# 应用数学的一些最新进展*

J. B. Keller

一

应用数学在最近几年得到的进展可以从两个不同的角度来讨论，一是开辟了新的应用领域；二是应用数学分析方法本身也在不断发展。这里，重点打算讲述第二个问题。让我们追述到1945年左右的情况。1945年以来，正是计算机发明和广泛应用，应用数学本身也获得极迅速发展的时期，换言之，**高效率计算机在应用数学发展的进程中，起了巨大的促进作用**。首先，许多古老的数学问题在没有使用计算机以前是很难求解的，然而在今天，求解这些问题已变成家常便饭了。例如，在美国，自G. Package发明了软件包以后，常微分方程的积分求解变得十分容易了。当你要求解任意幂次的变系数线性常微分方程时，你可以应用这种软件，把方程的幂次、方程的系数、初始定解条件以及所要求的计算精度输入计算机，它可以自动决定计算的步长和给出满意的解答。乍看起来，似乎不必再为求解常微分方程问题费神了。然而，计算机在用于求解常微分方程时，仍然会遇到十分困难的情形。如求解刚度方程，当它有两个数值相差非常大的本征值时，即一个取值很大，另一个取值很小时，在计算中，必须把步长取得非常非常小，而目前再高速的计算机也难办到这一点。这样，应用数学在计算刚度矩阵的本征值问题时，仍然有许多研究工作要作。最近二、三年来，Miranker, Omalley和Kreiss等人在发展各种渐近方法计算刚度矩阵的本征值问题时，做了许多工作。另一个问题是计算逆矩阵问题。当矩阵的秩非常大，或包含很多零元时，需要发展相应的数学方法来计算逆矩阵。事实上，虽然有了计算机，如果相应的数学方法得不到发展，有些问题，如大数目的偏微分方程组的积分问题；含有上千个变量的线性规划问题；含有100—1000步迭代过程的数值计算问题，仍然不能求解。

随着应用数学的发展，数值分析方法也有了很大的进展。有限元分析就是一个很好的例子。这种方法首先是在求解弹性力学问题中发展起来的，后来被广泛地应用于其他的领域。关于有限元分析方法的数学结果，在中国，首先是由在座的冯康教授得到的。在当时，冯康的结果在美国还不被人所知。比冯康教授晚一点，在美国也有人做类似的工作。有限元方法首先依赖于把有关的边值问题化为相应的变分问题，然后选择适当的试验函数并把它们代入变分问题，最后导致线性代数方程组以决定试验函数中包含的待定系数。除有限元法外，还有两个重要的方法值得介绍一下。一是随机参数选择法，二是分裂步长法，现说明如下。

---

* 美国国家科学院院士、著名应用数学家J.B.Keller教授，应邀于1981年7月31日至8月14日在中国科学院力学研究所进行了为期二周的学术交流。共作七次讲演。这是最后一讲，题为“Recent Developments in Applied Mathematics”。本文由段祝平翻译并整理，未经本人校阅。

**随机参数方法** 随机参数法是近几年发展起来的一个很经典的方法。值得说明，被研究的方程本身不含有任意的随机参数。但在对方程进行数值分析时，有时要引进一些随机元素。例如，在多重积分的数值计算中，通常的做法是把被积区间分割成很多格点，然后计算被积函数在这些格点上的值，并把它们相加起来便可得到积分的数值。如果在1000维空间中计算积分而且仅在每个方向上选取二个格点，就必须进行$2^{1000}$次计算。显然，即使是非常快速的计算机，也很难进行这样的计算。为了使高维积分的计算成为可能，我们要应用随机参数法，即假定积分的网格点是随机而不是均匀地选取的，然后把被积函数在这些随机选取的格点上的值加起来，便可得到该积分的近似值。当进行这样的计算时，会发现，被积函数在一些随机选取的格点上，取值很大，而在另一些格点上，取值很小。这时，必须对随机选取的格点适当进行改进，使选择的概率和函数值的大小适当配合起来。当然，进行这样高维空间的积分计算，除了随机参数方法以外，还有一些别的方法。如中国华罗庚教授，从数论的角度给出了计算多重积分的方法，这种方法并不是随机地而是确定地选取积分网格点的。

为了说明随机参数法在数值分析中的应用，我们再举两个例子来说明。Glimn用这种方法计算了一维气体力学问题。如图1所示，假定密度$\rho$，压力$p$和速度$u$沿$x$轴的初始分布是随$x$变化的，这样把$x$区间分割成很多小段，在每一小段中，计算$\rho$，$p$和$u$的平均值。这样，可以将初始条件逐段常数化了。利用气体动力学方程，在每一对相邻的小区域内（即两个相邻的常态区内）可运用黎曼方法求解，得到的是激波或稀疏波解。如果选取的时间步长$\triangle t$足够小，在每对相邻区域得到的解之间互不发生干扰，则可得到下一时刻$t=\triangle t$的解。为了计算再后面时刻的解；需要在$x$轴上随机地放一些点子，然后把上述得到的解平均化和逐段常数化，以便重复前面的步骤。Glimn已证明，如果时间步长缩小，而分割的点数增加，则只有利用随机方法选择格点时，所得到的数值解才能够收敛于相应问题的精确解。Glimn的结果是在Courant数学所得到的。Chorin在Berkley进一步证明了这种方法是相当成功的。他用这种随机参数选择法研究了Navier-Stokes方程

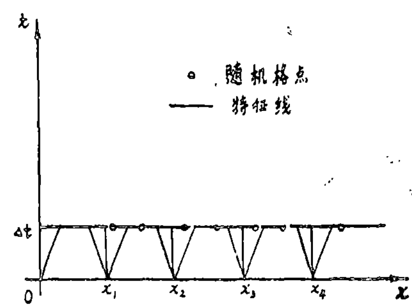


图1 一维气体动力学问题中随机参数法

$$u_t+u\cdot\nabla u=-\nabla\cdot p+\nu\triangle u \tag{1.1}$$

其中$u$，$p$分别代表速度和压力。如果在流场中存在相互间隔的有一定强度的许多小涡，每个小涡对流场的运动都有贡献，把每个小涡对流场的解叠加起来可近似得到整个流场的解。设第j个小涡以某种确定方式运动。Chorin在计算中取第j个小涡运动的空间步长为$\Delta x_j$，它由下式给出：

$$\Delta x_j=\Delta t\sum_{i\neq j}u_i+r_j \tag{1.2}$$

其中$\sum\limits_{i\neq j}u_i$表示除第j个涡本身以外所有其他小涡对流场的贡献。为了考虑局部区域

由于对流作用产生的对解的影响，在空间步长$\Delta x_j$中加上了一项随机步长$r_j$。为了保证计算的收敛性，$r_j$的选择和某一适当的概率密度分布函数$\tilde{\rho}(\omega)$有关，并且平均量$\langle r_j^2 \rangle$和时间步长成正比，即有

$$\langle r_j^2 \rangle = \int \widetilde{\rho^2}(\omega) r_j^2 d\omega \propto \Delta t \qquad (1.3)$$

这里，$\omega$是随机变量而$\tilde{\rho}(\omega)$是概率分布函数。这样，在给定时间步长和概率分布条件下，N.S.方程就可以转化成热传导方程问题求解了。这里，随机步长的选取可能有很多不同的方法，从而计算结果不尽相同。但当计算时间拉得足够长时，所得结果乃是某种意义下的平均值，随机的因素可以自然地消除了。在计算中，我们必须考虑边界条件。当小涡向外运动到达边界时，涡便随之消失了。在边界上为了满足速度为零的条件，必须引进剪切层和一些新的涡。Chorin已证明，采用这种随机选择步长的方法，当雷诺数很大，即粘性系数很小时，数值方法的收敛性很好。这结论恰好和别的方法相反。同样，Chorin还用随机步长法求解了诸如燃烧、湍流扩散等其他各种工程实际问题。虽然这种随机选择步长的方法颇有趣，但现在仍有人对它持怀疑态度。最近，Marda和Beal给出了一些方法，企图改进Chorin方法的收敛性。也有人把Chorin方法推广到三维情况中去，但计算是相当复杂的。

**分裂步长法** 假若我们要求下列扩散方程的解：

$$u_t = Lu + Mu \qquad (1.4)$$

其中$L$和$M$是两个算子。为了利用分裂步长的方法求解该方程，我们把一个时间步长$\Delta t$分成两半，在半步长$\Delta t/2$中，我们用给定的初始条件求解方程

$$u_t = Lu \qquad (1.5)$$

然后把得到的解作为起始条件，在另一半时间步长$\Delta t/2$中再数值求解方程

$$u_t = Mu \qquad (1.6)$$

如此通过适当的方法迭代并循环下去，便可得到方程（1.4）的数值解。从物理角度来考虑，这种分裂步长的方法也许是合理的。事实上，从方程（1.4）可知，存在着两种不同的机制$L$和$M$控制$u$的时间变化率。上面描述的分裂步长法意味着，在半时间步长里，机制$L$起作用，而在另一半时间步长里，机制$M$起作用。当计算时间不断增加时，这两种机制$L$和$M$也都同时在起作用了。Tappert用这种方法计算了大量的水下声波的传播问题。Marsden证明了在某些特殊情况下，利用分裂步长方法给出的数值结果的收敛性。

另外，计算机科学和人工智能问题的研究也引起了应用数学家的广泛兴趣。

## 二

近三十年来，渐近分析方法的发展是应用数学领域获得的另一个最重要的进展。为了介绍这一方法，我们引进一个定义：若有二个数$g$和$h$，它们都依赖于某一参数$\varepsilon$。当$\varepsilon \to \varepsilon_0$时，$g-h\to 0$，则称$h$是$g$的渐近函数。当然，这个定义还不足以说明函数$g$和$h$的密切程度。这里可能有两种情况。一是当$\varepsilon \to \varepsilon_0$时，存在一个常数$C$使得

$$|g/h|<C \tag{2.1}$$

我们就称$g$和$h$是同量级的，用

$$g(\varepsilon)=O[h(\varepsilon)] \tag{2.2}$$

表示。但若当$\varepsilon\to\varepsilon_0$时，有

$$g/h\to 0 \tag{2.3}$$

则函数$g(\varepsilon)$比$h(\varepsilon)$小一个量级，用

$$g(\varepsilon)=o[h(\varepsilon)] \tag{2.4}$$

表示。符号大O和小o分别由Hardy和Landav于1910年左右在数论分析中引进的。根据这一定义，我们可以确定函数$g(\varepsilon)$对序列$\varepsilon^n$的幂次渐近展开。即当有

$$g-\sum_{0}^{N-1} g_n\varepsilon^n=O(\varepsilon^N) \tag{2.5}$$

时，我们称$\sum\limits_{0}^{\infty} g_n\varepsilon^n$为函数$g(\varepsilon)$的渐近展开，写成

$$g(\varepsilon)\sim\sum_{0}^{\infty} g_n\varepsilon^n \tag{2.6}$$

对给定的序列$\varepsilon^n$和函数$g$，式(2.6)中的系数$g_n$是唯一确定的。函数$g$对序列$\varepsilon^n$的渐近展开式(2.6)是首先由Poincare在1885年引进的。同年，Stieltjes也引用了这一概念。现在，对渐近展开有了更为一般化的表达式。代替幂次序列$\varepsilon^n$，可引进任一度规函数序列$\psi_n(\varepsilon)$作为渐近序列，它满足

$$\psi_{n+1}=o[\psi_n(\varepsilon)] \tag{2.7}$$

因此，$\varepsilon^n$和$\varepsilon^n\ln\varepsilon$等都可以作为渐近序列。对序列$\psi_n(\varepsilon)$而言，我们有渐近展开

$$g(\varepsilon)\sim\sum_{0}^{\infty} g_n\psi_n(\varepsilon) \tag{2.8}$$

同样，当函数$g(\varepsilon)$和渐近序列$\psi_n(\varepsilon)$给定后，渐近展开(2.6)中的系数$g_n$也是唯一确定的。

一般讲，我们只要求到该渐近展开级数的前几项就够了，需要去研究当$N\to\infty$时，该渐近展开作为无穷级数的收敛性问题。因为这种收敛性的考虑对求解实际问题不起任何作用。现在的目的，是如何利用渐近展开去求解实际问题。设某一函数$u=u(x,\varepsilon)$满足方程

$$P[x,u,\varepsilon]=0 \tag{2.9}$$

设当$\varepsilon\neq\varepsilon_0$时（$\varepsilon_0$为某些奇点，通常取为零或无穷）该方程的解存在而且唯一。为了求解(2.9)，我们首先必须找到适当的渐近序列$\psi_n(\varepsilon)$，并把方程(2.9)的解作渐近展开

$$u(x,\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\psi_n(\varepsilon) \tag{2.10}$$

利用方程(2.9)和适当的初始条件，可以得到上述渐近展开中的系数$u_n(x)$。由于渐近

序列$\psi_n(\varepsilon)$有很多不同的选择方法，从而渐近展开（2.10）也不是唯一的。除了幂次渐近序列$\varepsilon^n$以外，我们还采用渐近序列$e^{iks}/k^n$将函数在无穷远点处作渐近展开。一般正则摄动方法中采用$\varepsilon^n$作为渐近展开序列。而在射线理论的研究中，用$e^{iks}/k^n$作为渐近展开序列。

由于展开式（2.10）中的系数$u_n(x)$依赖于$x$，因此，对$x$而言$u_n(x)$可能出现奇点。如在解空气动力学方程时，存在着一些状态变量变化十分陡峭的过渡区。如粘性和热传导趋于零，则这个过渡带的厚度也趋于零，形成了强间断或激波。在光波传播中，如果波动遇到障碍物体，则会出现一些阴影区。在阴影区内部，解为零。在阴影区的边界上，解的变化十分陡峭。同样还会存在一些焦散线和焦点。当光的波长趋于零时，光的强度在这些区域趋于无穷。另外，在1911年Prandtl提出的关于边界层的概念是众所周知的．在处理物体的绕流时，如果假定粘性系数为零，则流场的解就无法满足边界条件。由此可知，渐近展开在边界层区域内出现了奇异性。Prandtl及其后来者，为了求解像边界层这一类问题，采用了两种不同类型的展开，就得了成功。Friedrichs在1955年由美国数学协会组织的一次讲演会上说，在应用数学中，任何真正有效的数学方法，本质上都是渐近展开。

我们这里介绍一下双重尺度展开方法。如上所说，在研究边界层问题时，利用了两种不同类型的渐近展开：外展开和内展开。外展开和通常的展开方法没有什么区别。内展开又称为边界层展开，求解激波过渡带的问题可以应用内展开方法。在作内展开时，需要引进新的自变量，称为伸长变量。伸长变量的选择和小参数$\varepsilon$有关。如果把内展开得到的解(称为内解)和外展开得到的解（称为外解）联结起来，便可得到整个流场的解。但是怎样联结呢？最早采用补接方法（Patching Method)，但这种方法有很大的随意性。在1943—1944年间，Freidrichs在Courant数学所指出补接方法效果不好，但采用匹配方法，会收到更好的效果。关于匹配的想法，根源于这样的事实：存在一个区域称为重叠区，在该区域，两种展开都很好地表示了问题的解。这样，在重叠区，匹配条件可以写成

$$\lim_{x/\varepsilon\to\infty} u_{in}^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=\lim_{x\to 0} u_{out}^{(0)}(x) \qquad (2.11)$$

其中，$u_{in}^{(0)}$和$u_{out}^{(0)}$分别表示内解和外解的零次摄动。采用匹配条件的渐近展开方法称为配匹方法，现在已被很多人应用于计算各种问题了。在苏联，大约于1941年左右有人利用匹配展开方法研究一些问题。在1956年后，通过Proudman和Pearson以及Lagerstrom和Cole等人研究粘性流体中物体绕流问题，匹配渐近展开的方法获得了广泛的应用，同时所谓Stokes疑难也得到了满意的解答。他们发现，在计算低速粘性流体对物体的绕流时Stokes采用的是内展开，而Oseen对同一问题求解时，用的是外展开，得到的是外解。这样，采用了匹配方法把Stokes的内解和Oseen的外解结合起来，便可完整地得到整个问题的解。1965年Van-Dyke写了一本书《流体力学中的摄动方

法》，更加详细地讨论了匹配展开法。如果我们希望得到整个问题的一级有效渐近解，通常需采用合成展开法。这时，将一致有效渐近解表示成

$$u_{\mathrm{whole}} = u_{\mathrm{in}} + u_{\mathrm{out}} - u_{\mathrm{overlap}} \tag{2.12}$$

其中，$u_{\mathrm{overlap}}$表示重叠区的解。

除了合成展开法可以求得一致有效渐近解外，还存在一些别的方法，但成功与否都依赖于能否找到适当的渐近展开序列。这种方法有时称为直接方法，即直接得到一致有效渐近解的方法。双时尺度法（two-time method）和双空尺度法（two-space method）均属此例。这时，一致有效渐近解可以写为

$$u = u(x,\ x/\varepsilon,\ \varepsilon) \tag{2.13}$$

其中，$u$依赖于两个变量$x$和$x/\varepsilon$。在合成展开式（2.12）中，外解$u_{\mathrm{out}}$依赖于$x$，而内解$u_{\mathrm{in}}$依赖于$x/\varepsilon$，它们同时又依赖于$\varepsilon$。因此，式（2.12）是（2.13）的一个特殊情形。由于在(2.13)中内包含二个空间(或时间)尺度$x$和$x/\varepsilon$，因此把这种方法称为双空尺度法或双时尺度法。这种方法已被广泛应用来求解各种实际问题，这里不再一一赘述。

## 三

现在，我们讨论应用数学中发展起来的另一个分析方法：由散射理论导致的新的变分原理。首先举例说明。在量子力学中，描写粒子在有势场中运动的一维薛定谔方程是

$$u_{xx} + [E - V(x)]\,u = 0 \tag{3.1}$$

其中$E$是该粒子的初始能量，$V(x)$表示势能分布，如图2所示。众所周知，对方程（3.1）而言，存在有某些离散本征值$E = E_n$（$n = 1,2,\cdots$），它所对应的本征函数$u_n = u_n(x)$是平方可积函数，即满足

$$\int_0^\infty u_n^2(x)\,dx < \infty,\ n = 1,2,\cdots \tag{3.2}$$

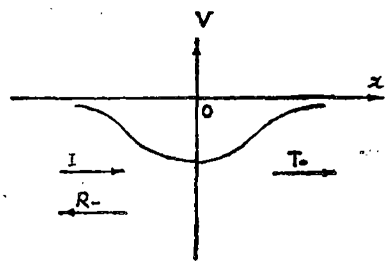


图2　粒子在有势力场中的一维运动
I 入射波　T-透射波　R-反射波

这时，本征值$E_n$均取负数，而且有无穷多个。但当$E > 0$时，由于不存在束缚态，则有

$$\int_0^\infty u_n^2(x)\,dx = \infty \tag{3.3}$$

如果入射波沿负$x$轴自左向右传播，$T$-和$R$-分别表示波的透射系数和反射系数。此时，求离散的本征值$E_n$的问题可用Rayleigh方程来表示

$$E_n = \int_0^\infty (\phi_x^2 + \phi V \phi)\,dx \Big/ \int_0^\infty \phi^2\,dx \tag{3.4}$$

其中$\phi(x)$是试验函数。取上述泛函的最小值可以得到第一个本征值及其对应的本征函数。

上面讨论的是本征值具有离散谱的情形。一百多年来，直到第二次世界大战

（1942—1943）期间，当$E>0$时，对于本征值具有连续谱的情形，还不知道怎样形成相应的变分原理。约在1942年左右，当Schwinger在雷达辐射实验室研究弹性波导时，才给出了本征值为连续谱时的相应变分原理。自Schwinger以来的四十年间，在原子物理学和弹性波导研究的领域内，利用这一变分原理进行了大量的计算工作。这一变分原理，通常只能给出变分的驻值。Spruch已经证明，在某些特殊条件下，变分原理能够自然地给出关于变分的界。我们下面讨论一下关于这一原理的更一般的情形。

设$L$是任一线性算子，我们要求待定向量函数$u$，它满足方程

$$Lu=g \tag{3.5}$$

其中$g$也是一个给定的向量函数。一般讲，我们并不要求得到(3.5)的全部解而只要求得到(3.5)的部分解。主要是要求找到(3.5)的解$u$与任一已知向量$b$的内积$I=(u,b)$。广义的变分原理说明，这一内积$(u,b)$恰好是某个泛函$F(\phi,\psi)$的驻值，其中，泛函$F$由下式定义：

$$F=F(\phi,\psi)=(\phi,b)+(g,\psi)-(\phi,L^{+}\psi) \tag{3.6}$$

其中，$L^{+}$为算子$L$的共轭算子，$\phi$是任意向量。$\psi$由下式给出：

$$L^{+}\psi=b \tag{3.7}$$

利用共轭算子的性质

$$(\phi,L^{+}\psi)=(L\phi,\psi)$$

很容易证明泛函$F$给出的驻值恰好为解$u$与$b$的内积。事实上，在(3.6)中$\phi\equiv u$，而且考虑到$g=Lu$，则有

$$\begin{aligned}F(\phi,\psi)\mid_{\phi=u}&=(u,b)+(g,\psi)-(u,L^{+}\psi)\\&=(u,b)+(g,\psi)-(Lu,\psi)=(u,b)+(g,\psi)-(g,\psi)=(u,b)\end{aligned} \tag{3.8}$$

在计算内积$I=(u,b)$时，利用这个变分原理有很大的优越性。我们可以采用类似于里兹法那样的近似计算，即假定$\phi$和$\psi$的函数形式，这些函数中有些待定参数，把它们代入变分(3.6)，对变分取极值，便可找到这些待定参数满足的方程。原来在Schwinger的工作中曾取$b\equiv g$，而且设$L$是自伴算子，$L\equiv L^{+}$，便可求得变分的驻值（极大值与极小值）。上面的变分原理为一阶变分原理，即从变分式(3.6)对待定系数取一阶导数，并令其为零，可以得到变分的驻值，同时给出变分的界。如果在变分中不但要求一阶导数为零，而且要求二阶或更高阶导数也等于零，这样便可得到相应的所谓超变分原理。上述变分原理也可以扩展到当算子$L$为非线性的情况，形成了相应的非线性的变分原理。

## 四

为了求解非线性波动问题，在应用数学领域内也发展了相应的其他分析方法，如"抛物"方程方法，复特征线方法。现在概述如下。

**"抛物"方程法** 这个方法在研究波的传播问题时是很有用的。例如，对于非均匀介质中波动传播问题，相应的三维归约化方程可以表示成

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+k^{2}n^{2}(\vec{r})u=0 \tag{4.1}$$

对应的边界条件是

$$u=0 \qquad \vec{r} \in C \tag{4.2}$$

$C$为某固定的边界。如果波是右行的，则可以把解表示成

$$u=\exp(ikx)v(x,y,z) \tag{4.3}$$

其中，$v(x,z,z)$表示波的幅度。将（4.3）代入（4.1），得到

$$v_{xx}+2ik\,v_x+v_{yy}+v_{zz}+k^2\left[n^2(\vec{r})-1\right]v=0 \tag{4.4}$$

（4.3）中解$u$被分解成两部分。第一部分是振荡的，由因子$\exp(ikx)$表示。另一部分是慢变化的，由$v(x,y,z)$来表示，在这种情况下，和一阶导数项$kv_x$相比，尤其当$k$比较大时，可以略去二阶导致项$v_{xx}$。这样方程（4.4）可化为

$$v_x=\frac{i}{2k}(v_{yy}+v_{zz})+\frac{ki}{2}\left[n^2(\vec{r})-1\right]v \tag{4.5}$$

在（4.5）中，只存在函数$v$对$x$的一阶导数，这样，在形式上（4.5）是一个抛物型方程。这样一来便可运用求解热传导问题的方法研究波传播的问题了，这就是“抛物”方程方法的实质。在1946年，Leontovich和Fock首先应用这种方法研究电磁波的传播问题。1975年，Tappert在研究水下声波传播时，对上述方法作了修改，他采用下列形式的解：

$$u=H_0^{(1)}(k\vec{r})\cdot v \tag{4.6}$$

来代替（4.3），其中$H_0^{(1)}$是第一类Hankel函数。（4.6）表示在无限声场中从声源发出的波动，并且没有计及波的反射。Keller（1980），Keller和Broker（1981）利用这种方法研究了船舶波动问题，取得了较好的结果。当船舶向前运动时，流场主要是在一个方向运动。同样，Tatarski（1967）也应用这种方法研究了随机介质中的波动问题。但直到目前，没有能给出适当的理论对这种方法给出严格的数学证明。但用渐近展开法及坐标拉伸方法处理曲线边界条件时，能够得到“抛物”方程的近似解。显然，“抛物”方程法在求解波动问题时，仍是十分有效的，值得推荐。

**复特征线方法**　为了说明复变特征线方法在解偏微分方程问题中的应用，我们先从Hamilton-Jacobi一阶段偏微分方程说起。该方程具有形式

$$s_t=H(\nabla s,x,t) \tag{4.7}$$

为了求解该方程，令$p$表示$s$的梯度

$$p=\nabla s \tag{4.8}$$

则一阶偏微分方程的特征方程是

$$p_t=-H_x,\quad x_t=H_p,\quad s_t=H \tag{4.9}$$

该方程组是关于$p,x,s$以$t$作为自变数的常微分方程组。假定$H$是$p,x$和$t$的解析函数。这样$x$，$t$和$s$均可视为复变量了。自1953年来，我一直用这种方法去研究射线理论，采用解析延拓的方法寻找阴影区（或焦散线）的解。通常，方程（4.7）在该区域不存在

实的特征线。力学工作者还不太熟悉复特征线的概念，甚至感到颇为神秘。现在，由于Hamilton-Jacobi方程能用在射线渐近展开的理论中以求解薛定谔方程，所以很多物理学家和物理化学家都赏识这种方法了。

同样，复变特征方法可以用来求解二阶偏微分方程。在气体动力学问题研究中，Garabedian（1970）用复变特征线方法求解了超声速绕流问题。如图3所示，在脱体激波和被绕流物体之间，控制方程是椭圆型的。$AB$和$CD$是声速线。在椭圆型$ABCD$区域以外，控制方程是双曲型的。Garabedian用的是逆方法计算问题的。他假定已经知道了脱体激波的形状，反过来求绕流物体的形状。由于在$ABCD$区域中，控制方程是椭圆型的，因此在该区域中只存在复特征线。这样，Garabedian的计算首先从复空间开始，他把脱体激波的形状用一条解析曲线来表示，然后把该曲线解析延拓到复空间中去，便可用复特征线方法在复空间对椭圆型方程进行计算，一直计算到该复特征线返回到实空间为止。这样便可得到被绕流物体的形状。假如流场用流函数$\psi$来表示，它满足一椭圆方程。物体的形状可以用流函数为常数，即

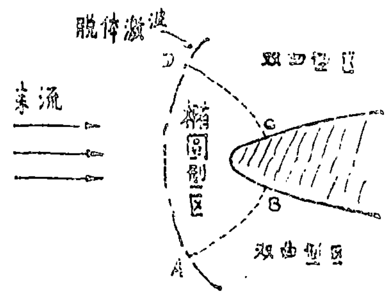


图3 超声速绕流中流场的分区

$$\psi = \text{const} \tag{4.9}$$

来表示。用复变特征线方法在复空间求解$\psi$方程，直到$\psi$=常数为止，这样便可定出物体的形状。

复特征线方法不但可以用于求解流体动力学问题，而且可以求解其他一些工程问题，但很多人对这种方法不太熟悉，迄今为此，没有得到广泛的应用。

**Pade′近似** 假设将解析函数$f$（E）幂次展开至（$k-1$）项

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots \tag{4.10}$$

同样也可以将函数近似地表示成（$n-1$）幂次多项式$p_{n-1}(z)$和$m$幂次多项式$q_m(z)$之比：

$$f(z) \sim p_n(z)/q_m(z) = R_{nm}(z) \tag{4.11}$$

且有$k=n+m$。（4.11）中$R_{nm}(z)$表示$z$的一个有理函数，称为函数$f(z)$的Pade′近似。类似地，可将$R_{nm}(z)$也进行幂次展开，直至$k-1=n+m-1$项：

$$R_{nm}(z) = r_{nm,0} + r_{nm,1} z + r_{nm,2} z^2 + \cdots + r_{nm,k-1} z^{k-1} + \cdots \tag{4.12}$$

其中系数$r_{nm,j}$由（4.10）中的系数$a_1,\cdots,a_{k-1}$所唯一确定。当变化$n$和$m$的值，但保持$n+m$不变时，我们可得到一个矩阵$R_{nm}(z)$，称之为Pade′表。该矩阵$R_{nm}$在$(n,m)$平面内沿直线$n=m+\text{const}$有很好的收敛性。除了在若干极点，即分母$q_m(z)$等于零的点外，Pade′近似在整个$z$平面内是收敛的，但幂次展开（4.10）存在一个收敛半径，只是在某个圆$|z|<|z_0|$内才收敛。这表明，Pade′近似方法比幂次近似有其优越性，从而是一种很有用的函数逼近方法。1965年，Baber写了一本专著研究Pade′

近似的理论。不少作者也发表了很多文章讨论Pade′近似方法。但为什么Pade′近似要比幂次近似好，目前还缺乏足够的理论基础，因此还有很多应用数学的工作好做。

**关于非线性方程的精确解** 可以通过适当的函数变换把非线性方程化为线性方程，若求出该线性方程的解便可得到相应的非线性方程的精确解。著名的一个例子是非线性的Burgers方程

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} \qquad (4.13)$$

通过某函数变换变成相应的线性热传导方程

$$v_t = Dv_{xx} \qquad (4.14)$$

（4.13）代表的是一维粘性流体的流动。该函数变换是由Cole和Hopf两人在1951年独立地得到的。这样，从线性方程的解可以得到大量关于非线性边值问题的解的信息。1920年，Forsythe写了一本关于常微分方程的书。书中给了大量的习题来说明如何通过函数变换把非线性方程线性化。这里，我们介绍一个一般的方法。取任意线性扩散微分方程

$$v_t = L_x v \qquad (4.15)$$

其中$L_x$是关于$x$的任意微分算子。我们可以通过适当的函数变换$u = f(v)$把线性方程（4.15）变成相应的非线性方程。Montroll（1967）等人利用这种方法证明很多线性扩散方程都可以有相应的非线性方程。这里最成功和最重要的一个例子是把KdV方程化成二个线性部分，一部分由薛定谔方程来表示，另一部分是由Gelfand和Leviton得到的线性积分方程。这个重要的结果是在十三年前由Krusnal，Mivrd，Gardner和Greene等人给出的。类似地，也给出了其他几个不同类型的非线性方程的求解方法。从此之后，大量的文章发表了，重点在于研究关于孤立子、孤立子间的相互作用及其有关的课题。

**分叉理论** 过去二十年来，在应用数学领域内对分叉理论也进行了大力的研究。它主要和线性与非线性波的传播问题有关。分叉理论证明了，在有些条件下，波动方程的一个单支解有时能够分裂成二支或更多分支的解。分叉理论主要关心的是分叉条件和在分叉点的附近解的性质。分叉理论的研究源于1941年Hopf发表的文章。三十多年来，发表了大量的文章，来推广Hopf的结果。

此外，对非线性波动问题也进行了大力研究。KdV方程及由此导出的孤立波解就是一个突出的例子。Whitham对非线性几何光学的研究，Landau和Lighthill对气体动力学中波动问题的研究是关于非线性波动问题的取得卓越成就的领域。Whitham写了一本《线性与非线性波》的书，是关于这方面研究成果的一个总结。

## 五

这里非常简要地介绍一下在应用数学研究中最近出现的一些新的应用领域。关于突变理论的发展是一个最重要、最突出的例子。它是密码破译的理论基础，其中应用了大量关于数论的方法。另一个领域是应用数学用于研究经济问题。在经济学中，大量采用了线性规划和博奕论的方法。遇到的一个重要课题是关于求解大数目的非线性代数方程组的问题。同其他方法相比，固定点方法被证明是十分有效的。应用数学在生物学

的研究中也得到了广泛应用。已经证明，神经的传导现象可以用非线性扩散方程来描述。柯林用摄动方法研究了形态增长的问题，提出了关于形态生成理论。生物学中形态的增长可以用非线性反应扩散方程来描述，它所得到的结论和线性理论非常不同。非线性反应扩散方程给出的解说明形态增长存在一个极限，而线性理论不可能导致这个结论。另外，对斑马的斑纹，人的手臂的骨架结构都提出了一些数学模式来描写，这都是颇有兴趣的。由于时间所限，对应用数学新的应用领域不可能介绍很多，但近来的研究表明，应用数学方法在研究各个领域内的实际问题时，已取得了很大的进展。

# 多相流体力学[*]

高野　暲

这次访问中国，受到了各位的欢迎，对此表示感谢。今天，对多相流问题讲讲一般的、基本的问题。多相流问题所涉及的范围很广，例如，在航空和航天技术中，常遇到气体里含有固体粒子或液体微粒的情况。大约从1960年以来，随着航空技术的发展和火箭发动机的利用，火箭发动机的推力特性、高速飞行体表面被粒子碰撞引起的损伤、粒子碰撞燃气轮机叶片时的损伤等重要课题，开始受到重视，研究工作活跃起来。除此之外，在燃烧工程方面，也研究液滴的燃烧等多相流问题。今天主要讲气体里悬浮着固体粒子或者液体微粒的流动现象。

微粒的数目非常少时，它们的运动基本上不影响流体的运动。因此，流体流动中只考虑粒子的运动，这是一种近似的处理方法。这种情况的例子就是在流动的可视化（流场显示）中，把粒子作为示踪剂来使用；在近似计算中，粒子的数目很少时，可采用小扰动方法。但是，一般而言，粒子的数目比较多，因而在粒子和流体之间发生相互干扰，在流动过程中，它们之间进行动量交换和能量交换。这些现象和我明天将要讲的有真实气体效应的流动现象一样，都有非平衡过程的松弛现象。因此，处理含有粒子的流动问题时，必须弄清松弛现象，其中最重要的是要找出恰当的阻力定律和传热定律，以弄清这些问题。

分析和实验研究多相流时，有几个比较困难的问题，其中最困难的是在二维和三维流动中，粒子的轨迹与流体的流线不一致。另外，粒子与物体表面相碰撞的机理不清楚，这也是困难的问题。

实际上，在物体表面的边界层剪切流中，粒子发生自旋（Spin），因而在垂直方向上产生一种力（Magnus效应）。我是星期天到达这里的，首先遇到的是刮黄沙，这是沙漠的沙丘上一刮风就飞起来的黄沙。沙粒到了边界层，发生自旋，受到一个向上的

* 日本东京大学工学部航空系高野暲教授，于1981年5月12日在中国科学院力学研究所作了题为《多相流体力学》的学术报告，由钱福星口译。本文是钱福星、金哲学根据报告的录音整理的。