

无碰撞等离子体中的层流激波和孤立波

中国科学技术大学 孔祥言 徐燕侯 钟钊新

一、前言

本文介绍低密度、低 β 值等离子体中的激波,以及与其相关联的孤立波。我们知道在碰撞起主要作用的气体中,激波厚度是碰撞平均自由程的量级。由粒子之间相互碰撞引起散射,使流动速度降低,从而引起气体温度、压力和熵的增加,这就是激波中的耗散过程。这种转变层中主要由碰撞提供耗散的激波可称为碰撞激波。

而在密度较低的无碰撞等离子体中,存在急剧转变层厚度远远小于碰撞平均自由程的激波,我们称之为“无碰撞激波”。由Vlasov方程或由该方程导出的流体描述方程出发,可求得这种激波解或孤立波解。在这里我们把孤立波看作为“类激波”。

对无碰撞激波的研究是从解释太阳耀斑爆发引起地球磁场“突发”现象开始的。1955年Gold[1]首先提出了无碰撞激波的设计想。从60年代初开始,对无碰撞激波进行了大量的理论研究工作。1964年,卫星探测证实了地球弓形激波的存在[2]。接着进行了大量的实验室试验研究。

1966年,Sagdeev[3]将激波粗略地分为层流、湍流和混合型的三类。在层流激波中可以包含波长比激波厚度小得多的微湍流。湍流激波的数学描述相当困难,本文只介绍层流激波。介绍由Vlasov-Maxwell方程导出的流体描述方程的一种解法,即把方程组化成只含磁场 B 的一个微分方程,将这个方程与非线性振子运动方程进行类比,从而给出孤立子解和激波解。

二、基本方程·低 β 等离子体波的色散关系

2.1 基本方程 在无碰撞等离子体中,基本方程是Vlasov方程和Maxwell方程,或由这些方程导出的流体描述方程。Vlasov-Maxwell方程写出如下:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{C} \right) \cdot \nabla_v f = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{1}{C} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_e \int f d\mathbf{v} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{C} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{C} \sum_e \int f \mathbf{v} d\mathbf{v} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.5)$$

这里 f 是粒子分布函数, \mathbf{v} 是粒子的热速度, ∇ 是速度空间的哈密顿算子, 求和号是对粒子种类求和; 式中 e 对电子和离子分别取负值和正值。

由上述方程可导出流体描述的方程。为此定义等离子体的数密度 N 、流速 \mathbf{V} 和应力张量 \mathbf{P} 为

$$\left. \begin{aligned} N &= \int \langle f \rangle d^3v, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{N} \int \mathbf{v} \langle f \rangle d^3v \\ \mathbf{P} &= m \int (\mathbf{v} - \mathbf{V})(\mathbf{v} - \mathbf{V}) \langle f \rangle d^3v \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

我们得

$$\partial N / \partial t + \nabla \cdot (N\mathbf{V}) = 0 \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{V} / \partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + (1/mN) \nabla \cdot \mathbf{P} &= (e/m) [\langle \mathbf{E} \rangle + (1/C) \mathbf{V} \times \langle \mathbf{B} \rangle] \\ &+ (1/N) \int C \mathbf{v} d^3v \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中 $\langle f \rangle$ 表示一个量的系综平均, $\delta f = f - \langle f \rangle$ 表示对平均值的涨落, 而量 C 为

$$C = (-e/m) \langle (\delta \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}) \cdot \nabla \delta f \rangle$$

起着某种耗散项的作用。它依赖于涨落场, 对于没有微湍流的完全层流情形, $C=0$; 如果层流中含有微湍流, 则 $C \neq 0$, 这时有耗散。

2.2 低 β 等离子体波的色散关系 在低 β 等离子体中有多种波动现象, 其中包括磁声波和哨音波。垂直于磁场 \mathbf{B} 传播的磁声波的色散曲线是

$$\frac{\omega}{k} \approx V_A / \left[1 + \frac{C^2 k^2}{\omega_e^2} \right]^{1/2} \quad (2.9)$$

这里 $V_A = B / (4\pi N_1 M)^{1/2}$ 是 Alfvén 速度, 并假设有 $B^2 / (4\pi N m C^2) \ll 1$ 。而倾斜传播的哨音波, $1 \gg \delta\theta \gg (m/M)^{1/2} \approx 1.3^\circ$ 和 $\omega^2 \ll \Omega_e \Omega_i$, 其中 $\omega_e = (4\pi N e^2 / m)^{1/2}$ 是电子振荡频率, Ω_e 和 Ω_i 分别为电子和离子的回旋频率, 这种情形的色散关系为

$$\omega^2 / k^2 \approx V_A^2 [1 + C^2 k^2 / \omega_e^2 \delta\theta^2] \quad (2.10)$$

$\omega_i = (4\pi N e^2 / M)^{1/2}$ 是离子振荡频率, 这些色散曲线如图 1 所示。

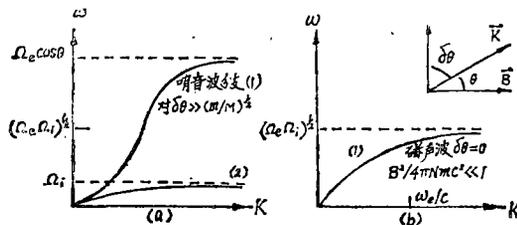


图 1 零温等离子体中倾斜哨音波模的色散曲线

激波可看作是由压力脉冲逐渐变陡而形成的。在普通的气体动力学中, 非线性效应使压力脉冲变得很陡, 这时耗散效应(粘性、热传导)变得很重要, 限制了脉冲进一步变陡。在无碰撞等离子体层流激波中, 粘性和热传导是不考虑的, 由色散限制进一步的非线性变陡, 结果形成带有前导波列或后随波列的振荡结构。耗散通过某些过程参加进来(如涨落场散射粒子), 使波列受到阻尼。

为了便于数学处理, 本文限于讨论冷等离子体情形, 在运动方程中略去热压项。所得结果对低 β ($\beta = NKT/(B^2/8\pi)$ 是热压与磁压之比) 情形是完全适用的。

三、磁声波、激波和孤立波

3.1 等离子体中垂直传播的非线性磁声波孤立波解 本节讨论冷等离子体中层流非线性波, 波的传播方向垂直于磁场 B_1 。在有限振幅情况下, 非线性使这些波变陡, 这种变陡又受到色散效应的限制。导致孤子的出现[3—5]。

我们取这样的坐标系: 相对于该坐标系, 波的剖面形状不变。因而对时间导数为零。

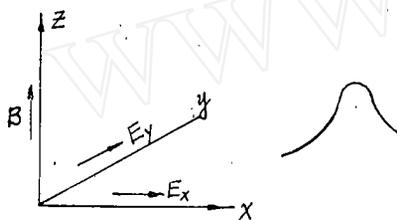


图2 对波静止的坐标系中的磁声波

规定等离子体速度方向 $V_x(-\infty) = V_1$, 取 z 轴沿磁场纵方向。对磁声波情形, 磁场方向不变, 电场有纵向分量 E_x 和横向分量 E_y , 即有 $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$, 如图2所示。

为了求得解析结果, 我们采用一维处理办法, 即假定所有的量都只是 x 的函数。并令 $C = 0$, 于是我们有以下方程组

$$V(-\infty) = V_1 i, \quad N(-\infty) = N_1, \quad B(-\infty) = B_1$$

$$\frac{d}{dx}(NV_x) = 0 \quad (3.1)$$

$$V_x \frac{d}{dx} \mathbf{V} = -\frac{e}{m} (E_x, E_y, 0) + \frac{e}{mc} (V_y B, -V_x B, 0) \quad (3.2)$$

$$dE_x/dx = 4\pi \sum eN \quad (3.3)$$

$$dE_y/dx = 0 \quad (3.4)$$

$$\left(0, -\frac{dB}{dx}, 0\right) = -\frac{4\pi}{c} \sum eNV \quad (3.5)$$

现在我们要由这个方程组导出一个只含 B 的微分方程。由(3.1)可得

$$NV_x = N_1 V_1, \quad \text{即 } N = N_1 V_1 / V_x \quad (3.6)$$

我们作准中性假设, $N_e \approx N_i \approx N$, 于是有

$$V_{x,e} \approx V_{x,i} \approx V_x \quad (3.7)$$

由(3.4) $E_y = E_y(\infty) = \text{常数}$

(3.2) 包括四个方程。首先写出其对电子和离子的 y 分量方程

$$\left. \begin{aligned} mV_x \frac{d}{dx} V_{y,e} &= -eE_y + \frac{e}{c} V_x B \\ mV_x \frac{d}{dx} V_{y,i} &= eE_y - \frac{e}{c} V_x B \end{aligned} \right\} \quad (3.2a)$$

将此二式相加, 即得

$$mV_{y,e} + MV_{y,i} = 0, \quad \text{或 } V_{y,e} = -V_{y,i} M/m \quad (3.8)$$

由此可知电子的横向速度比离子的大得多。而由无穷远处的边界条件, 可很容易地从(3.2a)第一式得

$$E_y = V_1 B_1 / c \quad (3.9)$$

于是(3.2a)第一式可写成

$$V_x \frac{d}{dx} V_{y,0} = - \frac{eV_1}{mc} B_1 + \frac{eV_x}{mc} B \quad (3.10)$$

(3.2)的x分量方程两式相减可得

$$E_x = - (B/c) V_{y,0} + O(m/M) \quad (3.11)$$

两式分别乘以mN, MN相加, 消去E_x得

$$N(m+M)V_x (dV_x/dx) = (Nc/c)B(V_{y,i} - V_{y,0}) \quad (3.12)$$

对此式进行积分, 并注意到(3.6), 可得

$$N_1 V_1 (m+M)(V_x - V_1) = \frac{e}{c} \int_{-\infty}^x NB(V_{y,i} - V_{y,0}) dx \quad (3.13)$$

而由(3.5), 有 $B dB/dx = (4\pi e/c)NB(V_{y,0} - V_{y,i})$ 。积分之可得

$$\frac{1}{2} [B^2 - B_1^2] = \frac{4\pi e}{c} \int_{-\infty}^x NB(V_{y,0} - V_{y,i}) dx \quad (3.14)$$

比较(3.13)和(3.14), 即得

$$V_x = V_1 - [B^2 - B_1^2] / (8\pi MN_1 V_1) \quad (3.15)$$

由此可见, 随着磁声波中B的增加, V_x 降低。

由(3.5)有,

$$V_x \frac{dB}{dx} = \frac{4\pi e}{c} NV_x (V_{y,0} - V_{y,i}) \approx \frac{4\pi e}{c} N_1 V_1 V_{y,0} \quad (3.16)$$

所以

$$\frac{cV_x}{4\pi e N_1 V_1} \frac{dB}{dx} = \frac{c}{4\pi e N_1} \left[1 - \frac{B^2 - B_1^2}{8\pi MN_1 V_1^2} \right] \frac{dB}{dx} = V_{y,0} \quad (3.17)$$

将(3.17)对x求导数, 再乘以 V_x 可得

$$V_x \frac{d}{dx} \left[V_x \frac{dB}{dx} \right] = \frac{4\pi e}{c} N_1 V_1 V_x \frac{d}{dx} V_{y,0} \quad (3.18)$$

将(3.10)和(3.15)代入上式, 即得

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{B^2 - B_1^2}{8\pi MN_1 V_1^2} \right] \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{B^2 - B_1^2}{8\pi MN_1 V_1^2} \right) \frac{dB}{dx} \right] \\ & = \frac{\omega_c^2}{C^2} (B - B_2) \left[1 - \frac{B(B+B_1)}{8\pi MN_1 V_1^2} \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

这就是我们所要求的B(x)的微分方程。此式两边乘以 dB/dx , 并将方程左边的 $[1 - (B^2 - B_1^2)/(8\pi MN_1 V_1^2)](dB/dx)$ 看作因变数, 可很容易地积分得

$$(dB/dx)^2 + 2\Phi(B) = 0$$

或

$$(3.20a)$$

$$d^2 B/dx^2 = -d\Phi(B)/dB \quad (3.20b)$$

其中 $2\Phi(B) = -\left\{ \left(\frac{dB}{dx} \right)_{x_1}^2 - \frac{\omega_1^2}{c^2} (B - B_1)^2 \left[1 - \frac{(B + B_1)^2}{16\pi MN_1 V_1^2} \right] \right\} \left[1 - \frac{B^2 - B_1^2}{8\pi MN_1 V_1^2} \right]^2 \quad (3.21)$

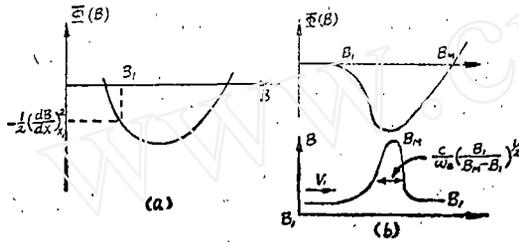


图3 磁声孤立子的势函数。孤立子例

这里 $(dB/dx)_{x_1}$ 是点 x_1 处 (也就是 $-\infty$ 处) dE/dx 的值。如果我们把 (3.20) 中 B 看作粒子坐标, 把式中 x 看作时间 t , 那末这与粒子在一维势阱中运动的方程式形式完全一样。势函数 $\Phi(B)$ 的一般形式如图 3a 所示。

由磁声波的势函数图可见存在周期性解, 这对应于非线性的波列。我们比较感兴趣的是 $(dB/dx)_{x_1} = 0$ 的情形, 这时 $(d\Phi/dB)_{B_1} = 0$, $\Phi(B)$ 如图 3b 上所示。Davis[5] 等最早用粒子势运动比拟的办法研究这种特殊问题。从势函数图 3b 上看, 这时粒子从 B_1 出发, 达到 B_m 再返回 B_1 , 是周期为无限的振动。这个解对应于孤立的脉冲, 在 $B-x$ 图上表现为从 B_1 到 B_m 再降到 B_1 。孤立子的传播速度可用最大振幅 B_m 来表示。由图 3 可见, 在 $B = B_m$ 处, $(dB/dx) = 0$, 因而由 (3.20) 得 $[\Phi(B)]_{B=B_m} = 0$, 所以

$$V_1 = \frac{V_{A1}}{2} \left(\frac{B_m}{B_1} + 1 \right) \quad (3.22)$$

其中 $V_{A1} = B_1 / (4\pi MN_1)^{1/2}$ 是 x_1 处 Alfvén 速度。于是 (3.20) 变成

$$\left[1 - \frac{2(B^2 - B_1^2)}{(B_m + B_1)^2} \right]^2 \left(\frac{dB}{dx} \right)^2 = \frac{\omega_1^2}{c^2} (B - B_1)^2 \left[1 - \frac{(B + B_1)^2}{(B_m + B_1)^2} \right] \quad (3.23)$$

因为 V_x 必须为正值, 即上式左边方括号内为正, 所以有

$$B_m < 3B_1 \quad (3.24)$$

于是限制 Alfvén 马赫数

$$M_A = V_1 / V_{A1} < 2 \quad (3.25)$$

如果 V_x 有负值, 粒子运动会有横穿交叉, “冷”的近似失效; 对马赫数大于 2, 这样的层流波破灭而产生多重结构。这表明有两种极限情形: 当 $B_m \rightarrow 3B_1$ 时, 孤立波幅度为 B_1 的三倍, 脉冲变得很尖; 而当 $B_m \rightarrow B_1$ 时, 变成平坦的小振幅扰动。

对于较小的波而言, 方程 (3.23) 简化为

$$B_1 \left(\frac{dB}{dx} \right)^2 \approx \frac{\omega_1^2}{c^2} (B - B_1)^2 (B_m - B) + O(B - B_1)^4$$

积分之得

$$B - B_1 = \frac{4(B_m - B_1)e^{|\xi|/L}}{(1 + e^{|\xi|/L})^2} \quad (3.26)$$

其中
$$L = \frac{c}{\omega_0} \left(\frac{B_1}{B_M - B_1} \right)^{1/2} = \frac{c}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{2(M_A - 1)}} \quad (3.27)$$

脉冲的特征宽度 L 正比于磁声波的特征长度 c/ω_0 。若我们规定波幅为 ε^2 量级, 即 $B_M - B_1 \sim B - B_1 \sim \varepsilon^2$, 则由(3.27)求得 $L \sim \varepsilon^{-1}$, 而由(3.11)和(3.17)可得

$$E_x \sim \varepsilon^3 \quad (3.28)$$

3.2冷等离子体中的磁声激波解。耗散效应 前面的分析是略去精确动量方程(2.8)中的耗散效应和热效应项。现在我们来考虑耗散项。如果层流结构中有微湍流, 则 $C \neq 0$, 微湍流使粒子散射, 在激波层中出现耗散过程。

若对磁声波而言, 耗散项主要是 y 分量, 有

$$\frac{1}{N} \int C v d^3v = \frac{1}{N} \int C v_y dv = -v V_{y,e} \quad (3.29)$$

这里 v 是常数。方程(3.1), (3.3), (3.4)和(3.5)均不变, 只是(3.2)中第一个方程或(3.10)变为

$$\begin{aligned} V_x \frac{dV_{y,e}}{dx} &= -\frac{eV_1}{mc} B_1 + \frac{e}{mc} V_x B - v V_{y,e} \\ &= \frac{eV_1}{mc} (B - B_1) \left[1 - \frac{B(B+B_1)}{8\pi MN_1 V_1^2} \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$- \frac{vc}{4\pi e N_1} \left[1 - \frac{B^2 - B_1^2}{8\pi MN_1 V_1^2} \right] \frac{dB}{dx} \quad (3.31)$$

右边多出一项 $-v V_{y,e} = [-vc/(4\pi e N_1)] \times V_x/V_1 \times (dB/dx)$ (3.32)

方程(3.11)到(3.18)也不变。将(3.15)和(3.31)代入(3.18), 我们得

$$\begin{aligned} \frac{V_x}{V_1} \frac{d}{dx} \left[\frac{V_x}{V_1} \frac{dB}{dx} - \frac{4\pi e^2 N_1}{mc^2} (B - B_1) \left[1 - \frac{B(B+B_1)}{8\pi MN_1 V_1^2} \right] \right] \\ - \frac{v}{V_1} \frac{V_x}{V_1} \frac{dB}{dx} \end{aligned} \quad (3.33)$$

在这种情况下, 为方便起见, 可定义新的变量 τ , 使

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{V_x}{V_1}, \quad \text{即} \quad \frac{V_x}{V_1} \frac{d}{dx} \equiv \frac{d}{d\tau} \quad (3.34)$$

于是方程(3.33)可写成

$$\frac{d^2 B}{d\tau^2} = -\frac{2\Phi(B)}{2B} - \frac{v}{V_1} \frac{dB}{d\tau} \quad (3.35)$$

其中

$$\Phi(B) = \frac{\omega_e^2}{2c^2} (B - B_1)^2 \left[\frac{(B+B_1)^2}{16\pi MN_1 V_1^2} - 1 \right] \quad (3.36)$$

方程(3.35)与(3.20b)相比多了一个阻尼项。这个方程和粒子在一维有阻尼的势阱中运动的方程具有同样的形式。图4a中虚线表示粒子在有阻尼的势阱中运动时, 势函数 $\Phi(B)$ 随“位置坐标” B 的变化关系。而在 $B - \tau$ 图上就对应于激波(图4b); 如果没有阻尼影

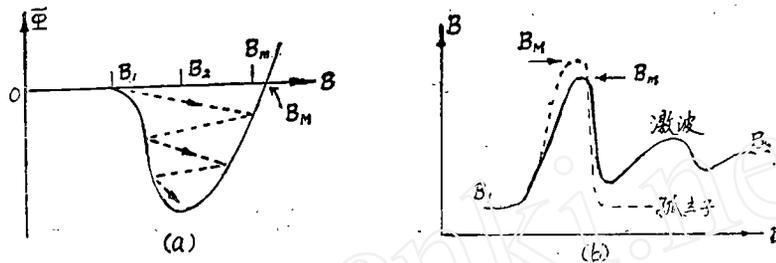


图4 “粒子”在势阱中的阻尼运动，磁声激波解

响，就是虚线所示的孤立子。势 $\Phi(B)$ 的极小值出现在

$$B_2 = -(B_1/2) + [8\pi MN_1 V_i^2 + (B_1^2/4)]^{1/2} \quad (3.37)$$

而 $B_m = -B_1 + (16\pi MN_1 V_i^2)^{1/2}$ 。这就是说解 $B(x)$ 从 B_1 开始，由于有阻尼不再到达 B_m ，而是最大值为 B_m 。经过振荡，当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $B(x) \rightarrow B_2$ 。由于耗散作用，孤立波解变成激波解。

四、等离子体中倾斜传播的激波和孤立波

前节讨论的情形是波的传播方向与磁场垂直的情形。现在讨论波的传播方向与磁场 B_1 方向夹角为 θ ，它满足关系 $\delta\theta \equiv (\pi/2) - \theta \gg (m/M)^{1/2}$ 和特征频率 $\omega \ll (\Omega_e \Omega_i)^{1/2}$ 的情形。根据我们所知道的线性色散关系，可以认为只有离子色散效应起作用， m/e 项可以忽略。我们所用准中性假设 $N_e \approx N_i \approx N$ ，并考虑耗散项 $-\nu(V_e - V_i)$ ，写出方程组

$$\nabla \cdot (NV) = 0 \quad (4.1)$$

$$0 = E + \frac{1}{c} V_e \times B + \frac{m\nu}{e} (V_e - V_i) \quad (4.2)$$

$$\frac{M}{e} (V_i \cdot \nabla) V_i = E + \frac{1}{c} V_i \times B + \frac{m\nu}{e} (V_e - V_i) \quad (4.3)$$

$$\nabla \times E = 0 \quad (4.4)$$

$$\nabla \times B = (4\pi e N/c) (V_i - V_e) \quad (4.5)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (4.6)$$

由(4.3)–(4.2)消去 E 得

$$\frac{M}{e} (V_i \cdot \nabla) V_i = \frac{1}{c} (V_i - V_e) \times B$$

用(4.5)消去上式中的 $V_i - V_e$ ，并将 V_i 写成 V ，得

$$\frac{M}{e} (V \cdot \nabla) V = \frac{1}{4\pi e N} \nabla \times (B \times B) \quad (4.7)$$

而由(4.2)和(4.4)消去 E ，即有

$$\nabla \times \left[\frac{1}{c} (V_e \times B) + \frac{m\nu}{e} (V_e - V_i) \right] = 0$$

用(4.5)代入上式, 消去 $V_e - V_i$, 得

$$\nabla \times (\mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \nabla \times \left[\frac{c}{4\pi e N} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right] - \frac{c^2}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{B} \right) = 0$$

其中 $\sigma = Ne^2/mv$ 是电导率。若 σ 与位置无关, 则上式写成

$$\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \frac{c}{4\pi e} \nabla \times \left[\frac{1}{N} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right] - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left[\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \right] = 0 \quad (4.8)$$

(4.7), (4.8)以及(4.1)和(4.6)提供了处理倾斜激波的基本方程〔6〕。像前面一样, 仍取波在其中是静止的坐标系, 并设所有的量只是 x 的函数。在未受波扰动的游区, $\mathbf{B} = (B_{1x}, B_{1y}, 0)$, $\mathbf{V}_i = (V_{1x}, 0, 0)$ 。由(4.6)可知, 在激波前后和激波层内, $B_x = \text{常数}$ 。对一般的 x 值, \mathbf{B} 和 \mathbf{V} 有三个非零的分量。

写出(4.7)的分量方程, 并利用

$$NV_x = N_1 V_1 \quad (4.9)$$

$$B_x = \text{常数} \quad (4.10)$$

很容易求得

$$V_x = V_1 - [1/(8\pi MN_1 V_1)](B_y^2 + B_z^2 - B_{1y}^2) \quad (4.11)$$

$$V_y = [B_x/(4\pi MN_1 V_1)](B_y - B_{1y}) \quad (4.12)$$

$$V_z = [B_x/(4\pi MN_1 V_1)]B_z \quad (4.13)$$

利用(4.7)取代(4.8)左边的第二项, 写出 y 和 z 轴方向的分量方程, 得

$$V_y B_x - V_x B_y + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{dB_y}{dx} + \frac{Mc}{e} V_x \frac{dV_z}{dx} = -V_1 B_{1y} \quad (4.14)$$

$$V_z B_x - V_x B_z + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{dB_z}{dx} - \frac{Mc}{e} V_x \frac{dV_y}{dx} = 0 \quad (4.15)$$

现在用下标2表示 $+\infty$ 处的量。在 $+\infty$ 处, 我们有 $dB_y/dx = dB_z/dx = \dots = 0$ 。将 $+\infty$ 处条件代入(4.12)和(4.14)两式, 消去 V_2 , 得

$$\frac{B_x^2}{4\pi MN_1 V_1} (B_{2y} - B_{1y}) = V_{2x} B_{2y} - V_1 B_{1y} \quad (4.16)$$

将 $+\infty$ 处条件代入(4.13)和(4.15)两式, 消去 V_{2z} 得

$$\left(\frac{B_x^2}{4\pi MN_1 V_1} - V_{2x} \right) B_{2z} = 0 \quad (4.17)$$

这时有两种情况:

(1) 若 $B_{2z} \neq 0$, 则 $V_{2x} = B_x^2/(4\pi MN_1 V_1) = V_1$, 这种情形表示旋转间断, 即 \mathbf{B} 发生了旋转, 但大小不变, 且等离子体密度不受压缩。

(2) 我们讨论另一种更重要的情形, 即 $B_{2z} = 0$, $V_{2x} \neq V_1$, 这时出现密度压缩的真正激波。由(4.13)看出, 这时 V_{2z} 也是零。我们可求得以下的激波跳跃条件。将 $+\infty$ 处条件代入(4.11)和(4.14)两式得

$$V_1 = \frac{B_x^2}{4\pi MN_1 V_1} + \frac{B_{2y}^2 + B_{1y} B_{2y}}{8\pi MN_1 V_1} \quad (4.18)$$

将(4.18)代入(4.11)在 $+\infty$ 处的关系式得

$$V_{2x} = \frac{B_x^2}{4\pi MN_1 V_1} + \frac{B_{1y}^2 + B_{1y} B_{2y}}{8\pi MN_1 V_1} \quad (4.19)$$

且由(4.12), 有 $V_{2y} = [B_x / (4\pi MN_1 V_1)] (B_{2y} - B_{1y})$ (4.20)

象以前一样, 我们要由以上方程组导出一个只含 B_y 的微分方程。将(4.13)对 x 求导数, 与(4.11), (4.12)一齐代入(4.14)得

$$\frac{B_y (B_y^2 + E_z^2 - B_{1y}^2)}{8\pi MN_1 V_1} - U_0 (B_y - B_{1y}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{dB_y}{dx} + \frac{cB_x V_x}{4\pi e N_1 V_1} \frac{dB_z}{dx} = 0 \quad (4.21)$$

将(4.12)对 x 求导数, 与(4.11), (4.13)一齐代入(4.15)得

$$\left[\frac{B_y^2 + B_z^2 - B_{1y}^2}{8\pi MN_1 V_1} - U_0 \right] B_y + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{dB_y}{dx} - \frac{cB_x V_x}{4\pi e N_1 V_1} \frac{dB_z}{dx} = 0 \quad (4.22)$$

其中

$$U_0 = V_1 - \frac{B_x^2}{4\pi MN_1 V_1} = \frac{B_{2y} (B_{2y} + B_{1y})}{8\pi MN_1 V_1} \quad (4.23)$$

后面一个等号利用了方程(4.18)。

(4.21)和(4.22)两式仍很复杂, 还需要进行简化。我们来求它的渐近解, 用小参数 ε 限制下列各量:

$$V_1 - V_{2x} \sim B_{2y} - B_{1y} \sim \varepsilon, \quad B_z \sim \varepsilon^{3/2} \\ \frac{dB_z}{dx} \sim \varepsilon^2, \quad (m/M)^{1/2} \leq \delta\theta \ll 1, \quad \varepsilon \ll \delta\theta$$

这个量级关系对应于低Mach数弱激波的极限情形, 且 $\delta\theta$ 为几度。这表示磁扰动在 y 方向分量很大, 在 z 方向分量很小。因而(4.22)中 B_z^2 和 dB_z/dx 项可以略去, 由该式解出 B_z , 代入(4.21)即得只含 B_y 的微分方程

$$\left(\frac{c\delta\theta}{\omega_i} \right)^2 \frac{d^2 B_y}{dx^2} - \frac{(B_y^2 - B_{1y}^2) B_y}{8\pi MN_1 V_1 U_0} - \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma U_0} \right) \frac{dB_y}{dx} + B_y - B_{1y} = 0 \quad (4.24)$$

这里 $\omega_i^2 = 4\pi e^2 N/M$, ω_i 是离子振荡频率。

与上一节类似, 此方程可写成阻尼势运动方程的形式

$$L^2 \frac{d^2 B_y}{dx^2} + \frac{d\Phi}{dB_y} - R \frac{dB_y}{dx} = 0 \quad (4.25)$$

这里

$$\Phi(B) = - \frac{(B_y^2 - B_{1y}^2)^2}{32\pi MN_1 V_1 U_0} + \frac{(B_y - B_{1y})^2}{2} \quad (4.26)$$

特征长度 $L = c\delta\theta/\omega_i$, 阻尼系数 $R = c^2/(4\pi\sigma U_0)$, U_0 由(4.23)给定, 于是势函数 $\Phi(B)$ 如

图5a所示。

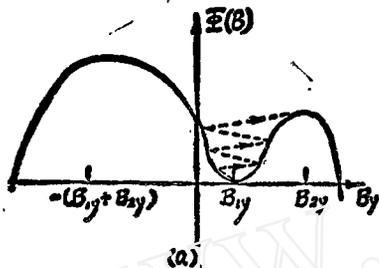


图5a 在 \$(m/M)^{1/2} \ll \delta \ll 1\$ 情况下倾斜传播哨音波的势函数 \$\Phi(B)\$

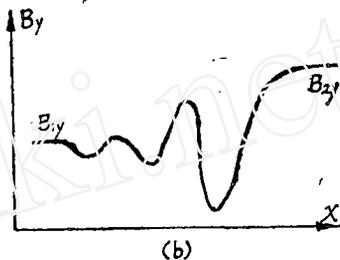


图5b 穿过倾斜激波时 \$B_y\$ 随 \$x\$ 的变化关系

方程(4.25)是含有负阻尼项 \$-RdB_y/dx\$ 的非线性振子的运动方程。运动从 \$B_{1y}\$ 处出发沿着图5a中虚线轨道前进,幅度逐渐增大,最后到达 \$B_{2y}\$。

这种激波有一系列稀疏波出现,幅度增长直到 \$B_{2y}\$ (图5b)。这与垂直传播的磁声波情形,有一系列压缩波的情况正好相反。两者的基本差别在于:对哨音波情形的离子, \$\delta\theta \gg (m/M)^{1/2}\$,色散使 \$d\omega/dk\$ 增加;而磁声波情形的电子, \$\delta\theta = 0\$,色散使 \$d\omega/dk\$ 减小。

在激波前缘处,我们可用 \$B_y = B_{1y} + be^{\Lambda x}\$ 形式的解代入(4.25)解出 \$\lambda\$, 可得前缘处解的渐近表示式

$$B_y = B_{1y} + \text{conste}^{Rx/2L^2} \cos \left[\frac{x}{L} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{B_{2y} - B_{1y}}{B_{1y}} \right)^{1/2} + \varphi \right] \quad (4.27)$$

所以振荡波长为

$$\frac{2\pi}{L} \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{B_{1y}}{B_{2y} - B_{1y}} \right)^{1/2} \quad (4.28)$$

对于给定的马赫数,在弱激波条件下,我们得到只有激波解,这是因为略去了小量 \$B_z\$。在更一般的情况下,也可得到孤立波解。

利用类似的方法,也可得到离子声激波和孤立波解[7]。

参 考 文 献

- [1] Gold, T., in Gas Dynamics of Cosmic Clouds (ed., J. M. Burgers and J. C. Van de Hulst), Amsterdam (1955), 103.
- [2] Ness, F. N., et al (1964), *J. Geophys. Res.*, **69**:3531-69.
- [3] Sagdeev, R. Z., in Review of Plasma Physics (ed., M. A. Leontovitch), New York (1966), Vol. 4:23.
- [4] Adlam, J. and Allen, J. (1958), *Phil. Mag.*, **3**:448.
- [5] Davis, L., et al (1958), *Z. Naturforsch.*, **13a**:916.
- [6] Karpman, V. I. (1964), *Soviet Phys. Tech. Phys. (USA)*, **8**:715.
- [7] Tidman, D. A. and Krall, N. A. (1971), *Shock Wave in Collisionless Plasma*, John Wiley-Interscience, New York.