点也不同。方程的解法, 一般地可采用摄动法, 如前述多重尺度法等。

### 三、弹塑性波

弹塑性波是固体中另一种类型的非线性应力波。弹塑性本构关系的明显特点是非线性和不可逆性, 因而, 在弹塑性介质中传播的波便不可避免地产生了一系列的特性。但是, 在加载过程的弹塑性加载波与非线性弹性波, 并无原则的区别, 这是因为弹塑性介质的加载与卸载服从不同的本构关系, 以及物体各点将在不同时刻, 不同应力与应变状态下开始卸载。以一维杆中波的传播为例, 在加载过程, 杆中某一质点  $x$  处的应变从  $t_0$  时刻开始逐渐增加, 达某一最大值, 在卸载开始后某一时刻  $t$  开始减小, 其减小规律除随  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  的曲线型式而变外, 还与杆端冲击压力的特征有关。这样, 对于给定的  $x$ , 便存在一个表示该质点开始卸载的  $t$  时刻。于是, 在  $x-t$  平面上便可给出一条曲线, 它

的一侧是加载区, 另一侧是卸载区。这条曲线称为加载区与卸载区的边界, 简称为加载卸载边界, 也称为**卸载波**, 记作  $t = f(x)$  或  $\varphi(x, t) = 0$ 。卸载波的存在与唯一性已在某些假定的前提下得到了证明[2]。

自1930年L.H.Donnell首先研究了弹塑性线性强化材料的杆中应力波的传播问题以后, 在第二次世界大战期间, 对弹塑性加载波和卸载波的研究有较大的发展, T.von Karman, G.I.Taylor和X.A.Рахматуллин等在弹塑性加载波和卸载波的早期工作中都做出了贡献, 详见文献[3—5]。目前卸载波的研究仍是重要的课题, 直接确定卸载波在数学上是有困难的。因为, 如想求得卸载开始时的最大应力与最大应变, 必须确定加载区与卸载区的解, 而加载卸载边界又必须由应力与速度连续越过此边界的条件来求。求加载卸载边界的曲线形式的问题, 属于寻求同时在加载区与卸载区满足初始条件与边界条件的解的问题。对于一维问题, 可有解析法、图解解析法和渐近法等, 详见[6]。

弹塑性波的传播问题一般归结为求解拟线性一阶双曲型偏微分方程组的边值问题, 因而特征线法是十分有效的。函数  $u_i (i=1, 2, \dots, n)$  的一阶偏微分方程组的一般形式为

$$L(u) = \sum_{i=1}^n (a_{ij} u_{i,x} + b_{ij} u_{i,t}) + C_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

此处系数  $a_{ij}, b_{ij}, C_j$  为  $x, t, u$  的函数, 及

$$u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$$

若方程组(17)对  $u_i, x$  在  $(x_0, t_0)$  点可解, 则当且仅当矩阵  $A = [a_{ij}]$  在  $(x_0, t_0)$  点为非奇异阵时才有可能。若  $A$  为奇异阵, 则  $x = x_0$  为在  $(x_0, t_0)$  点处的特征线。由特征线理论不难求解各种边值问题。

弹塑性状态的复合应力波出现了一些特殊情况。例如拉扭波在薄管中的传播问题, 此时控制方程可写为

$$L(W) = AW_{,x} + EW_{,t} = 0 \quad (18)$$

其中

$$W = \{u, \sigma, v, \tau\}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & (1/E) + H(\sigma/\theta)^2 & 0 & H\sigma\tau \\ 0 & 0 & \rho & \sigma \\ \sigma & H\sigma\tau & \sigma & (1/\mu) + H\theta^2\tau^2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{dW^p}{d\kappa} \frac{1}{\theta^2 \kappa^3} = \begin{cases} 0, & \text{在弹性阶段} \\ [1/(\kappa^2 E)] [(1/\beta) - 1], & \text{在塑性阶段} \end{cases}$$

$$\theta = \begin{cases} \sqrt{3}, & \text{当用Mises条件时} \\ 2, & \text{当用Tresca条件时} \end{cases}$$

$\beta$ 为塑性阶段变形模量的特征系数,  $\kappa$ 为纯剪屈服应力。相应于方程(18)的特征速度由下式确定:

$$L(\rho c^2)^2 - (M+N)(\rho c^2) + 1 = 0 \quad (19)$$

(19)的根为

$$\rho c^2 = (1/2L)\{M+N \pm [(M-N)^2 + 4H^2\tau^2\sigma^2]^{1/2}\} \quad (20)$$

此处

$$L = (1/\mu E) + (1/\mu)H(\sigma/\theta)^2 + (1/E)H\theta^2\tau^2 \\ M = (1/\mu) + H\theta^2\tau^2, \quad N = (1/E) + H(\sigma/\theta)^2$$

上式(20)取正号的波速 $C_t$ 称为快塑性波速, 取负号的 $C_s$ 称为慢塑性波速。当 $H=0$ 时,  $C_t$ 化为 $C_0 = \sqrt{E/\rho}$ ,  $C_s$ 化为 $C_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$ , 这就是说, 传播速度 $C_t$ 和 $C_s$ 分为相应于塑性纵波和塑性横波, 其值与 $\sigma$ 和 $\tau$ 有关, 且有

$$C_s \leq C_2 \leq C_t \leq C_0$$

初始屈服面对波的传播特征影响很大, 加载路径对特征线网的变化也有影响。如图2所给出的三种不同的加载路径, 它们分别为: ①  $0 \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c$ ; ②  $0 \rightarrow d \rightarrow e$ ; ③  $0 \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow h \rightarrow i$ 。图中实线为初始屈服面, 虚线为继生加载面。对于第一种加载路径, 显然

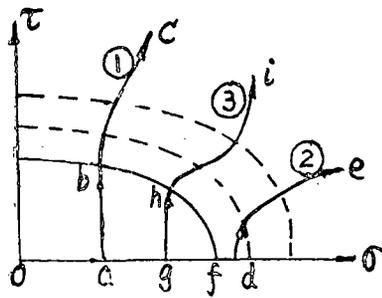


图 2

首先有弹性纵波传播, 波速为 $C_0$ , 相继作用剪应力 $\tau$ , 故有横波传播, 波速为 $C_2$ , 超出初始屈服面以后, 剪应力增加较快, 出现塑性慢波, 波速为 $C_s$ 。第三种加载路径为加正应力至屈服后又卸载至 $\sigma$ , 再加剪力至屈服, 这个过程都是弹性波传播, 以后则有塑性快波和塑性慢波。从以上几种情况不难看出, 在一般加载条件下, 纵波与横波总是耦合的。可见, 复合应力波传播问题与一维波的传播有很大的区别。这类问题曾由Рахматулин(1958), Cristescu(1959), Clifton(1966), Синицын(1970, 1973), Ting(1969,

1970, 1979), Жудаев(1973, 1979)等研究过。

当给定外力减小时, 系统的各点就将在不同的时刻开始卸载, 卸载波波速 $C_u$ 服从

$$C_s \leq C_u \leq C_2 \quad \text{或} \quad C_t \leq C_u \leq C_0$$

当 $C_u$ 在 $C_s$ 与 $C_2$ 之间时, 有慢卸载波传播, 反之,  $C_u$ 在 $C_t$ 与 $C_0$ 之间时, 则有快卸载波传播。利用穿过波前时的速度连续性条件, 不难确定 $C_u$ 之值。如令过波前时有

$$[\dot{\sigma}] = (\dot{\sigma}) - (\dot{\sigma})_-, \quad [\dot{\tau}] = (\dot{\tau}) - (\dot{\tau})_-$$

则可得

$$\frac{[\dot{\tau}]}{[\dot{\sigma}]} = \frac{(\rho C_u^2/E - 1)}{(\rho C_u^2/\mu - 1)} \cdot \frac{\tau}{(\sigma/\theta^2)} \quad (21)$$

对于卸载波, 上式(21)给出了跳跃矢量倾角的正切。卸载波波速依赖于屈服面的形状和

大小。图3中给出了快卸载波和慢卸载波所在的区域。

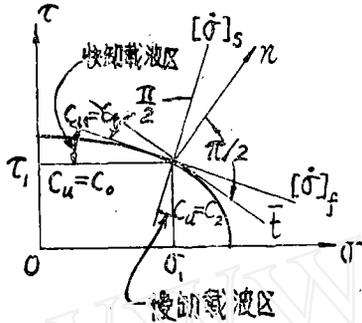


图 3

过 $(\sigma_1, \tau_1)$ 点的水平线表征应力 $\sigma$ 的变化， $\sigma$ 产生的波速为 $C_0$ ，竖线表征 $\tau$ 的变化，相应的波速为 $C_2$ 。描述 $C_1$ 的线段与 $[\dot{\sigma}]_f$ 方向重合，从而可确定两个卸载波所在区域(如图3所示)。Clifton, Ting等人研究了卸载波 $\phi(x, t) = 0$ 的确定[7]。

#### 四、粘塑性波

Duvez和Clark(1947)用铜丝冲拉试验研究了塑性波沿铜丝的传播。实验结果表明，塑性波波速与理论计算结果相一致。但波前应变分布却与理论分析结果

相差较大。出现这种情况的原因不仅是卸载波的影响，主要是由于本构关系对加载速度的敏感性，即所谓应变率效应所致。固体材料在高速变形条件下的应变率效应问题已被不少实验所证实。因而，在波的传播理论中如何计入应变率效应，便是一个重要的研究课题。

考虑材料在高应变率条件下的本构关系，有各种不同的途径和不同的模型。如较早的粘塑性模型和过应力模型，以及拟线性模型等。

粘塑性波是指在粘塑性介质中传播的波。由于常用粘塑性介质模型来描述应变率敏感材料的本构关系，所以对粘塑性波的研究也就意味着对在应变率敏感的弹塑性材料中传播的应力波的研究。

Hohenemser和Prager(1932)首先给出了粘塑性模型的本构关系：

$$\dot{e}_{ij} = (1/2\eta)[1 - \kappa/\sqrt{(1/2)s_{ij}s_{ij}}]s_{ij} \quad (22)$$

其中 $\dot{e}_{ij}$ 和 $s_{ij}$ 分别为塑性应变率张量和应力偏量， $\kappa$ 和 $\eta$ 分别为纯剪屈服极限和粘性系数。1963年Perzyna对方程(22)进行了研究并推广到一般形式

$$\dot{e}_{ij} = (1/2\mu)\dot{s}_{ij} + [(1-2\nu)/E]\sigma_{kk}\delta_{ij} + \gamma\langle\Phi(F)\rangle\partial f/\partial\sigma_{ij} \quad (23)$$

此处  $\langle\Phi(F)\rangle = \begin{cases} 0, & \text{当 } F \leq 0 \text{ 时} \\ F, & \text{当 } F > 0 \text{ 时} \end{cases}$

$\gamma$ 为材料常数， $\Phi(F)$ 由材料动力实验得到，且为 $F$ 的单调非负的增函数，而 $F$ 为静态加载函数，它仅与应力状态、塑性应变及强化特性有关，即

$$F(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, \chi) = [f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij})/\chi] - 1 \quad (24)$$

$\chi$ 为强化参量。

关系式(23)表达了应变率效应的存在，但没有反映材料普遍存在的瞬时塑性性质。

Cristescu(1963)提出了以下拟线性本构关系：

$$\partial \epsilon / \partial t = \Phi(\sigma, \epsilon) \partial \sigma / \partial t + \Psi(\sigma, \epsilon) \quad (25)$$

函数 $\Phi$ 和 $\Psi$ 满足

$$\Psi \partial \Phi / \partial \epsilon = \Phi \partial \Psi / \partial \epsilon + \partial \Psi / \partial \sigma \quad (26)$$

进一步分析可以看出,显然依赖于时间的函数 $\Psi(\sigma, \epsilon)$ 将是材料非瞬态塑性反应的度量。而函数 $\Phi(\sigma, \epsilon)$ 则是材料对应力增加的瞬态塑性反应的度量。前者表示粘塑性应变的非瞬态部分,它不依赖于应力的增加,而依赖于应力本身;后者则是塑性应变的瞬态部分,它与应力的增加成比例。若材料的动力塑性反应确有瞬态与非瞬态两部分,则塑性应变可以波的形式传播;若只有非瞬态部分,则塑性应变就不可能以波的形式传播。对于刚塑性材料,塑性反应仅是非瞬态的,则应力与质点速度就应只能以扩散的形式传开。

我们把(25)写得更完备一些,有

$$\partial \epsilon / \partial t = (1/E) \partial \sigma / \partial t + \Phi(\sigma, \epsilon) \partial \sigma / \partial t + \Psi(\sigma, \epsilon) \quad (27)$$

取

$$\Psi(\sigma, \epsilon) = \begin{cases} (\kappa(\epsilon)/E) [\sigma - f(\epsilon)], & \text{若 } \sigma > f(\epsilon) \text{ 及 } \epsilon \geq \epsilon_y, \\ 0, & \text{若 } \sigma \leq f(\epsilon) \text{ 及 } \epsilon < \epsilon_y, \end{cases}$$

其中 $\sigma = f(\epsilon)$ 是应力应变平面上的弹塑性边界,即 $\sigma > f(\epsilon)$ 时响应是塑性的, $\sigma < f(\epsilon)$ 时是弹性的,在这条曲线以上有动力松弛;在此曲线以下则没有。所以称 $\sigma = f(\epsilon)$ 为动力松弛边界(图4中的RB曲线)。一般地,它并不与准静态应力应变曲线重合。Cristescu

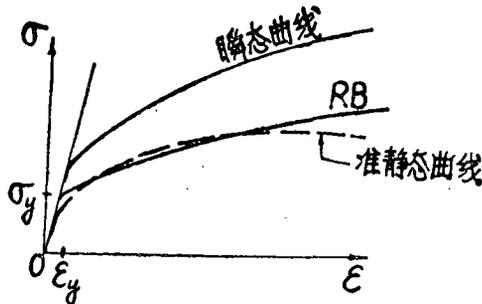


图 4

(1972)曾根据Bell的试验结果,建议了动力松弛边界的表达式,并于1974年证明了它的存在性。沿RB线 $\Psi = 0$ ,在它的附近只有弹性波传播。实用上,往往把静态应力应变曲线 $\sigma = f(\epsilon)$ 近似地取做动力松弛边界,二者不加区别。

弹粘塑性介质中的波的传播问题,并不带来什么更多的数学上的困难。引进粘性效应以后,在粘塑性区的问题将化为求解半线性偏微分方程(组)的问题。此时(17)中的

$C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}^T$ 为 $u$ 的非线性函数。但 $C$ 不影响波速,所以,粘塑性波速与弹性波速相等。Кукуджанов(1965)给出了这一问题的封闭解。例如,波在平面应变条件下的弹粘塑性体中传播时,控制方程为双曲型一阶半线性方程

$$L[W] = A'W_t + A''W_x + A'''W_y - C = 0$$

其中:

$$W = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ p \\ q \\ r \\ \tau \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(2/3)\langle D \rangle (p-r) \\ -2\langle D \rangle q \\ -(2/3)\langle D \rangle (r-p) \\ -2\langle D \rangle \tau \end{Bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma^4/(3\Gamma^2-4) & 0 & \Gamma^2(2-\Gamma^2)/(3\Gamma^2-4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma^2(2-\Gamma^2)/(3\Gamma^2-4) & 0 & \Gamma^2(\Gamma^2-1)/(3\Gamma^2-4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma^2 \end{bmatrix}$$

$$A'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A''' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A'$  为对称的正定矩阵,  $A''$  和  $A'''$  均为对称阵,

$$\langle D \rangle = \gamma \langle \Phi(F) \rangle (1/\sqrt{J_2}) = \begin{cases} D, & \text{当 } \sqrt{J_2} > \kappa \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } \sqrt{J_2} \leq \kappa \text{ 时} \end{cases}$$

$$\Gamma = [(3\kappa + 4\mu)/3\rho/(\mu/\rho)]^{1/2} = (C_1/C_2)^{1/2}$$

$$p = (1/2)(\sigma_x + \sigma_y)/\rho C_1^2, \quad q = (1/2)(\sigma_x - \sigma_y)/\rho C_1^2, \quad \tau = \tau_{xy}/(\rho C_1^2), \quad r = \sigma_z/(\rho C_1^2)$$

$J_2, \kappa$  分别为应力偏量的第二个不变量和剪切屈服极限。

设  $\varphi = \varphi(t, x, y) = \text{const}$  为特征曲面, 则特征矩阵的行列式等于零, 等价于

$$[\varphi_{,t}^2 - (\varphi_{,x}^2 + \varphi_{,y}^2)][\varphi_{,t}^2 - (1/\Gamma^2)(\varphi_{,x}^2 - \varphi_{,y}^2)]\varphi_{,z} = 0 \quad (28)$$

上式方括弧里的两项描述了纵波与横波的传播, 其波速为  $\pm 1$  和  $\pm 1/\Gamma$ 。实际上,

$$(\varphi_{,t})^2 - C_1^2[(\varphi_{,x})^2 + (\varphi_{,y})^2] = 0 \quad (29)$$

为一曲面波动方程, 其传播速度为  $\pm c_1$ , 与纵波速度相同; 而

$$(\varphi_{,t})^2 - c_2^2[(\varphi_{,x})^2 + (\varphi_{,y})^2] = 0 \quad (30)$$

则以横波波速  $c_2$  传播。如前所述粘塑性波以弹性波速传播。这是因为 (28) 中的非线性项没有进到特征曲面的分析中来的缘故。

如所周知, 特征线法对于空间问题是难以直接应用的, 因而发展了其他数值方法。Bejda, J. (1968) 用差分法解了这一问题, Recker, W. W. A. (1970) 用有限元法解了类似的弹性问题。

Lipkin 和 Clifton (1968) 以及 Banerjee 和 Malvern (1974) 等的实验结果完全支持用粘塑性本构关系计算的结果。

## 五、非线性弥散波

固体中的非线性弥散波是一个极为引人注意的课题。产生波的弥散的原因有几何的和物理的两方面, 即由于物体几何尺寸的约束引起的几何弥散和由于波与介质分子松弛过程的相互作用。惯性效应以及介质的正常非均匀性等引起的物理弥散两种类型。弥散

现象的主要特征是相速度随波长(或频率)而变化。频率  $\omega$  与波数  $k$  的相互关系式,  $F(\omega, k) = 0$ , 称为弥散关系式。例如对于KdV方程

$$u_t + uu_x + \nu u_{xxx} = 0 \quad (31)$$

的弥散关系式为

$$F(\omega, k) = -\omega + u_0 k - \nu k^3 = 0 \quad (32)$$

或

$$\omega = u_0 k - \nu k^3 \quad (32')$$

在色散介质中传播的非线性波的典型例子是孤波。这种孤波是由于非线性引起的波形变异以致陡化(如图1)和弥散效应平衡而形成的脉冲状的波。这种波首先由 Russell 于1834年在研究浅水波时发现, Boussinesq(1871)和 Rayleigh(1876)相继求得了孤波的近似解, Korteweg和de Vries(1895)做了深入的研究。

非线性弥散波的研究与孤波和椭圆余弦波的发现分不开。固体中的这类非线性波的研究结果为数不多, 主要困难在于弥散介质本构方程的建立及由此带来的求解非线性偏微分方程(组)的数学上的困难。目前只有少量简单问题的解。例如在非均匀材料的直杆中的非线性弥散波, 圆管中的非线性波等, 详见[12, 13]。

几何弥散与介质的性质有密切关系。例如, 对于理想弹性杆中的一维应力波, 认为杆截面在波通过前后都保持平面, 如果满足这一假定, 要求有  $a\omega/C_0 \leq 1$ , 此处  $a$  为杆截面半径,  $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$ 。对于弹塑性波则有  $(a\omega/C_p) \leq 1$ , 对于大多数金属大致有  $C_p/C_0 = 10^{-1} - 10^{-2}$ , 即相差1-2个数量级。可见弹塑性波的几何弥散要重要得多。

下面以非线性弹性地基上长梁中横梁的波传播问题为例说明非线性弥散波的特征。

梁的波动方程为

$$EJ \partial^4 W / \partial X^4 + \rho A \partial^2 W / \partial T^2 + \alpha_1 W + \alpha_3 W^3 = 0 \quad (33)$$

此处  $E, A, J$  分别为弹性模量, 梁截面面积和惯性矩,  $\rho$  为梁单位长度的密度,  $\alpha_1$  为弹性地基系数。引进特征挠度  $W_0$ , 取无量纲的量则(33)化为

$$\begin{aligned} \omega = W/W_0, \quad x = X[\alpha_1/(EJ)]^{1/4}, \quad t = T(\alpha/(\rho A))^{1/2} \\ \partial^4 \omega / \partial x^4 + \partial^2 \omega / \partial t^2 + \omega + \epsilon^2 \alpha \omega^3 = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

其中  $\epsilon^2 = W_0 |\alpha_3| / \alpha_1$ ,  $\epsilon$  为小量, 及

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{当 } \alpha_3 > 0 \text{ 时} \\ -1, & \text{当 } \alpha_3 < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

方程(34)可用多重尺度法化为以复函数(振幅)  $u$  表示的 Schrödinger 非线性抛物型偏微分方程[14]:

$$\partial u / \partial x + k' (\partial u / \partial t) + (1/2) i k'' (\partial^2 u / \partial t^2) + i(3/4) i \epsilon^2 \alpha k^{-3} u^2 \bar{u} = 0 \quad (35)$$

此处,  $k' = dk/d\omega$ ,  $k'' = d^2 k/d\omega^2$

$$u = (1/2) (X'_1, X'_2, T'_1, T'_2) \exp[i\beta(X'_1, X'_2, T'_1, T'_2)] \quad (36)$$

$$X'_1 = \epsilon x, \quad X'_2 = \epsilon^2 x, \quad T'_1 = \epsilon t, \quad T'_2 = \epsilon^2 t$$

$\alpha, \beta$  分别为振幅与相位。

方程(35)给出了波包沿梁长度方向的传播。由于不同的弥散关系都可以在  $k'$  和  $k''$  中反映出来, 所以方程(35)实际上描述了任意弥散介质中波包传播的规律。

分析了当波有固定的单一波数和单一频率这两种特殊情况以后, 可以得出非线性效应将产生频率和波数的变动, 即波数固定时, 得出:

$$\omega = a_0 \cos(kx - \bar{\omega}t + \beta_0) + O(\epsilon^2) \quad (37)$$

$$\bar{\omega} = \omega + (3/8)\epsilon^2 a_0 \omega^{-1} \alpha + O(\epsilon^3)$$

而频率固定时得出:

$$\omega = a_0 \cos(\bar{k}x - \omega t + \beta_0) + O(\epsilon^2) \quad (38)$$

$$\bar{k} = k - (3/16)\epsilon^2 a_0^2 \alpha k^{-3} + O(\epsilon^3)$$

若把(36)写成  $u(x, t) = (1/2)d(x, t) \exp[i\beta(x, t)]$  并代入(35), 再将实部与虚部分开, 则可得两个关于  $\alpha, \beta$  的联立偏微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{1}{2a} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right)^2 + \chi \alpha^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

其中  $\xi = x - \omega' t, \quad \tau = \omega'' t, \quad \chi = \frac{3}{8} \epsilon^2 \alpha (\omega \omega'')^{-1}$

方程(39)有周期解和孤波解。设解为

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 (\xi - v\tau) \quad (40)$$

$$\beta = -\chi \alpha_0^2 \tau + \beta_1 (\xi - v\tau) \quad (41)$$

$\alpha_0, v$  为常数, 则可得孤波解为  $u = cn [\kappa(\xi - v\tau), v]$  及

$$\alpha^2 = \xi_2 - (\xi_2 - \xi_1) cn^2 [\kappa(\xi - v\tau), v] \quad (42)$$

其中  $\kappa = \sqrt{(\xi_3 - \xi_1)\chi}, \quad v = [(\xi_2 - \xi_1)/(\xi_3 - \xi_1)]^{1/2}$

$$v \leq \alpha_{max} \sqrt{\chi}, \quad \xi = \alpha^2$$

及  $\xi_1, \xi_2$  满足  $\xi'^2 = 4\chi(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)$ 。

(42)为椭圆余弦波或孤波(图5), 这是一种凹陷的孤波。如前所述, 孤波是非线性效应

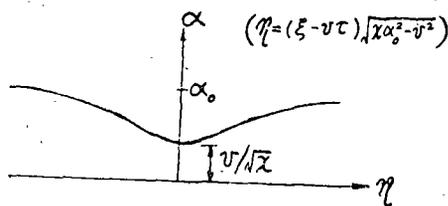


图 5

和弥散效应间的平衡, 前者由于波速随振幅的增加而增加, 因而使波阵面陡化, 后者则使波阵面平缓。孤波相互作用后, 形态和速度都保持不变, 这是它的明显特点。

固体中孤波问题研究成果不多, 其各种类型的相互作用和反射以及稳定性等问题都比不上象流体中孤波问题的研究[14]。

非线性波的数学方法存在着许多困难。目前还只有几种典型的非线性偏微分方程可以采用变换法求得精确解。例如用Cole-Hopf变换可求得Burgers方程的解。Miura变换, Bucklund变换可求得KdV方程和Sine-Gordon方程的精确解等, 采用摄动法, 变分法可求得近似解。详见[15—17]。应当指出, 电子计算机广泛用于力学领域的各个方面以后, 增强了应用数学的手段。波传播问题的特征线法[18], 摄动法[12]等, 可以

有效地用电子计算机进行分析。

以上概述了固体中非线性波的一些简单情况。由此可以看出,研究非线性波就发现了一些在线性理论中不可能发生的现象。固体中波的现象是一个复杂的客观现实,人们还会继续发现各种异常的波,各种耦合效应产生的异常波。特别是应力波在各工程技术领域内的应用将促进非线性应力波研究的发展。

#### 参 考 文 献

- [1] Keller, J. B. (1979), *SIAM Rev.*, **21**, 2: 229—245 (译文见: 力学进展 (1980), **10**, 4: 101—113).
- [2] Скобеев, А. М. (1962), *ПММ*, **26**: 1059—1066.
- [3] von Karman, T., Duwez, P. (1950), *JAP*, **21**: 987—994.
- [4] Cristescu, N. (1967), *Dynamic Plasticity*, North-Holland Publishing.
- [5] Рахматулин, Х. А., Демьянов, Ю. А. (1961), *Прочность при интенсивных нагрузках* ГИЗ, Физмат. Company.
- [6] 杨桂通 (1980), 塑性动力学, 太原工学院讲义.
- [7] Nowacki, W. K. (1978), *Stress Waves in Nonelastic Solids*, Pergamon Press.
- [8] Malvern, L. E. (1951), *JAM*, **18**, 2.
- [9] Clifton, R. J. (1968), *JAM*, **35**, 4.
- [10] Lipkin, J. (1968), 12th Intern. Congress of Appl. Mech.
- [11] Banerjee, A. K., Malvern, L. E. (1974), *JAM*, **41**, 3.
- [12] Nayfeh, A. H., Mook, O. T. (1979), *Nonlinear Oscillation*, Wiley.
- [13] Eringen, H. C., Suhubi, E. S. (1974), *Elastodynamics*, Academic Press.
- [14] Miles, J. W. (1980), *Ann. Rev. Fl. Mech.*, **12**: 11—43 (译文见: 力学进展 (1981), **11**, 2: 165—176; **11**, 3: 285—293).
- [15] Whitham, G. B. (1974), *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley.
- [16] 陈嗣熊 (1979), 力学与实践, 3.
- [17] 段祝平 (1979), 力学与实践, 4.
- [18] 杨桂通 (1980), 塑性动力学中的数值方法, 全国弹性与塑性力学学术会议论文选集.