

马赫反射研究进展

中国科学技术大学 糜仲春

一、前 言

平面激波在刚壁的反射问题, 30多年来一直是一个在理论上和实验上进行研究的课题[1—60]。人们注意到用激波管进行激波绕射楔角的实验可以得到如图1所示的四种反射图案[10, 28—34, 40, 44]: (1)入射激波 i 在楔角为 α 的楔面 A 点上反射出一道激波 r , Von Neumann(1943)[24]称它为规则反射(RR); (2)反射点 A 离开楔面, 成为 i , r 与Mach杆 m 的三波交点, 即单Mach反射(SMR); (3)三波点附近的 r 阵面出现扭点 K , 称为复合Mach反射(CMR); (4)在第一个三波点 A 发出的滑移线 CS 与壁面交点 E 处, 又产生一道激波 r' , r' 与 r 交点成为第二个三波点, 称为双Mach反射(DMR)。

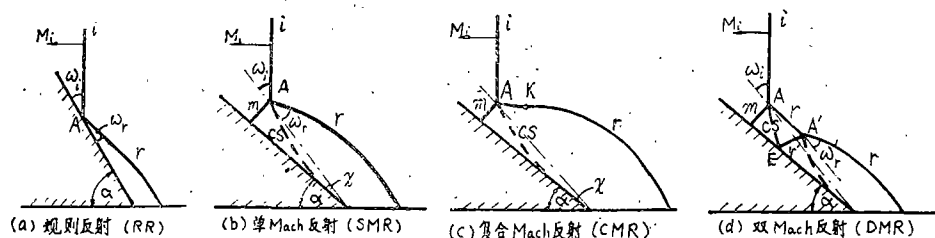


图1 平面运动激波在楔上的绕射(四种图案)

在超声速风洞的定常流中只得到了RR和SMR。为了弄清楚Mach反射的机制, 多年来人们一直在研究平面激波的RR与MR之间的转变条件和SMR与DMR之间的转变条件。为此作了许多激波管实验, 并用激波极线图作了理论分析。但在理论上还未能定量地(有些情况下甚至是定性地)解释转变问题。

在解算Mach反射的流场方面目前有两种办法: 一是用干涉仪拍得的等密度线来研究(即数字实验方法)[10, 44—46, 48]; 另一是用二维非定常计算程序进行数值计算[41—43]。

Whitham[55—57]发展了一套解析方法求Mach杆的 M 数及三波点迹线的理论。他把声学射线方法应用到平面激波绕射问题上, 建立了激波动力学理论[58]。对绕射凹拐角问题, 用它解析求得的Mach杆的 M 数与实验结果很符合[60]。

除了平面激波绕射刚壁会出现Mach反射外, 在空中核爆炸、多源爆炸和一般的激波相互作用等实际问题中, 也存在着Mach反射。这是因为当一个球面爆炸波打在一个壁面上, 或是两个球面爆炸波相互作用时, 自正入射到掠入射的各种反射情形都会出

现。但是由于它们在分析计算以及实验模拟方面比平面激波绕流存在着更多的困难，在这方面的进展还不大。

本文对平面激波绕射楔角产生的 MR 问题在理论分析、实验研究和数值计算方面取得的进展作了简要的叙述。对 Mhitharm 用激波动力学理论处理 Mach 反射问题作了详细的介绍。

二、规则反射转变为 Mach 反射的研究

1. 斜激波反射的经典理论 定常斜激波的反射情况通常用 θ - p 激波极线来表示(图 2)。已知来源压力 p_0 ，声速 c_0 ，对每个 M_0 可画得一条极线。对激波管试验通常用入射波 i 前后压力 $\xi_i = p_0/p_i$ 来表示 i 强度， ξ_i 与运动激波的 M_i 关系是已知的(图 2a)。运动激波的 M_i 与风洞的定常来流 M_0 (图 2b) 的关系为 $M_i = M_0 \sin \omega_i$ ；图 2a 中楔角 α 与图 2a 中入射角 ω_i 关系为 $\alpha = 90^\circ - \omega_i$ 。因此对给出的 M_i 和 α ，可折成 M_0 来画得一条极线。

给定 M_0 ，气流经过 i 的偏折 θ_1 与 i 下游压力 p_i 的关系由 θ - p 图上极线 I 给出，图 2c。显然在 I 上存在一个 θ_{ext} ，当 $\theta > \theta_{ext}$ 时，图 2b 中 i 与点 L 脱离成为脱体激波。另外还存在一个 θ^* ，当 $\theta = \theta^*$ 时， i 后气流为声速流， $M_i = 1$ 。 θ^* 区分了 i 下游是超声速还是亚声速。极线 I 上对于某个 θ_1 值有两个 p_i 值(和 ω_i 值)。I 上对应于较小 p_i 值的那一段称为 I 的弱支。由于 θ^* 与 θ_{ext} 在任一 M_0 值下相差不超过 0.5° ($\theta^* > \theta_{ext}$)，习惯上认为它们相等。因此弱支对应着 i 下游的超声速流，而同一极线上的强支对应于亚声速流。

i 下游的超声速流 M_1 流向刚壁产生了反射激波 r ， r 下游状态可用过 I 之点 1 作极线 II 来表示。

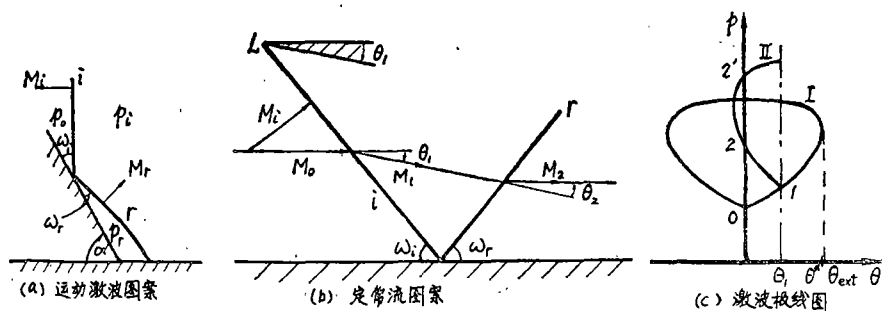


图 2 规则反射

为了满足边界条件， r 下游气流应与壁面平行。即 $\theta_1 + \theta_2 = 0$ (θ 为代数量)。在 θ - p 图上，规则反射的解，就是 II 的左半支与纵轴的交点。

随着 θ_1 增大， M_1 减小(图 2b)，极线 II 也变小。II 与 p 轴两个交点 2, 2' 逐渐靠拢，最后并成一个切点。超过这个限度，不存在交点。一般就认为在 $|\theta_1| \geq |\theta_{2,ext}|$ 时出现 Mach 反射。这相当于反射激波要成为脱体激波的情况。

当 $M_0 = 2.23$ ， $\xi = 0.433$ 时，会出现一种稳态的 Mach 反射[19, 28]，这时的 $\omega_i = 41.5^\circ$ 。其流动图案见图 3a。定常来流 (0) 区经 i ， r 达到的 (2) 区与经过 Mach 杆 m 达到的 (3) 区具有不同熵增。因 $p_2 = p_3$ ，故 $\rho_2 \neq \rho_3$ 。因此必然存在一个接触间断面 CS(即滑移

线), CS 两侧气流方向一致, 沿 CS 流动。在稳态 Mach 反射中, CS 线与壁面平行, 这在 $\theta-p$ 图上对应于 I 和 p 纵轴交点 3 同 II 和纵轴切点 2 相重合的情况, 见图 3b。可见稳态 Mach 反射同时满足 $\theta_1 + \theta_2 = \theta_3 = 0$ 和 $|\theta_1| = |\theta_2 \text{ext}|$ 。对于箭形楔上产生两道激波相汇交的问题, 也可得到三波点, 这里的 m 是一种广义的 Mach 激波。在定常情况下求解这类流场已有成熟的计算方法。

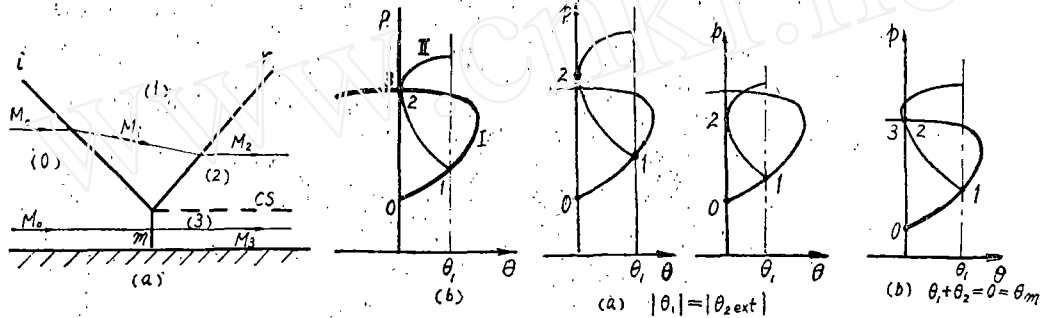


图3 稳态Mach反射(a)稳态MR流动图 (b)激波极线图 图4 激波极线图上表示的转变点

2. 关于转变点的研究 规则反射(RR)到 Mach 反射(MR)的转变点, 一般都是从 $\theta_1 + \theta_2 = 0$ 的边界条件出发, 用 $|\theta_1| = |\theta_2 \text{ext}|$ 来判别的, 见图 4a。在做激波管实验时, 给定 M_1 , 改变 ω_1 , 用接触间断 CS 线刚出现时的 ω_1 作为转变点。因此研究转变点通常都是用入射波角 ω_1 与反射波角 ω_r (图 1a, b) 作为参量的。

对于 RR 和 MR, 可用定常理论解析求得 ω_1 和 ω_r [23—25, 34, 39] (对 MR, ω_1 , ω_r 为三波点 A 的运动方向与入射波、反射波阵面的夹角)。一般认为通过转变点时, ω_1 会有跃变。但是 Kawamura 和 Saito (1956) 在空气激波管中做的实验 [19] 表明在刚壁反射问题中弱激波 (von Neumann 定义为 $\xi > 0.433$, 相应于 $M_0 < 2.23$) 强激波和 ($\xi < 0.433$) 在转变点处具有不同的性质。在用 $|\theta_1| = |\theta_2 \dots|$ 作为判别转变点的情况下, 他们的实验表明: 对 $M_0 > 2.23$ 的强激波, 在转变点反射波 r 下游的参量, 例如 ω_1 , p 的改变要发生间断; 对 $M_0 < 2.23$ 的弱激波, r 下游参量则是连续变化的。这与经典理论关于 ω_1 会在转变点阶跃性增加不符。

Henderson (1975) 根据他在风洞和激波管中 ($M_0 = 1.7-4$) 做的实验 [38] 认为 $|\theta_1| = |\theta_2 \dots|$ 的准则是错的。他的观点是在 RR \rightarrow MR 转变期间压力不连续的体系是不可能处在平衡态的, 他提出了新的准则: 转变是以整个过程中保持系统力学平衡这样的方式进行的。转变点的条件是 (0) 区流线经过 Mach 杆 m 后无偏折: $\theta_1 + \theta_2 = 0 = \theta_m$ 。

在激波极线图上, 这时应用于图 4b 上的 “2” (= “3”) 点。以此点作为转变点, 它在 II 上的 $|\theta|$ 值要比 $|\theta_2 \dots|$ 小一些。对于 $M_0 \geq 2.40$ 的空气 (这时 $M_2 \geq 1$), 实验结果表明这个准则是正确的。也就是说强激波入射时, r 下游的参量 (在其实验中体现为 ω_1) 在转变期间确实是连续变化的。(注意这个转变点比 $\theta_2 \dots$ 小了)。对于 $1.48 \leq M_0 \leq 2.40$, 这两个准则都不能预知他的实验得到的转变点; 但用他的准则算得的转变点倒是实验数据偏离 RR 理论曲线 ($\omega_0 - \omega_1$) 的开始。当 $M_0 = 1.48$ 时, r 就退化为 Mach 线,

ω_r 也就等于Mach角。

关于平面激波绕射圆柱、椭圆柱的RR转变为MR的问题, Heilig 在第11届国际激波管会议上发表了实验结果。他从多次照相法得到的相片中发现绕射过程中MR的滑移线与平面激波间夹角保持不变。由于在拍得的相片上往往需从RR和MR外推来寻找转折点, 因此他认为可应用这个结论来从照片上求出MR是在柱面上那一点开始发生的。

许多人用测 ω_r 值方法研究激波绕射单楔角时发现, 对 $M_0 > 2.40$, 在超过这两个准

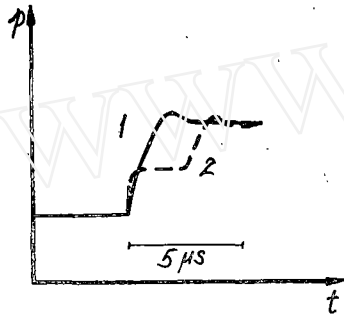


图5 示波器记录到的压力波形($\text{CO}_2, p_0 = 1.27 \text{ torr}$)
1. $\alpha = 47^\circ$ (RR) 2. $\alpha = 43^\circ$ (DMR)

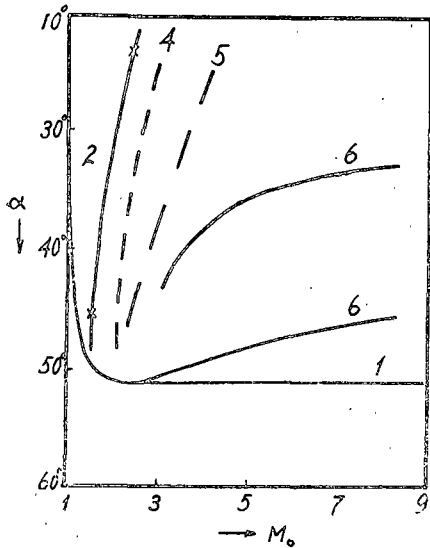


图6 M_0 - α 平面上表示的激波反射的不同形式
记录到第二个压力梯度的点

- 1 RR(下方)→RM(上方)界线
- 2 $M_2 = 1$, 其右边为 $M_2 > 1$
- 3 $M_{r_1} = 1$, M_{r_1} 为相对于CS与壁面的交点E, r后方的M数
- 4 SMR(左边)↔CMR(右边)实验得到的界线
- 5 CMR(左边)↔DMR(右边)实验得到的界线
- 6 RR→MR对真实空气 $p_0 = 10 \text{ torr}$ 算得的界线

见图6。曲线1, 2, 3为 $\gamma = 1.4$ 理想气体算得的值; 虚线为空气、氮气的实验值。

则预言的转变点后, 继续存在RR〔6, 12, 19, 38〕。进一步的研究〔38, 40, 59,〕表明在 $M_2 > 1$ 情况下, 出现了DMR(双Mach反射), 而不是真正的RR, 只是由于Mach杆 m 和接触间断CS太靠近壁面而分辨不出来。因此这时测得的 ω_r 实际上是第二个三波点后 ω_r , 见图1d。

通常SMR(单Mach反射)→CMR(复合Mach反射)的转变可用 r 上是否有扭点来判定, 见图1c; 而从相片上是否出现第二个反射激波 r' , 即出现第二个三波点 A' (见图1d)来区分CMR与DMR的。这个区分当然是不严格的, 因此也有人把CMR叫做带有扭点的DMR, 把有点 A' 的称为带有第二个三波点的DMR。

Merritt (1968)〔30〕, 还有Gvozdeav_a (1976)〔40〕, 用楔面上设置的压力传感器, 测到了Mach杆通过后的压力值, 证明了对DMR有两个很陡的压力梯度, 在转变点附近两次跃迁的累计值与RR的 p_r 接近, 见图5。这说明在第一个Mach杆通过后, 在CS与壁面交点E, 又产生第二个压力跃迁, 使压力达到 p_r 。可见确实从E处又发生了一道激波 r' 。因此, 这也是判别SMR→DMR的一个标准。

从这个实验可以知道, 对强激波, 在转变点附近继续存在RR只是一种错觉。实际上在转变点是由于出现了DMR而使 r 下游压力呈现连续变化的, 即 $(p_r)_{RR} = (p_r')_{DMR}$ 。只是RR→DMR这个转变在反射图案的相片上不易区分罢了。例如从图5, 可估计两个压力跃迁相隔仅约 $4 \mu\text{s}$; 对应于楔面上距离仅几毫米。

文献〔40〕给出了四种反射情况的界线,

曲线3是Law和Glass [33]认为出现DMR的界线。这个界线与实验结果不符。由曲线2和4可见对 $M_2 > 1$ (相应于 $M_0 > 2.40$), 就会出现CMR, DMR的。从图6可知道, 对强激波给定 M_0 , 增加楔角 α , 会有 $SMR \rightarrow CMR \rightarrow DMR \rightarrow RR$ 的变化。当然转变的界线与真实气体效应是有关的(对照曲线2与4, 曲线1与6)。因为内自由度的激发引起了通过 i 密度比的增加。

从边界条件的要求看, 当 $M_2 > 1$, 图1(d)中 r 下游的气流沿CS线AE流向壁面时, 必须折回成平行壁面的气流(第一个Mach杆的气流是亚声速的, 会调整得适应于边界条件)。若 $M_2 < 1$, 扰动可传到三波点A, 因此在 $RR \rightarrow MR$ 转变时 r 下游参量是连续变化的, 但对 $M_2 > 1$ 的超声速流, 就应自E点发出一道新的激波 r' , 交 r 于A点。有人用脱体激波对此现象作过粗略解释[40], 也有人用激波极线作过解释[26, 38]。总的来说关于DMR的机制还有待进行深入研究。

三、数值方法求解刚壁反射流场

自二维流体力学计算方法广泛应用以来, 对规则反射和Mach反射问题中流场参量的分布, 用数值计算的方法来求解, 已引起了人们的很大兴趣。Schneyer [41] 分别用二维欧拉编码(THOR)和二维拉格朗日编码(CRAM)计算过 $M_i = 2$ ($\gamma = 1.4$) 的激波打在楔上的问题。他用THOR先算了 $\text{tg} \alpha = 2$ 的RR, 得出了密度和压力的等值线。从等值线图上找到相应的反射角为 16° 和 16.5° 。这与RR理论预计的 16.33° 相符。然后他用THOR计算了 $\text{tg} \alpha = 1/2$ 的MR。从等密度线(或等压线)图上估计到三波点迹线与楔面的夹角 χ 为 9.1° (或 9.4°) 而实验结果为 8.9° [6]。考虑到存在的误差, 这几个角度值应是相同的。而且Mach杆后的过压 $\Delta p_3 = (1.66 - 1.71) \Delta p_1$, 与实验值 $\Delta p_3 = 1.66 \Delta p_1$ 也相符。欧拉编码计算起来要简单容易些, 其缺点是不能表示出滑移线的存在。用CRAM计算MR问题 ($\text{tg} \alpha = 1/2$), 因在楔尖部加速度为无穷大而增加了困难, 但能表示出滑移线。从计算结果可求得 χ 为 9.3° (或 9.5°), $\Delta p_3 = (1.63 - 1.66) \Delta p_1$, 可见也与实验结果相符。Kutler等[42]对流动性状, 激波位置和形状, 以及滑移面与壁面交点的旋涡奇性, 得到了更详细的结果。他们先对RR解二维与时间有关的欧拉方程组。为了引入自模拟, 改写了双曲型偏微分方程。利用拐角点与入射激波间的距离进行归一化。作自模拟变换把非定常方程简化为椭圆、双曲混合型准定常方程(在拐角点发出的声学圈和壁之间的激波段, 是椭圆型的; 而在声学圈之上为直激波, 在那里是双曲型的)。再引入一个类时项或后效项(在收敛解中, 趋于零), 则最后的方程组可用“强守恒定律形式”写出, 再用二阶有限差分方法来解算。他们对Mach反射作了计算[43], “也给出了具有反射激波、Mach杆和滑移线的流场”。Glass等人[44—46]用激波管实验拍得了干涉条纹图, 并画出了等密度线。他们把这种数字表示的实验与计算结果作了对比, 发现对RR和SMR, 在所有波的形状以及总体方面, 计算结果与数字实验符合得很好。但是在等密度线方面计算结果却不能令人满意。此外对实验得到的CMR, DMR流动图案还没有任何计算数据, 还有待计算工作者作出新的努力。

四、Whitham 理论

为了了解Whitham理论是如何应用于 Mach 反射问题，先来考察激波在传播过程中其形状和强度是如何变化的。把一维变截面管道流的基本方程写成特征形式，第一族特征关系为沿 $dx/dt = u + a$, $dp/dt + pa(du/dt) + \rho u a^2 [A'(x)/A(x)] = 0$ 。代入正激波关系后，可改写为 $M/(M^2 - 1)\lambda(M)(dM/dx) + (1/A)(dA/dx) = 0$ (1)

在M变化时 $\lambda(M)$ 变化范围很小。例如对 $\gamma = 1.4$ 的气体，当M自1变到无穷大时， λ 的变化范围为 4—5.07433。式(1)的解可写为

$$\frac{A}{A_0} = \frac{f(M)}{f(M_0)}, \quad f(M) = \exp \left\{ - \int \frac{M\lambda(M)}{M^2 - 1} dM \right\} \quad (2)$$

〔45〕和〔60〕给出了 $f(M)$ 积分的结果。

在建立了 $M = M(A)$ 的关系之后，Whitham 把声学射线方法用到激波的二维传播问题上，建立了激波动力学理论〔55, 57, 58〕。这里的射线定义为与激波一系列位置正交的迹线，设激波在 t 时刻位置为 $\alpha(x, y) = a_0 t$ 。定义射线管的横截面积与一个参考截面积的比值的极限为沿该射线的位置函数 A ，显然 A 正比于射线管的面积。激波位置 ($\alpha = \text{const}$ 曲线族) 和射线 ($\beta = \text{const}$ 曲线族) 组成了正交曲线坐标系，如图 7。对函数 $A(\alpha, \beta)$ ，增量 $d\beta$ 的线元是 $A(\alpha, \beta)d\beta$ 。在 dt 时间内激波传过的距离为 $Udt = M d\alpha$ ，因此增量 $d\alpha$ 的线元是 $M d\alpha$ 。

现在考虑图 7 中的曲边四边形 PQRS。令 $\theta(\alpha, \beta)$ 是射线与固定方向 (例如 x 轴) 的夹角。P 到 Q，射线倾角的变化为

$$\delta\theta = (QR - PS)/PQ = (1/M)(\partial A/\partial \alpha)\delta\beta$$

于是 $\partial\theta/\partial\beta = -(1/M)(\partial M/\partial \alpha)$ (3)

β 曲线的倾角为 $\theta + (\pi/2)$ ，通过类似的推导可得到

$$\partial\theta/\partial\alpha = -(1/A)(\partial M/\partial \beta) \quad (4)$$

式(3)，(4)与表示 A 和 M 间关系的式(2)联立，可以求解以 α, β 为自变量的 θ, M 和 A 。

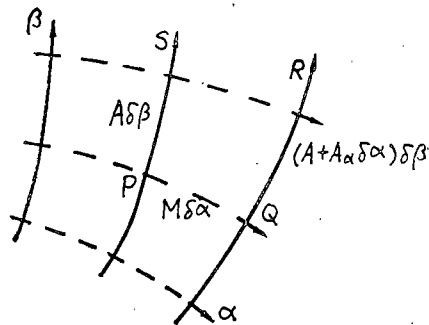


图7 激波动力学的线元

我们可以发现描述激波运动的方程组 (3)，

(4)，(2) 是双曲型的，它们表示了激波上传播有扰动的波，这些波带来了激波形状和强度的变化。于是，一维等熵流中运用的思想和方法完全可以用来处理方程组表示的沿激波传播的波。对方程组作适当的变换就可以写出特征关系为

$$\text{沿 } d\beta/d\alpha = \pm c, \quad \text{有 } \theta \pm \int dM/AC = \text{const} \quad (5)$$

其中 $C(M) = \sqrt{-M/AA'}$ 。利用式(1)可得到式(5)中的

$$\omega(M) = \int_1^M \frac{dM}{AC} = \int_1^M \left[\frac{\lambda(M)}{M^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}} dM$$

在平面激波绕射圆柱、圆球问题中，可利用笛卡儿坐标形式的特征关系来半图解地求三波点的迹线。把它与实验测到的迹线相比较，Brysen 和 Gross〔54〕认为 Whit-

ham 理论是有效的。当然用来求解激波绕射凸角的问题也是行之有效的[61, 62]。

对于平面激波绕射凹拐角的问题，从激波上传播扰动波的观点来看，凹拐角对应于推入活塞产生压缩波的扰动。直的激波阵面上传递M和 θ 增加的扰动波，使阵面凹向前，最终会导致在激波阵面上出现M和 θ 的突跃，即激波阵面的突然弯折。我们把这种在气体动力学激波上传播M, θ 间断的波称之为激波-激波。它给激波阵面的斜率带来间断。因此激波-激波对应于Mach反射的三波点迹线。

在 (α, β) 坐标系中，令两个相邻激波位置坐标差为 $\Delta\alpha$ ，射线坐标差为 $\Delta\beta$ ，间断发生在P, Q点。下标i, m表示间断前后的值(图8)，相应于Mach反射中的入射激波和Mach激波。从图8有 $PR^2 = (M_i \Delta\alpha)^2 + (A_i \Delta\beta)^2 = (M_m \Delta\alpha)^2 + (A_m \Delta\beta)^2$ 。 $\Delta\beta/\Delta\alpha$ 是 (α, β) 坐标系中激波-激波的速度，因此

$$C^2 = -(M_m^2 - M_i^2)/(A_m^2 - A_i^2) \quad (6)$$

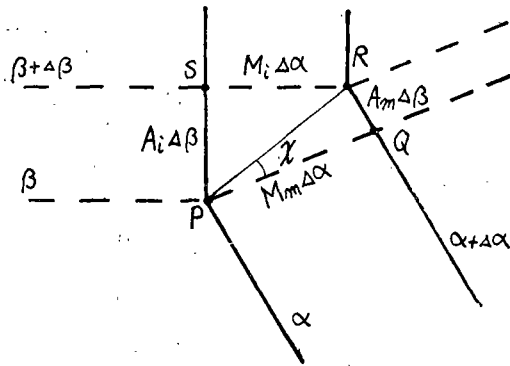


图8 激波-激波的线元

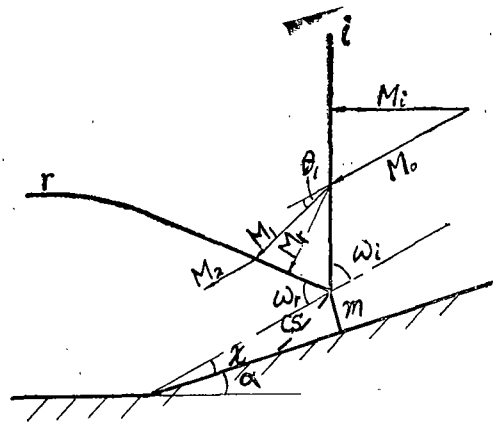


图9 Mach 反射中参量的命名

从 $\theta_m - \theta_i = 90^\circ - (\angle RPQ + \angle RPS)$ 出发，由图8写出 $\text{tg}(\angle RPQ)$ 和 $\text{tg}(\angle RPS)$ ，然后看利用式(6)，就得到

$$\text{tg}(\theta_m - \theta_i) = (M_m^2 - M_i^2)^{1/2} (A_i^2 - A_m^2)^{1/2} / (A_m M_m + A_i M_i) \quad (7)$$

其实 $\angle RPQ$ 就是三波点迹线与楔壁面夹角 χ (图9)，

于是有

$$\begin{aligned} \text{tg} \chi &= A_m \Delta\beta / (M_m \Delta\alpha) = (A_m / M_m) C \\ \text{tg} \chi &= (A_m / A_i) \{ [1 - (M_i / M_m)^2] / [1 - (A_m / A_i)^2] \}^{1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

现在来求解给定 γ , M_i 或 ξ_i , θ_m (现在的 $\theta_i = 0$)的Mach反射问题。从(7), (8)和(2)这三个方程即可求得 M_m , χ 。

式(7)中的 θ_m 是指Mach杆后气流方向，它等于图1b中楔面的倾角 α 。因此MR中的入射角 $\omega_i = 90^\circ - (\theta_m + \chi)$ 。如图9所示，相对于三波点，i上游的来流M数 M_0 由 M_i , ω_i 所决定。于是，通过i的流线偏折角 θ_i 可用 M_0 , M_i , ω_i 表示；i下游的M数 M_1 为 M_0 和 ξ_i 所决定。另外，由(2)区与(3)区压力相等，有 $\xi_m = \xi_i \xi_r$ ， ξ 为激波强度的倒数。由于Whitham理论用了M与A的关系式(2)，因此 M_i 与 M_m 已通过 χ , θ_m 相关联(图8)。对 M_i , M_r , M_m 分别应用正激波关系，就可得到用 M_i , M_m 表示的反射

激波阵面的M数 M_r 。MR中反射波的 ω_r 为 $\omega_r = \sin^{-1}(M_r/M_1) - \theta_1$ 。因此对于平面激波绕射楔的问题,给定 γ , ξ_i (或 M_i), θ_m , 利用式(2)和(7)求出 M_m , 再利用式(8)求出 χ 值。由 θ_m , χ 可写出 ω_0 值, 进而可以解析求得 ω_r 值。 ξ_i , θ_m , ω_0 , ω_r 和 χ 的值是在实验中测到的。不过, 应当看到在Whitham理论中, 流线方向在接触间断CS两侧应该一致的条件, 即 $\theta_1 + \theta_2 = \theta_m$ 不再满足, 因为Whitham理论已决定了M对A的依赖关系, θ_2 已由 $\sin^{-1}(M_r/M_1)$ 和 M_1 所确定。

已知的 ξ_i , θ_m 与计算得到的 M_m , χ , ω_0 , ω_r 的值都是可测的。为了仔细检验这个理论, Henderson(1980)在激波管中做了实验[60]。实验时分别取 ξ_i 为0.905, 0.490, 0.300, 0.510, 改变 θ_m 得到了 M_m 和 χ 的数据。实验结果表明这个理论对强激波和弱激波, 能很精确地确定Mach杆的激波M数, 仅在接近掠入射时(楔角为 0°), 才有少许偏差。(掠入射的M数 M_m 是用Henderson和Siegenthaler关于掠入射的精确理论得到的, 并与实验数据相符。)

对三波点的迹线角 χ , 理论与实验结果符合得不好。对于 ω_r , $\xi_i = 0.150$ 的强激波与理论相符; 其它三个 ξ_i , 理论曲线与实验数据相差甚远[60]。看来Whitham理论只能对强激波表示出符合实际的反射激波。

总之, 在激波绕射楔角圆锥、圆柱、圆球等问题中, Whitham理论在求解Mach激波的M数, 确定三波点迹线的走向等方面, 成功地提供了一种解析的方法。

考 参 文 献

- 1 von Neumann, J. (1943), Navy Dept., Bureau of ordnance, Re2c, Washington, D.C., Explosive Research Rept.12.
- 2 Seeger, R.J. & Polacheck, H. (1943), Navy Dept., Bureau of Ordnance, Re2c, Washington, D.C., Explosive Research Rept.13.
- 3 von Neumann, J. (1945), Navy Dept., Bureau of Ordnance, Re2c, Washington, D.C., NAVORD Rept.203-45.
- 4 Smith, L.G. (1945), Office of Scientific Research and Development, Washington, D.C., Rept.4943.
- 5 Taub, A.H. (1947), *Phys.Rev.*, **72**:51.
- 6 Bleakney, W. & Taub, A.H. (1949), *Rev.of Modern Phys.*, **21**:584.
- 7 Bardsley, O. & Mair, W.A. (1951), *Phil.Mag.*, **42**:39.
- 8 Feltcher, C.H. (1951), Dept.of Physics, Princeton Univ., TR II-4.
- 9 Fletcher, C.H., Taub, A.H. & Bleakney, W. (1951), *Rev.Mod.Phys.*, **23**: 271.
- 10 White, D.R. (1951), Dept.of Physics, Princeton Univ., TR II-10.
- 11 Jahn, R.G., Dept.of Physics, Princeton Univ., TR II-16(1954); II-18(1955); and II-19(1956).
- 12 Griffith, W.C. & Bleakney, W. (1954), *Am.J.Phys.*, **22**, 597.

- 13 Holder, D.W. & Gadd, G.E. (1955), *Boundary Layer Effects In Aerodynamics*, London: Her Majesty's Stationery Office.
- 14 Jones, D.M., Martin, P.M.E. & Thornhill, C.K. (1951), *Proc. Roy. Soc., A* **209**:238.
- 15 Lean, G.H. (1946), *Rep. Aero. Res. Comm., No. 10629 G.B.*
- 16 White, D.R. (1952), *Proc. 2nd Midwestern Conf. on Fluid Mech., Columbus, Ohio State Univ. Press*, 253.
- 17 Griffith, W.C. & Brickl, D.E. (1953), *Phys. Rev.*, **93**:451.
- 18 Wecken, F. (1948), *Z. angew. Math. Mech.*, **29**:338.
- 19 Kawamura, R. & Saito, H. (1956), *J. Phys. Soc. Japan*, **11**:584—592.
- 20 Melder, S. (1960), *Univ. of Toronto, UTIAS TN38*; also (1964), *J. Spacecraft and Rockets*, **1**:688—689.
- 21 Smith, W.R. (1959), *Phys. Fluids*, **2**:533.
- 22 Sternberg, J. (1959), *Phys. Fluids*, **2**:179.
- 23 Sakurai, A. (1964), *J. Phys. Soc. Japan*, **19**:1440—1450.
- 24 von Neumann, J. (1963), *Collected Works, Vol. 6, Pergamon*:238.
- 25 Henderson, L.F. (1964), *Aero. Quart.*, **15**:181.
- 26 Henderson, L.F. (1966), *J. Fluid Mech.*, **26**:607.
- 27 Heilig, W.H. (1969), *Phys. Fluids*, No. 5—9, Suppl. I:154.
- 28 Gvozdeva, L.G., Bazhenova, T.V., Predvoditeleva, O.A. & Fokeyev, V.P. (1969), *Aeron. Acta*, **14**:503.
- 29 Gvozdeva, L.G., Bazhenova, T.V., Predvoditeleva, O.A. & Fokeyev, V.P. (1970), *Astron. Acta*, **15**:503.
- 30 Merritt, D.L. (1968), *AIAA J.*, **6**:1208.
- 31 Weynantes, R.R. (1968), *Tech. Note Inst. Aerospace Studies, Univ. of Toronto, UTIAS 126*.
- 32 Lozzi, A. (1971), *Double Mach Reflexion of Shock Waves, M. Eng. Sc. thesis, Univ. of Sydney*.
- 33 Law, C.K. & Glass, I.I. (1971), *CASI Trans.*, **4**:2.
- 34 Semenov, A.N., Syschikova, M.P. & Berezkina, M.K. (1970), *Sov. Phy. Tech. Phys.*, **15**:795.
- 35 Skews, B.W. (Feb. 1971), *CASI Trans.*, **4**:99.
- 36 Skews, B.W. (1971), *The Effect of an Angular Slipstream on Mach Reflection, McMaster Univ., Hamilton, Ontario*.
- 37 Skews, B.W. (1972), *The Deflection Boundary Condition in the Regular Reflection of Shock Waves, McMaster Univ., Hamilton, Ontario*.

- 38 Henderson, L.F. & Lozzi, A. (1975), *J. Fluid Mech.*, **68**, pt.1:139.
- 39 Mölder, S. (1971), *CASI Trans.*, **4**:73.
- 40 Bazhenova, T.V., Fokeev, V.P. & Gvozdeva, L.G. (1976), *Acta Astronautica*, **3**:131.
- 41 Schneyer, G.P. (1975), *Phys. Fluids*, **18**:1119.
- 42 Kutler, P. & Shankar, V.S. (1977), *AIAA J.*, **15**:197.
- 43 Shankar, V.S., Kutler, P. & Anderson, D.A. (1977), AIAA Paper 77-89, Los Angeles, Calif.
- 44 Ben-Dor, G. & Glass, I.I. (1978), *AIAA J.*, **16**, 11:1146.
- 45 Ben-Dor, G. & Glass, I.I. (1979), *J. Fluid Mech.*, **92**, Pt.3:459.
- 46 Ben-Dor, G. & Glass, I.I. (1980), *J. Fluid Mech.*, **96**, Pt.4:735.
- 47 Russel, D.A. (1967), *J. Fluid Mech.*, **27**, Pt.2:305.
- 48 Ben-Dor, G. (1978), UTIAS, Rept.No.232.
- 49 Zhigalko, Y.F. (1975), *Fluid Mechanics Soviet Research*, **4**:81.
- 50 Henderson, L.F. & Lozzi, A. (1979), *J. Fluid Mech.*, **94**:541.
- 51 Henderson, L.F. & Lozzi, A. (1980), *J. Fluid Mech.*, **99**, Pt.4:801.
- 52 Chester, W. (1954), *Phil. Mag.*, **45**, 7:1293.
- 53 Chisnell, R.F. (1957), *J. Fluid Mech.*, **2**:286.
- 54 Bryson, A.E. & Gross, R.W.F. (1961), *J. Fluid Mech.*, **10**:1.
- 55 Whitham, G.B. (1957), *J. Fluid Mech.*, **2**:145.
- 56 Whitham, G.B. (1958), *J. Fluid Mech.*, **4**:337.
- 57 Whitham, G.B. (1959), *J. Fluid Mech.*, **5**:369.
- 58 Whitham, G.B. (1974), *Linear and Nonlinear Waves*, N.Y: John Wiley.
- 59 Henderson, L.F. & Siegenthaler, A. (1980), *Roc. Roy. Soc., A*, **369**:537.
- 60 Henderson, L.F. (1980), *J. Fluid Mech.*, **99**, pt.4:801.
- 61 Skews, B.W., *J. Fluid Mech.*, **29**:705.
- 62 Bazhenova, T.V., Gvozdeva, L.G. & Zhilin, Yu.V. (1979), *Acta Astron.*, **6**:401.