参 考 文 献

Bateman, H.1944 Partial Differential Equations.New York; Dover

Mahoney.M.S.1972 Fermat's mathematics; Proofs and conjectures. Science 178:30

Munk,M.M.1977.Congruence Surds and Fermat's Last Theorem.New York; Vantage

Ore, O.1946.Number Theory and Its History.New York; McGraw-Hill

译自：Munk, Max M.（1981）,My early aerodynamic research——thoughts and memories, *Ann.Rev.Fluid Mech.*, **13**: 1—17.

（赵国英　王　复译　卞荫贵校）

湍流模型展望[1)]

大 路 通 雄

1．引　言

格廷根、剑桥、帕萨迪纳等等在航空史上留下光辉名字的城市，不愧为湍流研究的发源地。从那时起，飞机与湍流一直被认为是“青梅竹马”的关系。关于湍流现象的原理和应用的重要性，以及研究中的困难，本刊要很好进行讨论。虽然是很繁难的事，无奈它与飞机休戚相关，甚至在征服宇宙的今天，湍流问题依然存在。关于湍流问题，常发生既不是这样的，也不是那样的之类的漫无边际的争论。悲观论者主张“湍流问题还无法描述”，要强的人则预言“再加一把劲湍流问题也会被征服”。我的看法则是，实际情况是介于二者之间。究竟更接近哪一方，其出入这里就不阐述了。几年前，Bradshaw［1］研究了边界层的雷诺应力，他推断，为了克服该应力，航空界一年间要耗费喷气发动机燃料数千万吨。当然，不仅航空领域，象能源问题、环境问题、灾害科学等等，不论在哪个方面，想避开湍流都是不可能的。这已成为常识。从必须定量计算实际湍流效应的迫切性来看，虽然所谓“湍流究竟是什么”这种根本问题的讨论已过时，但是本着现今获得的知识和计算能力，能否迅速正确地回答所定的要求，这是一项需要切实研

1）日本航空宇宙学会空气力学部门委员会于1979年4月主办了该学会的第10届年会，宣读了以“湍流模型及其应用”为总题目的9篇论文，并在日本航空宇宙学会志第28卷313期（1980年2月）上以特集形式登载出来。其中第一篇论文《湍流模型展望》阐述了关于湍流模型的全面展望和物理考察。其余论文分别介绍了湍流边界层问题的各种解法及应用。整个特集的内容立足于实用的分析。当分析结果与实验数据不一致时，则围绕着如何修正湍流模型为好这一课题的研究进行讨论。——译者

究的课题。以湍流实用计算法而著名的Cebeci和Smith，在他们的著作［2］的扉页上引用了算子法发明者Heaviside的话："我能因为不完全了解消化过程而拒绝进食吗？"。

本文题目中的"湍流模型"就是为了指出具体的方法论而提出的。简单说来，从给定的数据求得关于湍流行为与特性的有用数值计算结果，这是最主要的目的。关于同样的主题，除了笔者［3，4］介绍的以外，近年来的评论和专题论文不胜枚举［1,2,5—12］。因而，本文尽管是展望，也不可避免有一定程度的重复之处。但本文本着将本特集其他人的各论点和应用例子区分开的想法，以模型化的全部流动为中心，多少加上一些自己的见解来进行阐述。

2. 模 型 条 件

针对上述湍流模型的目的所作的工作，随着电子计算机的迅猛发展和计算能力的快速提高，不言而喻已经有了巨大的突破。特别在60年代后半期，湍流计算方法在质量上进入了一个新阶段，有关的文献数量也剧增。本文只不过把这些文献简单地加以收集整理，大概不可能符合现状。这些文献的最基本的共同大前提，都是从连续体的流体运动方程出发。当然，是以通常的牛顿流体来考虑纳维-斯托克斯方程（以下简称为NS方程）为好。本来，湍流脉动概念本身，意味着基于力学不稳定的连续体脉动级的宏观现象，它来自不规则热运动的分子脉动，其起源与其它事物不同。这个前提被认为是十分合理的。事实上，作为湍流度最小尺度的大致标准，采用由流体动粘性系数ν［m^2/s］和耗散参数ε［m^2/s^3］得到的阔尔莫戈洛夫长度η和时间τ，从量纲分析其大小分别为

$$\eta=(\nu^3/\varepsilon)^{1/4},\quad \tau=(\nu/\varepsilon)^{1/2} \tag{2.1}$$

可以确定，它们与分子的长度和时间的尺度相比，通常具有大得多的值。理想情况是，NS方程若能够直接积分，那就能够随心所欲地得到关于湍流的情报，目前是有这种企图的［13，14］（参见第6节）。

但是，现实的问题是，在湍流本质的三维非定常运动基础上，其整体结构的尺度L，T和上述的η，τ之比，就是表征湍流的雷诺数R，根据简单的考察，得出

$$L/\eta\propto R^{3/4},\quad T/\tau\propto R^{1/2} \tag{2.2}$$

R变动很大的谱涉及极宽的频带。因此数值计算所需要的格网点数就成为较大的问题。这对于实用上的直接积分而言，尚存在明显的距离。现有的CRAY-1型高速电子计算机，最大速度每秒可以进行250×10^6次的浮点运算。根据最近Saffman［12］1)的估计，用该电子计算机计算均匀各向同性湍流的衰减过程，$R=100$时一次试算所需时间是最少4分钟，$R=400$时需要4天。但是，即使假定它可以实现，NS方程在数学上仍不是很适合的。由于初值与边值的微小变化可能产生完全不同的结果，所以，要获得有意义的预测值，必须反复进行统计性的多次计算试验。至少在现阶段有必要给NS方程加上一点限制，以便成为可以实现计算的形式。这就是说，所谓湍流模型化，事实上就是NS方程的模型化。

1）译文《湍流理论的问题和进展》，见《力学译丛》1980年第5期18—31页。

一般在把方程模型化时，必然使原方程失去原有内容的某些部分。这是不是模型的致命缺陷，需要根据问题的性质和目的来确定。但在NS方程那样细致而复杂的方程组中，这点不容易一下子看出来。所以只得采用所谓"试探错误"的方法。现在的趋势，是接连不断地提出的湍流模型的种类在数量上非常多，致使利用者难以选择。这里，笔者先列举良好模型条件的三要素：普遍性（适用范围广）；可靠性（量的精度高）；经济性（计算费用少）。遗憾的是，由于这些要求相互矛盾，所以不能同时满足所有的要求，而应根据具体情况进一步确定重点是哪项，从而可以集中选择范围。事实上，明确制定出计算的对象与目的，在湍流模型的应用方面是特别重要并引人注目的方法。

§3．湍流模型的发展

对实际湍流的预测计算，是过去湍流研究的最初目标。从Boussinesq的涡粘性模型算起，已过去约100年了；从普朗特的混合长模型算起，也已过去50多年了。在过去这些年间，处理一般的剪切湍流的方法，是以平均NS方程，即所谓的雷诺方程（以下简称R方程）代替NS方程本身。在此情况下，假定不可压缩牛顿流体的发展二维定常湍流剪切层（厚度δ）适用通常的边界层近似时，使用惯用的符号可把R方程写为

$$\left.\begin{aligned}&(\partial U/\partial x)+(\partial V/\partial y)=0\\&\frac{DU}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{dP_1}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y}-\overline{u'v'}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

式中，x是主流方向，y是法线方向，$D/Dt=\partial U/\partial x+\partial V/\partial y$。大写字母及横线表示平均值，一撇表示脉动分量，$P_1$是主流压力，并略去了法向应力分量$\overline{u'^2}$，$\overline{v'^2}$和外力项。在此，新的未知量雷诺应力（以下简称$R$应力）意味着$x$方向的动量$\rho u'$向$y$方向输运的平均流线密度。正如大家所熟悉的，该项的最早处理方法为

涡粘性模型：$-\overline{u'v'}=\nu_T(\partial U/\partial y)$　　(3.3)

混合长模型：$\nu_T=l^2|\partial U/\partial y|$　　(3.4)

（3.1）和（3.2）仅用U和V的闭合形式导出，因而，问题便归结为怎样选择涡粘性系数ν_T和混合长l的经验参数分布。换句话说，这种选择方法的结果大有差别，因为仅用一个粗略的参数代表湍流特性是没有道理的。所以这点被认为是此种模型共有的最大缺陷。

另一种较早采用的方法是，用（3.1），（3.2）沿y方向积分的引人注目的积分动量方程的积分法。即，当剪切层的位移厚度为δ^*，动量厚度为θ，外缘速度为U_1，表面摩擦系数为C_f，$H=\delta^*/\theta$时，该方程可写成为下列常微分方程：

$$\frac{d\theta}{dx}+(H+2)\frac{\theta}{U_1}\frac{dU_1}{dx}=\frac{1}{2}C_f\qquad(3.5)$$

这样作的用意，在于以不同的两个独立辅助关系式来解出三个未知量θ，H，C_f [15]。积分动量方程（3.5）本身，表面上与上层流的情况具有完全一样的形式，但由于辅助关系式里直接包括湍流度效应，所以其组成一般来说不那么简单。在缺乏湍流结构知识

的初期，对速度分布及摩擦系数专门利用了假定“幂律”的简单估算方法。Buri法和Gruschwitz法等就是在这时期中采用的方法〔15〕。在以后的改进中，采用通过广泛实验而导出的更精密的辅助关系式，即，Doenhoff和Tetervin法（1943），以及后面将叙述的初次考虑积分平均能量的方程（4.4），即Truckenbrodt法（1954）等〔15〕。本来，积分法着眼于用尽量少的计算量得到简便的结果，而不深入研究详细的速度分布和应力分布，因而对具体情况难于事先设想获得成功。

对此，（3.3）和（3.4）作为计算方法的出发方程，包括了直接求解估计任何形式R应力的（3.1）和（3.2）偏微分方程组的手续，所以称之为通用微分法（或者称场的方法）。在电子计算机出现之前，由于计算能力的限制，无论采用何种计算方式，都难以实现大幅度的质的改进。虽然有过几种重要的先驱尝试〔16—20〕，但是都把湍流研究的重心转移到基础的均匀各向同性湍流统计理论，或者从层流到湍流的转换过程等问题上。如第2节开头所述，随着电子计算机的普及和发展，情况在不断发生变化，积分法与微分法的面貌焕然一新，并将在高精度计算技术领域得到不断发展。在此期间，1968年召开的“关于湍流边界层计算的AFOSR-IFP斯坦福会议”，汇集了30多种计算方法进行论战，从而展示出此领域的远景〔21，22〕。在这次会议上，关于积分法的论文占全部论文的2/3，处于领先地位。但是，此后微分法的进展惊人，迅速形成了淘汰积分法的趋势。其根本原因在于计算能力的惊人提高，使处理复杂的联立偏微分方程的困难得以解决。顺便看一看若干主要型号计算机的标准计算速度的提高情况（数值单位MFLOPS——每秒一百万次浮点运算）：IBM 360/65，0.6；HITAC 8800，6；CDC 7600，10；CRAY-1，60。此外，随着实验测量技术和信息处理技术的长足进步，逐渐积累了关于湍流详细结构的知识，因而达到了高级模型的定量化。这也是促使微分法发展的一大因素。

70年代出现了为初次大型数值计算而研究的大涡模拟（LES）方法，又称小网格模拟（SGM）方法〔23，24〕。这是介于NS方程和R方程中间的水平的计算，是具有新设想的数值模型。其历史虽然不长，但可算是积分法和微分法之外的第三种有力的数值计算方法。对使用者来说，如用有限元素法进行结构计算，则这些湍流计算法的理想情况，是把常规的预知湍流特性易于编入高度极限设计和数值预报的程序系统。由于反映湍流现象及其复杂性的方程组存在着数学上的困难，所以这种希望还不一定成为现实。但从局部来看，湍流模型计算的实用化时代已匆匆到来。下面对各种方式再简要地追述一下其动向。

4. 积分法的动向和问题

若限于定常湍流问题，那么积分法可用常微分方程。实际计算的方程组是（3.5）与相应发生各种变化的选择辅助关系式联立。现列举二个代表性的例子。

4.1 **输运法** 将连续方程（3.1）由$y=0$至δ积分，考虑δ是x的函数，得出

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta}U\,dy-U_1\frac{d\delta}{dx}+V_1=0$$

（V_1是V在$y=\delta$时之值）。左边第一项是剪切层周围的流体注入层内的流量

$$I=\int_0^{\delta}U dy=U_1(\delta-\delta^*)$$

随x增加的比例，即表示输运的速度。这是反映剪切层特点的一个基本积分参数。在Head［25］创始的输运法中，$H_E=(\delta-\delta^*/)\theta=I/U_1\theta$，关于$dI/dx$的微分实验式采用

$$d(U_1H_E\theta)/dx=0.0306U_1(H_E-3)^{-0.617} \quad (4.1)$$

关于摩擦系数的Ludwieg-Tillimann代数实验式采用$C_f=0.246\times10^{-0.678H}R_\theta^{-0.268}$，

$$R_\theta=U_1\theta/\nu$$

进而根据H_E和H之间关系的第三个实验式　（4.2）

$$H_E=\begin{cases}0.823(H-1.1)^{-1.29}+3.3 & (H_E\leqslant1.6)\\ 0.550(H-0.68)^{-3.06}+3.3 & (H_E>1.6)\end{cases} \quad (4.3)$$

经验地导出封闭的联立常微分方程。这种方式的特点，一是不必假定速度分布，二是能与层流边界层的藤本-谷-Walz-Thwaites方法［15］相比较。此外，例如，Hirst和Reynolds［26］尝试了考虑湍流特性的半经验分析。

4.2　**加权残数法**　此方法是对应于层流边界层情况的Pohlhausen法的一种待定系数法。假设对应于初始速度分布的适当试验函数，把它代入R方程，得到残数$R_\triangle$，作为权Ψ的积分条件式

$$\int_0^{\delta}\Psi R_\triangle dy=0$$

则可确定满意的近似解。特别在$\Psi=U^m y^n$时，$m=n=0$即为（3.5）本身；$m=0$，$n=1$时为动量矩方程；$m=1$，$n=0$时为积分平均能量方程

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}U_1{}^3\theta^*\right)=\int_0^{\delta}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y}-\overline{u'v'}\right)\frac{\partial U}{\partial y}dy \quad (4.4)$$

但是（能量厚度）　$\theta^*=H^*\theta=\dfrac{1}{U_1{}^3}\displaystyle\int_0^{\delta}(U_1^2-U^2)Udy$

选择$\Psi\neq1$时得到的这些与（3.5）独立的方程作为辅助关系式，但为了处理湍流中的附加R应力，必须用不同的某种实验式，这与层流比较有本质上的不同。作为适用于边界层的试验函数，大多数用待定系数Π的对数壁律与速度耗损律组合的Coles复合分布方程［27］

$$\frac{U}{u_\tau}=2.5\ln\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right)+5.2+5\Pi\sin^2\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \quad (4.5)$$

（$u_\tau=U_1\sqrt{C_f/2}$为摩擦速度）。例如，Alber的耗散积分法，就是将（3.5）和（4.4）代入（4.5），整理后导出未知量δ^*，Π，$\sqrt{C_f/2}$的三元联立一阶常微分方

程。即使采用动量矩方程等代替积分平均能量方程（4.4），也有同样的固定形式，对其适用范围和结果的精度，看不出有多大差异。即使对压力梯度、表面状态等都发生剧烈变化的流动情况，虽然精度大幅度下降，但若附加考虑上游湍流度的影响，即考虑上游历史的唯象论的滞后方程，也可在一定程度上弥补这一缺陷。

把上述各点归纳起来，积分法的最大长处在于它的经济性。本来积分法的有效对象限于二维性好、主流方向变化缓慢、实验数据也丰富的流动，特别是用程序处理同一类型的一系列流动的情况非常好。相反，超出过去的限制范画而把它应用于各种问题，就将使计算复杂化而失去积分法的根本优点。

5．微分法的动向与问题

如前所述，微分法在目前湍流预测方面占主导地位。所谓湍流模型计算，就只是指的微分法。它的原理前文［3］已阐述过。总而言之，微分法的魅力涉及湍流的核心内容，目的在于对复杂的流动进行尽可能高精度的预测。这一点很难恰当地阐明其全貌，这里只列举一些已被基本确立的最小限度的实例和相应的信息处理步骤加以说明。为简单起见，再次假定为二维定常剪切层：

$$q'^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2,\quad q^2 = \overline{q'^2},\quad \tau_R = -\overline{u'v'}$$

通常进一步写$q^2/2 = k$。

5.1　**平均速度场封闭法**（MVF）　这在微分法中是最低阶的方法，它基于假定所谓梯度扩散的涡粘性模型（3.3），即

$$\tau_R = \nu_T(\partial U/\partial y) \tag{5.1}$$

在平均速度场中附加R应力关系，在R方程的水平上进行闭合计算。ν_T的估计方法是经验的和直观的，虽然缺乏物理内容，但因为使用简便，因而对目的能发挥某种程度的作用。现按方程数将具体例子分述如下。

1）　0方程模型　因为除R方程以外只用到代数关系，所以有这个名称。事实上是一种历来的古典方法，近年来配备了给出特定型流动的ν_T和混合长l的实验式，在实际应用中可期望达到高精度。同时也备齐了计算程序，例如，对湍流边界层确立了CS法［2］和STAN-5［30］的标准格式。它们都是将$y=0$和δ之间分为近壁面内层和近主流外层的二层模型。内层用（3.4），由CS法得出

$$\nu_T = \begin{cases} 0.17y^2[1-\exp(-y^+\chi/26)]^2(\partial U/\partial y), & \text{内层} \\ 0.17\,U_1\delta^*\gamma, & \text{外层} \end{cases} \tag{5.2}$$

（$y^+ = yu_\tau/\nu$）。但是，由于χ和γ分别表示y的经验函数——压力梯度效应和间歇性效应，所以，STAN-5也有与此相似的结构。

2）　1方程模型　上面的模型完全在局部范围给出ν_T，那只不过是图简单便利而已。Nee和Kovasznay［31］将ν_T视为一种标量输运量而提出唯象论的输运方程

$$\frac{D\nu_T}{Dt} = A\nu_T\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| - B\frac{\nu_T\nu_e}{l^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_e\frac{\partial \nu_T}{\partial y}\right) + \Delta_p \tag{5.3}$$

与R方程联立，其中$\nu_e=\nu+\nu_T$，l是类似于混合长的经验长度尺度，Δ_p是与压力梯度有关的项。虽说数字系数的最佳值可视为$A\approx0.1$，$B\approx1.0$左右，但（5.3）的计算也是直观的，其恰当性只能从结果来进行判断。

5.2 **平均湍流场法**（MTF） 运动方程只是以独立设定的经验关系进一步由MVF法确定R应力，在湍流脉动的NS方程

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t}+\vec{U}\cdot\nabla\vec{u}'+\vec{u}'\cdot\nabla\vec{U}+\nabla\cdot(\vec{u}'\vec{u}'-\overline{\vec{u}'\vec{u}'})$$

$$=-\frac{1}{\rho}\nabla p'+\nu\nabla^2\vec{u}' \qquad (5.4)$$

的基础上，加入R应力脉动特性与关系的MTF的表达式。在此也分为二个阶段。

1） *1方程模型*： 由（5.4）得出最简单并且最重要的信息，在此乘以$\vec{u}'$，并取其标量的平均值，导出湍流能量方程

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{q^2}{2}\right)=\tau_R\frac{\partial U}{\partial y}-\varepsilon-\frac{\partial\Gamma}{\partial y},\quad \Gamma=\frac{1}{2}\overline{q'^2v'} \qquad (5.5)$$

但是，用边界层近似，雷诺数R非常大。ε是耗数函数，当湍流的长度尺度为l时，根据局部各向同性假设，得出ε与ν无关［15］：

$$\varepsilon=c_1q^3/l\ (c_1\approx0.06\text{为数字系数}) \qquad (5.6)$$

按照（5.5）的1方程的MTF法，这里可分成解释和模型化两部分。

首先，在普朗特方法［18］中，根据梯度扩散的要求，

$$\nu_T=a_1ql,\quad \tau_R=a_1ql\,(\partial U/\partial y)\qquad (a_1\text{为数字系数}) \qquad (5.7)$$

在R应力中结合q，Γ也可仿效模型化：

$$\Gamma=-a_2ql\,(\partial q^2/\partial y) \qquad (5.8)$$

如果把（5.6）—（5.8）代入（5.5），就构成与R方程联立的抛物型封闭微分方程组，数字系数的值为$a_1\approx0.40$，$a_2\approx0.15$。

另外，在Bradshaw方法［32］中放弃梯度扩散概念而假定

$$\tau_R=\alpha_1q^2,\quad \Gamma=\alpha_2q^2Q_c \qquad (5.9)$$

索性将（5.5）看成R应力的方程。（5.9）属于输运流线不依靠梯度的对流输运模型，例如，也可认为Q_c是q^2的有效输运速度。以（5.9）代替（5.8），若进一步给出Q_c的分布，那就构成双曲型微分方程组，得出$\alpha_1\approx\alpha_2\approx0.15$的好结果。不用说，不论在哪种模型中，都必须假定$l$的分布。虽然Bradshaw方法的适用范围受到限制，但其计算时间短，而普朗特方法则适用于向高阶模型发展的目的。

2） *2方程模型* 脉动方程（5.4）中，除取出速度尺度q外，再适当地取出关于长度尺度l的信息，就可只用（5.8）而不需要假定经验函数了。2方程模型就是实行这样的办法的。在（5.5）中加上另一与之联立的确定l的独立偏微分方程。后者一般选$Z_{m,n}=q^ml^n$为未知量。按照$q^2/2$为k的惯例，可把它称为k-$Z_{m,n}$法。表1示出目前

的主要例子。虽然各个例子中间的推导相当麻烦，但由于梯度扩散模型化，所得结果却格外简单，可概括成如下形式［5］：

$$\frac{DZ}{Dt}=b_z\frac{lZ}{q}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-c_z\frac{qZ}{l}+a_z\frac{\partial}{\partial y}\left(ql\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+\Delta_z \qquad (5.10)$$

（a_z，b_z，c_z均为数字系数，下标m，n均已略去）Δ_z是修正项。为了避免罗列类似形式，在此示出除去$\Delta\varepsilon$而仅表示最有代表性的k-ε法的情况：

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=b_\varepsilon q^2\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-c_\varepsilon\frac{\varepsilon^2}{q^2}+a_\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q^4}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right)$$

（$a_\varepsilon\approx0.02$，$b_\varepsilon\approx0.06$，$c_\varepsilon\approx3.8$）［33］。其它情况也可用表1与（5.10）进行比较而容易地得出。其次，该表中的k-S法［34］与k-W法［35］虽然貌似相同，但观点上多少有些差异，有的把它们归入MVF类。

如2方程模型那样，不用经验函数而只给出一组常数值求得答案的方法，使计算方法有了显著的进步，适用范围一举扩大，计算时间也较合适，所以已在各个方面实用化。但是这些方式中到底哪个为最佳？现在还不能下任何结论。

表1　MTF 2方程模型的例子

方法	m	n	Z	l	lZ/q	qZ/l	ql
k—kl法	2	1	q^2l	Z/q^2	q^2l	q^3/l	ql
k—ε法	3	−1	ε	q^3/Z	q^2	ε^2/q^2	q^4/ε
k—Wl法	2	−2	W	$q/Z^{1/2}$	$W^{1/2}$	$W^{3/2}$	$q^2/W^{3/2}$
k—S法	2	−2	S	$q/Z^{1/2}$	—	ω^3	q^2/ω

5.3　**平均应力场法**（MRS）　迄今为止的模型包括所有R应力本身的假定。但是，按理说这常常是不妥当的，例如，在壁面喷流等非对称流中，即使在$\partial U/\partial y=0$处，也是$\tau_R\neq0$，涡粘性模型（5.1）也明显不成立。对此，MRS法是以基于脉动方程（5.4）的应力方程来直接计算R应力的一种方法，这种方法即使在微分法中也是最先进的。应力方程的模型化，虽然反映R应力复杂的生成维持机理特别困难，但在涉及湍流的物理性质这一深刻问题时，在原理上也是一个极有趣味的深刻课题。

从（5.4）导出的应力方程，可以一般地写成

$$\frac{D\overline{u_i'u_j'}}{Dt}=G_{ij}+D_{ij}+T_{ij}+P_{ij} \qquad (5.11)$$

式中包括，发生G_{ij}，耗散D_{ij}，扩散T_{ij}，还有通过压力脉动出现成分之间交换的再分配P_{ij}等各项，下面将这些项模型化：

发生：$G_{ij}=g_{ij}+g_{ji}$；　$g_{ij}=-\overline{u_i'u_k'}\,(\partial U_j/\partial x_k)$ (5.12)

这一公式不需进行模型化。

耗散：在重要的$i=j$的情况，从局部各向同性得出

$$D_{ij}=-(2/3)\varepsilon\delta_{ij} \tag{5.13}$$

扩散：对于$T_{ij}=-\partial J_{ijk}/\partial x_k$，假定有梯度扩散，忽略压力扩散及粘性扩散，这时有

$$J_{ijk}=\overline{u'_iu'_ju'_k}=-(a_Jq^2\overline{u'_ku'_l}/\varepsilon)(\partial\overline{u'_iu'_j}/\partial x_l) \tag{51.4}$$

(a_J是数字系数)。其它也以同类项的组合表示。

再分配：$P_{ij}=(1/\rho)\overline{p'(\partial u_i'/\partial x_j+\partial u_j'/\partial x_i)}$项虽然达到最高度模型化有困难，但一般是把整个速度场固定的p'分为促使湍流增强的部分与平均剪切相关的部分。前者表示由应力场的各向同性导致的R应力的缓和，后者表示R应力随非各向同性的增加，二者近似线性化模型如下：

$$P_{ij}=P_{ij}^{(1)}+P_{ij}^{(2)}$$

$$\left.\begin{aligned}P_{ij}^{(1)}&=-2\beta_1(\varepsilon/q^2)\{\overline{u'_iu'_j}-(q^2/3)\delta_{ij}\}, &\text{缓和}\\ P_{ij}^{(2)}&=\beta_2\{G_{ij}-(G_{kk}/3)\delta_{ij}\}, &\text{增强}\end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

(β_1，β_2为数字系数)。

将边界层近似成立时的一例的模型化示出如下[35]：

$$\frac{D\tau_R}{Dt}=\overline{v'^2}\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\overline{p'\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)}+\frac{\partial\overline{u'^2v'}}{\partial y}$$

$/P^{(1)}$

$$\frac{D\tau_R}{Dt}=b_\tau q^2\frac{\partial U}{\partial y}-c_\tau\frac{\varepsilon}{q^2}\tau_R+a_\tau\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q^4}{\varepsilon}\frac{\partial\tau_R}{\partial y}\right) \tag{5.16}$$

($a_\tau\approx0.02$，$b_\tau\approx0.10$，$c_\tau\approx5.6$)。这样，即使用涡粘性概念不能处理的情况，也能得到预期精确度的满意结果。表2是熟知的MRS法的几个例子。但它不仅有方程的数目，而且也有根据作者的不同而不同的各种模型化的细节。

如果就整个微分法而言，MVF法在对象和精度方面可视为与积分法大体相同，并不趋向于复杂流动的计算。MTF法的1方程组在计算量的减小方面效果不大，2方程组首次发挥了微分法本来的特色，也能够处理包括转捩和逆转捩的流动和再循环流动等。虽说MRS法更有威力，但尚处于发展阶段，可以期待今后正式的实用化。关于这几个阶段，从多数的计算实例来看，在同样的水平上，选用哪种方式倒不是什么本质问题，多数对其步骤和结果不产生多大的差异。但是，基本信息的量与范围，无论如何应该表示出决定性的结果。

过去，微分法的性质与积分法具有相辅相成的关系，可靠性是它的第一个特色。同时，随着高阶模型的进展，虽然能适用于更广泛而多样的流动，但是另一方面，计算却

1）以下凡下标重复出现时表示从1到3求和。

越来越复杂，经验常数的数目加速度地增多。由于实行模型化的完善手法，这是难以避免的事实。在某种意义上讲，常数系数的泛滥，使人们想到水力学的情况。但是在选择系数值时，结果无论成何种状况，也不能单方面地予以否定。另外，加入模型方程的联立，是否能起作用并具有有意义的解，尚不明确。我认为MRS法如能在这几个方面取得平衡，则是此计算法的界限。

表 2　　MRS 法的例子

	q^2	$\overline{u'^2}$	$\overline{v'^2}$	$\overline{w'^2}$	τ_R	$\varepsilon(l)$	方程数目	常数系数数目
Donaldson [36]		○	○	○	○	×	4	4
Daly和Harlow [37]		○	○	○	○	○	5	7
Hanjalic和Launder [35]	○				○	○	3	7
Launder等 [38]		○	○	○	○	○	5	9

6．数值模型与直接计算

从上述情况可以看出，积分法与微分法的模型的进展必然导致计算量的增加，最终将面临极大量的数值计算。如果真是那样的话，倒不如从最初就以数值计算为中心，尽管NS方程本身不适用，但是即使以与它相接近的形式稍加改动，便有可能发挥作用。这就是所谓的“数值模型”想法。

前面所提到的LES（或SGM）法，就是这种想法的具体尝试。假定把这种尝试意译为格子平均模型。即以三维格点把流场离散化，把比格子网孔细的尺度脉动的小网格过滤掉，取各格点的局部平均值。详细地说，对任意脉动量$\varphi(\vec{x},t)$，引进过滤函数$F(\vec{x}-\vec{y})$，将$\vec{x}$点周围的平均加权，把

$$\langle\varphi(\vec{x},t)\rangle=\int_{\vec{y}}F(\vec{x}-\vec{y})\varphi(\vec{y})d^3\vec{y} \qquad (6.1)$$

定义为$\vec{x}$点的粗略变化量。$\langle\varphi\rangle$是由原变量减去小网格的脉动而得出的：

$$\varphi''=\varphi-\langle\varphi\rangle \qquad (6.2)$$

所以它比φ本身的变化缓慢，但却比全体变量的平均$\overline{\varphi}$包含更多的信息。在LES法中，NS方程按（6.1）运算，这意味着求得的不是粗略化，而是均匀化速度场的数值解。特别是若网格间隔比湍流度的最小尺度η大而比整体结构的尺度L小，则问题的方程最好考虑为处于NS方程和R方程的中间水平。可是，网格平均（6.1）与纯平均不同，因为它不具有$\langle\langle\varphi\rangle\rangle=\langle\varphi\rangle$的性质，过滤方程（简称F方程）的形式比R方程稍微复杂一些，将$\langle u_i'\rangle$等与U_i'等写为

$$\partial U_i'/\partial x_i=0 \qquad (6.3)$$

$$\frac{\partial U_i'}{\partial t}+U_j'\frac{\partial U_i'}{\partial x_j}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial U_i'}{\partial x_j} - \langle u_i'' u_j'' \rangle - \Lambda_{ij}\right) \qquad (6.4)$$

式中除相似于R应力的小网格应力（S应力）$-\rho\langle u_i'' u_j'' \rangle$之外，还出现了《φ》≠〈φ〉的来源项$\Lambda_{ij}$。后者被称为Leonard应力(L应力)，其大小虽说与F方程的特性有关，但是在初期计算时则被忽略了［42，43］。假定S应力中梯度扩散模型为

$$\left(\langle q''^2 \rangle / 3\right)\delta_{ij} - \langle u_i'' u_j'' \rangle = \nu_s\left(\partial U_i'/\partial x_j + \partial U_j'/\partial x_j\right) \qquad (6.5)$$

网格尺度Δ若处于阔尔莫戈洛夫的惯性范围，则小网格粘性ν_s应取决于Δ与ε；量纲关系为$\nu_s \sim \Delta^{4/3}\varepsilon^{1/3}$；另外，用网格变数将湍流耗散写为

$\varepsilon = \nu_s\left[\left(\partial U_i'/\partial x_j\right)\left(\partial U_i'/\partial x_j + \partial U_j'/\partial x_i\right)\right]$，结果为

$$\nu_s = (c\Delta)^2\left[\left(\partial U_i'/\partial x_j\right)\left(\partial U_i'/\partial x_j + \partial U_j'/\partial x_i\right)\right]^{1/2} \qquad (6.6)$$

式中$c \approx 0.14$是通用数字系数。这里，涡粘性概念仅用于搜集小网格信息这一点是重要的，除此之外，对湍流度大的结构不必用特定模型。

在这些假定下，将F方程（6.3）作为差分方程组进行数值积分，归根结底在于计算技术问题。F方程即使在“定常”湍流情况下也是非定常的，几个计算例子完全再现出网格级的时间及空间的变动情况。R方程的级，不外乎多次尝试的总平均结果。与微分法比较，用唯一的数字系数满足的数值模型，若以其通用性作为最大特点，定能使其大大发展起来。

最后，就NS方程本身的直接计算法再说几句。它的实行情况如何困难已经阐述过了，近年来，基于正交函数系的展开，导入了“谱法”，迎来了新的局面。例如，Orszag等［13，14］将$v'(\vec{x}, t)$变换为傅里叶分量$v(\vec{k}, t)$，以关于频率矢量$\vec{k}$的差分形式，实际地尝试了均匀各向同性湍流的数值计算，由于该方法不包括对湍流机理的特殊假定和模型，所以它最接近于湍流计算的极限情况，而高雷诺数时厚壁的处理是其根本问题。

7．结 束 语

以上，专门从涉及预测计算的观点出发，展望了湍流模型的趋势，但只不过比过去多接触到一部分内容。应该强调，物体表面的状态或形状，外部流的湍流度，可压缩性等的影响，传热和传质，以及非边界层型流动，三维流动，非定常问题等其它非典型问题的应用与发展，实际上是最重要的，今天的基础研究者、开发者与使用者之间的密切协作与交流等也是不可缺少的。从过去的普朗特，阔尔莫戈洛夫以来，象Lumley，Saffman，Rotta，Kovasznay等这些以基础研究而知名的人物，他们在计算方法领域里出现，决不是偶然的。另外，本文中尚有一个问题没谈到，即主要限于各向同性湍流的湍流统计理论的目标，渐渐开始转向剪切湍流［45，46］。

预测这种错综复杂的湍流模型的未来状况，将比以往更为困难。但是，我个人的看法是，在今后特定的适用范围内，湍流模型将逐渐分化成两种，即，能轻易得到高精度结果而且经济性好的湍流模型，以及适用于任何流动的大型、通用的湍流模型。至于它

们的代表，前者为输运法，后者在工程学领域为MRS法，在地球物理学领域为LES法。至于电子计算机能否超过风洞而领先［47］，用本文开头提到的Heavside的话结合作者的想法代为回答："当然不，但别忘掉你所积累的经验的局限性！"

参 考 文 献（略）

（刘廷增译　陈国伟校）

湍流理论基本思想发展

C.C. Кутателадзе院士

长期以来湍流物理性质的研究未得到物理学家的应有的注意［1］。准连续介质（液体、稠密气体、稠密等离子体、弥散系统）的湍流流动的特征，是某种有秩序的平均流动内无秩序的宏观混乱运动。因此，就这种现象的实质来说，湍流理论应当是统计的理论，于是人们在这里便不期而然地想到同气体分子运动论的类比。在上世纪末这种类比是十分自然的，而实际上，在O.Reynolds［2］的著作中，后来20世纪在L.Prandtl［2］及其他许多研究工作者的许多著作中，都已经利用了这种类比。可是这种类比非常肤浅。这里有两个情况很重要。第一个情况，在分子的系综中，它们的各元素（分子、原子）的个性不变或只按已知的化学相互作用定律变化，可是湍流的构成却随空间和时间而变化。第二个情况，在一阶近似下气体分子的总动能守恒，可是湍流流动的能量却通过分子摩擦机制耗散为热。

很自然，湍流理论的发展导致统计流体力学的诞生［3］。然而，现在与其声称已或多或少完成了逻辑地描述湍流流动的基本规律，不如说是形成了某种新的方向。最初明确认识到湍流问题的存在的，是上述Reynolds的著作，尽管在更早的时候，G.Hagen［2］的实验已明确指出，存在着由液体的平行波纹状（层流）流动（阻力按线性律增加）向内部没有秩序的湍流流动（阻力几乎按平方律增加）转捩的现象。后来搞清楚了，光滑管内压力降同流速的平方关系有一些偏离，这是由于紧靠管壁处具有薄薄一层准层流层。Reynolds引进了湍流理论中的两个基本概念，一是流动状态稳定性的判据，一是把所讨论的流动分解成平均部分和脉动部分。

稳定性的判据为Reynolds 数　$Re = UL/\nu$　（1）

在平均运动方程中则出现具有关联形式$\overline{u_i' u_j'}$　（2）

的一些附加项。关联$\overline{u_i' u_j'}$可以看成是表观湍流应力张量的分量；在这种情形下，不可压缩流体平均运动的全部应力分量为

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \rho\overline{u_i' u_j'} \quad (3)$$

由于研究湍流，产生了如下的一系列基本问题：层流流动稳定性问题和它们转捩成湍流流动的机制；甚至在最简单的不可压缩流体流动中确定临界Re值的不唯一性，这是因为，存在着由稳定的层流流动转捩成表征掺混现象的平稳湍流流动的转捩区域［4］；对于具有变物理性质的系统，确定Reynolds判据中物理参数ρ，μ的不唯一性；由于出现表观湍流应力张量的分量而引起的Reynolds方程的不封闭；在湍流扰动的影响下出现同介质物理性质脉动有关的效应；关于边界条件，在湍流流