

# 非线性断裂力学的若干进展\*

中国科学院力学研究所 王自强

自从Wells [1] 提出COD概念及Rice, Cherepanov [2, 3] 提出 $J$ 积分理论以来,非线性断裂力学引起了很大重视,目前这方面的研究工作已经渗透到各个领域,在韧性断裂的基本理论,疲劳裂纹扩展的力学理论,高温蠕变,环境强度等方面都得到广泛的应用。

非线性断裂力学,通常涉及到物理非线性和几何非线性的耦合作用,因此是一个非常复杂而有趣的领域。裂纹顶端的强烈的塑性变形,造成了局部的几何形状的改变,而这种几何形状改变又使本来已经十分复杂的塑性分析增加了困难。数学家正在试图寻找新的数学工具克服理论分析上的困难。而物理学家则对经典理论提供的奇性的弹塑性场,提出了挑战性的质疑。尝试寻找新的理论和新的概念克服经典理论所遇到的困难 [4]。

## $J$ 积分准则的有效性分析

$J$  积分作为路径无关的迴路积分早已由Rice [2] 及Cherepanov [3] 独立地提出:

$$J = \int_r (W n_r - T_i n_i) ds \quad (1)$$

对非线性弹性材料, $J$ 积分恰好等于裂纹扩展力(能量释放率)。这就为 $J$ 积分作为断裂准则提供了理论基础。Begley and Landes [5] 的实验验证使 $J$ 积分成为一个富有吸引力的断裂准则。

但是 $J$ 积分基本性质只在形变理论的范围内得到证明,而对常用的金属材料通常遵守比较复杂的流动理论。在流动理论基础上, $J$ 积分的基本性质能否得到证明,这是普遍关心的问题。

大量的工作 [6—8] 表明,利用规范的塑性流动理论,进行细致的数值计算,可以证实 $J$ 积分本质上是路径无关。McMeeking [9] 利用塑性大变形方程,对小范围屈服问题进行了精细的有限元计算,发现 $J$ 积分本质上是路径无关。只在非常邻近裂纹顶端的断裂过程区内, $J$ 积分才会有明显的变化。对于遵守幂硬化规律的非线性弹性材料, $J$ 积分还可看作裂纹顶端奇性场强度的一个度量 [10, 11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &\approx \sigma_0 \left[ \frac{J}{2\sigma_0 \ell_0 I_0 r} \right]^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, m) \\ \epsilon_{ij} &\approx \alpha \ell_0 \left[ \frac{J}{2\sigma_0 \ell_0 I_0 r} \right]^{\frac{m}{n+1}} \tilde{\epsilon}_{ij}(\theta, m) \end{aligned} \quad (2)$$

McMeeking [9] 的工作表明, HRR 奇性场所表征的影响区域可以用一个参数  $R$  来表示。 $R > 3\delta_1$ , 也就是说有限变形的影响只在距离裂纹顶端 2 至 3 倍的  $\delta_1$  (裂纹顶端张开位移) 的范围内具有重要影响。在这个区域之外,公式 (2) 所表示的 HRR 奇性场给出了很好的近似。

对于全面屈服的情况,文献 [12] 的工作表明,对于边裂纹弯曲试样,只要韧带宽度

\* 1980年9月3日收到。

满足条件:  $W-a > 25 \sqrt{a} \sigma_0$  (3)

那么裂纹顶端的应变场与小范围屈服的情况相同。

对于中心裂纹试样, HRR 奇性场只在相当苛刻的条件下才能成立, 文献 [13, 14] 的工作表明, 必需有:

$$W-a > 200 \sqrt{a} \sigma_0 \quad (4)$$

条件 (4) 与 (3) 有着明显的差别, 而这种差别证实了早先 McClintock 的预言 [15]: 三点弯曲试样的滑移线场与中心裂纹板条的滑移线场有着本质差别, 前者在裂纹顶端有着很高的三轴张力, 后者却没有严重的三轴张力。因此,  $J$  积分准则应用到中心裂纹必然带有比较苛刻的条件。

### 断裂准则与有效的断裂韧性参数

前面讨论了作为能量准则的  $J$  积分参数, 从宏观的连续介质力学的观点来看, 有效的断裂韧性参数应该遵从下面 8 个要求 [16]:

- ① 参数必须是裂纹顶端应力应变场的一个度量;
- ② 参数的临界值必须不依赖于初始裂纹长度、试样几何及加载方式;
- ③ 参数可在裂纹扩展的全过程中应用 (初始扩展、稳态扩展及失稳扩展);
- ④ 参数可以推广到三维裂纹及表面裂纹;
- ⑤ 参数可以推广到混合型断裂;
- ⑥ 参数在裂纹稳态扩展保持常数; 这一点对于研究稳定裂纹扩展具有特别的吸引力; 如果参数不能保持常数, 那么要求参数随着裂纹扩展的变化规律不受试样几何及加载方式的影响, 也就是阻力曲线是材料的特性。

从计算的观点来看, 有效的断裂参数还应满足以下的附加条件:

- ⑦ 参数可以用现代的计算方法有效地求得, 计算的精度及经济费用都能适应工程应用。

从实验的观点来看, 有效的参数应满足以下的附加性质:

- ⑧ 参数可以从远离裂纹的应力应变场测量得到, 或者能从裂纹顶端附近的局部测量得到。

迄今为止还没找到一个合适的参数能够全部满足上面的要求。除了  $J$  积分和 COD 准则之外, Kfoury 和 Rice 提出了  $G^*$  准则 [17], 认为断裂不是连续的发生, 而是一步一步地进行的, 应该用  $\Delta U/\Delta a$  代替  $J$  积分, 即定义有限裂纹扩展量  $\Delta a$  时, 相应的能量释放率  $G\Delta a$ 。

de Koning [18] 发现在裂纹扩展过程中, 裂纹顶端的张开角是常数, 因此提出了临界张开角准则。Newman [19] 建议用裂纹顶端的等效塑性应变准则。

近年来许多研究者 [4, 20] 认为, 在非常邻近裂纹顶端的过程区内寻找一个对裂纹起始扩展及稳态扩展都一致有效的断裂韧性参数, 是一个非常重要的理论课题。在这方面, 一个成功的例子是 McClintock [21] 对于  $\pi$  型裂纹的分析, 他取裂纹顶端特征距离上的剪应变作为参数。他得到有用的而又十分简洁的结果:

$$J_c = \frac{R}{2} \gamma_c \gamma_c \cdot \gamma_c \quad (5)$$

$$J_{ss} = J_c \cdot \frac{1}{\beta} \exp(\sqrt{2\beta} - 1) - 1 \quad (6)$$

$$\beta = \gamma_c / \gamma_0 \quad (7)$$

这里  $J_c$  是裂纹起始扩展的  $J$  积分值,  $J_{ss}$  是裂纹定常扩展起始点的  $J$  积分值。

## 裂纹顶端塑性分析的力学模型

对于平面应力状态的薄板裂纹试样的断裂分析,很早就提出了 Dugdale 模型和 BCS 模型 [22]。前者从宏观实验的观察中归纳出来,后者从位错连续分布的设想中提炼出来。两者构思虽然不同,得到的结果却是相同的。

对于平面应变状态, Vitek [23] 提出了一个新的位错连续分布模型(图 1)。设想在与裂纹面成  $\alpha$  角度的方向上展开了位错分布,每个位错在四个切应力作用下平衡:

- (1) 外界载荷在裂纹顶端所产生的应力场  $\tau^c$ ;
- (2) 位错之间的作用力,可用连续分布的位错分布函数  $B(\xi)$  来表示;
- (3) 各支滑移带上的位错均在裂纹自由面有它们的影子,这些影子对坐标在  $\xi$  的位错也有切应力作用;
- (4) 各支滑移带上位错的阻切应力  $\tau^{dim}$ 。

以上四种切应力达到平衡,所以有:

$$\tau^c(\xi_1) + \sum_{i=1}^4 \int_0^s B(\xi) [\tau_i^d(\xi_1, \xi) + \tau_i^{dim}(\xi_1, \xi)] d\xi = 0 \quad (8)$$

知道了位错分布函数  $B(\xi)$ , 就可以求得裂纹顶端的张开位移:

$$\Phi = \text{COD} = 2 \sin \alpha \int_0^s B(\xi) d\xi \quad (9)$$

Vitek 采用近似计算的方法求解积分方程 (8), 得到如下结果:

$$K_{Ic}^2 = M(\alpha) \frac{E \sigma_f \bar{\xi}_c}{(1-\nu^2)} \quad (10)$$

$$M(\alpha) = \frac{2}{\gamma_{90} [1 - 0.185(1 + \cos \alpha)]^2} \quad (11)$$

$$J_{Ic} = M(\alpha) \sigma_f \bar{\xi}_c \quad (12)$$

对于多晶体,  $\alpha \approx 65^\circ$ ,  $M(\alpha) \approx 1.71$ ; 这里  $\Phi_c$  是临界的裂纹顶端张开位移。

以上三种模型原则上只适用于理想塑性材料。

对于加工硬化材料, Schaffer, Ke 和 Lin [24] 用云纹法测量了薄钢试样中裂纹端部的塑性应变, 发现在裂纹端部应变是三轴的, 塑性流动沿厚度不一定均匀, 它是由两个正交平面上剪切滑移的结果, 与加载轴成  $45^\circ$  角。由于强烈的塑性流动, 裂纹顶端形成了一个局部颈缩区。这个颈缩区限于裂纹前缘窄带, 埋入比较弥散的塑性区内, 而塑性区又被外面的弹性区所包围(图 2)。云纹法所测得的面内位移与基于 HRR 奇性的有限元计算符合得很好。

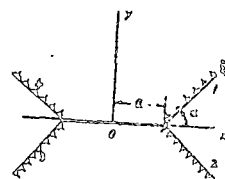


图 1

Underwood 等人 [25], 用同样技术测量了面内和面外位移并与 Swedlow 的有限元结果比较, 发现当载荷较高时, 两者是符合的。

基于以上的工作, 文献 [26] 提出了一个新的力学模型: 条状颈缩区模型。这个模型可以看作是 Dugdale 模型的一个合乎逻辑的推广。它可以用来分析任意应变硬化材料的平面应力的弹塑性断裂。从小范围屈服到全面屈服都可以用这个模型来分析。

假设在裂纹前端有一个非常狭窄的条状颈缩区，其上作用着极限应力 $\sigma_B$ ，条状颈缩区的高度取为零，它被看作是真实裂纹的延伸。真实裂纹与条状颈缩区一起组成有效裂纹。在条状颈缩区之外是塑性区，塑性区之外是弹性区。

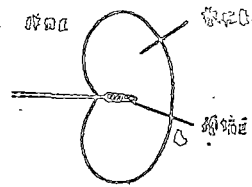


图2

与Dugdale模型本质不同的地方在于条状颈缩区模型并不限制塑性区的形状。文献[26]应用全量理论及塑性流动理论对这个模型进行了有限元计算，得到了裂纹顶端的张开位移与标称应变之间的关系曲线，从而为Buderkin设计曲线提供了理论依据。

### 稳态裂纹扩展的分析方法

用J积分描述稳态裂纹扩展已由Paris等人[27]及Garwood等人[28]作了详细研究。J积分在裂纹稳态扩展过程中，并不保持常数，而是随着裂纹扩展量 $\Delta a$ 的增加而迅速增加。因此，问题的实质在于确定J阻力曲线，并且证明 $J_{Rc}(\Delta a)$ 不依赖于试样尺寸、试样几何和加载方式。

J积分的理论基础是塑性形变理论，因此，一般地说它不能模拟弹性卸载效应及剧烈的非比例加载。但是如果裂纹扩展量非常小，因此弹性卸载区和非比例加载区也很小，就可能仍然受HRR奇性场所控制。文献[29]指出，J控制裂纹扩展的必要条件是：

$$\frac{J}{\sigma_B^2} \ll R \quad (13)$$

$$\frac{J}{\sigma_B^2} \ll R \quad (14)$$

$$D \gg J_{Ic} / (dJ_R / da) c \quad (15)$$

这第二个条件意味着J随着裂纹扩展的增加速度非常高，以致在R区域内，HRR奇性场依然是个很好的近似(图3)。

Shih等人[16]从另外角度研究了稳态裂纹扩展问题。他们完成一批精心设计的紧凑拉伸试验，试样的厚度从1英寸到4英寸，材料是A533-B，为了使裂纹前沿保持直线，侧边开了浅的沟槽。实验中细致地测定裂纹扩展量 $\Delta a$ ，张开咀位移 $\delta$ ，载荷P。由此每个试样都能给出 $J-\Delta a$ ， $\delta-\Delta a$ ， $P-\Delta a$ ，曲线，同时也给出 $P-\Delta$ 曲线( $\Delta$ 是加载线位移)。

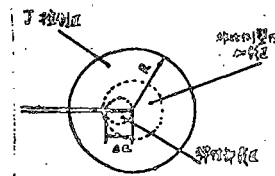


图3

同时Shih等人完成了细致的有限元计算。他们采用八结点的等参单元。尖端用退化的单元，并且允许裂纹顶点由几个分离结点聚合而成，加载过程中各个结点分离移动模拟裂纹钝化。选择典型试样，根据 $P-\Delta a$ 曲线进行有限元计算，通过计算发现，局部的COA保持为常数，只在裂纹扩展量很小的情况下，COA有明显的变化。



图4

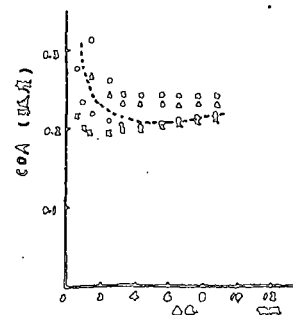


图5

## 裂纹定常扩展的数学分析

扩展裂纹的塑性分析是十分困难的，到目前为止，只对 I 型裂纹有比较完整的解答，而对张开型裂纹，还缺乏这方面的解答。对非线性弹性材料，Hutchinson 和 Paris [29] 导出如下公式：（对于理想塑性材料，用形变理论解答）

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{da} = \frac{1}{2\sigma_0} \left( \frac{1}{r} \frac{dJ}{da} J_{ij}(\theta) \right) + \frac{1}{2\sigma_0} \frac{J}{r^2} \beta_{ij}(\theta) \quad (16)$$

其中第一项表示 J 积分控制的项，第二项表示了非比例加载。若  $dJ/da \gg J/r^2$ ，那么 J 积分控制的项就起了决定作用。

Rice 等人 [30] 用增量理论分析了扩展裂纹的弹塑性场，得到了若干有趣的结果。文献 [31] 也得到了类似的结果。他们发现扩展裂纹顶端的弹塑性场与静止裂纹的弹塑性场并不相同。在扩展裂纹的顶端存在着弹性卸载区（图 6）。弹性卸载区存在是意料之中的，但是令人感兴趣的是这个卸载区夹在中心扇形区 C 及裂纹面上等应力区 B 之间。图 7 表示了裂纹顶端的应力场，可以看出只在弹性卸载区内，静止裂纹与扩展裂纹的应力场稍有差别。

文献 [31] 进一步导出裂纹顶端张开位移的

变改率公式：

$$\dot{\delta} = \alpha \frac{J}{\sigma_0} + \beta \frac{\sigma_0}{E} \frac{dJ}{da} \frac{R}{r} \quad r \rightarrow 0 \quad (17)$$

这里  $\beta = 5.08$ （对于  $\nu = 0.3$ ）， $\sigma_0$  是屈服强度，J 是远离裂纹顶端的 J 积分值。 $\alpha$ ，R 是待定参数，它可以通过求解整个应力应变场求得（用数值分析的办法）。

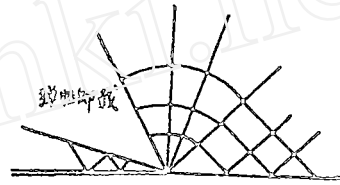


图 6

文献 [32] 提供了一个上述问题的数值解，数值解的结果与解析解的结果相当一致。

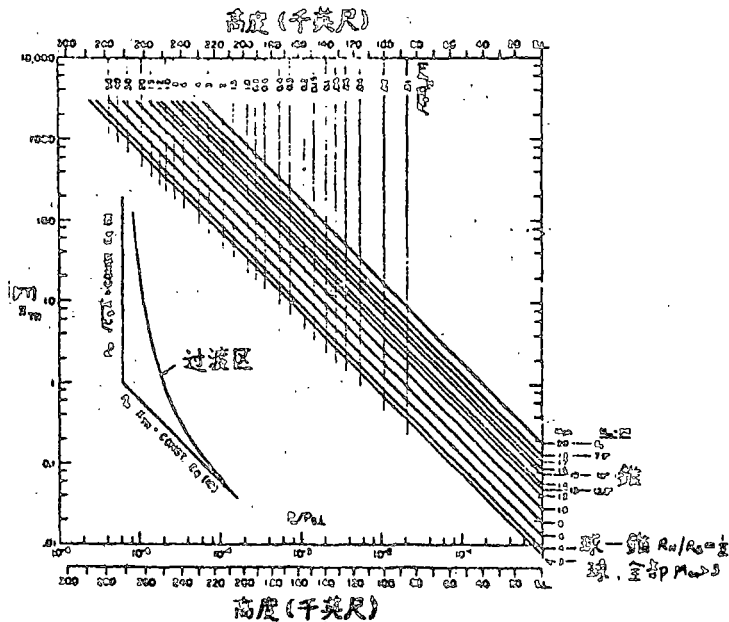


图 7

## 参 考 文 献

- [1] Wells, A.A. (1961), *Proc. Crack Propagation Symp., Ganfield*, 1: 210.
- [2] Rice, J. R. (1968), *J. Appl. Mech.*, 35: 379.
- [3] Cherepanov, G. F. (1967), *Appl. Math. Mech. (PMM)*, 31: 475.
- [4] ATKINSON, C. (1979), *Appl. Mech. Review*, 32: 2
- [5] Begley, J. A. and Landes J.D. (1974), *J. D.* (1974), *ASTM-STP 560*: 170.
- [6] Carlsson, A. J. and Markström, K. M. (1977), in "Fracture, 1977", vol. 1, ICF4, Waterloo, Canada, June 19-24, 1977"
- [7] Atluri, S. N. and Nakagaki, M. (1977), *ibid* vol. 3, ICF4: 457
- [8] 三好俊郎等 (1976), 有限要素法—构造要素の变形, 破壊挙動の分析.
- [9] McMeeking, R. M. (1977), *J. Mech. Phys. Solids*, 25: 357.
- [10] Hutchinson, J. W. (1968), *J. Mech. Phys. Solids*, 16: 13.
- [11] Rice, J. R. and Rasengren, G. F. (1968), *J. Mech. Phys. Solids*, 16: 1.
- [12] McMeeking, R. M. and Parks, D. M., *ASTM STP - 668*.
- [13] Shih, C. F. and German, M. D., to be published.
- [14] Shih, C. F. and Dean, R. H., to be published
- [15] McClintock, F. A. (1971), in "Fracture: An Advance Treatise", ed. H. Liebowitz, 3, Academic Press: 47."
- [16] Shih, C. F., et al. (1979) *ASTMSTP 668*: 65.
- [17] Kfoury, A. P. and Rice, J. R. (1977), in "Fracture, 1977", vol. 1, ICF4: 43-60."
- [18] de Koning, A. U. (1975), *Rep. NLR MP 75035U*, National Aerospace Laboratory (NLR), The Netherlands.
- [19] Newman, Jr. J. C. (1976), *ASTM STP 637*.
- [20] Hutchinson, J. M. (1979), in "Proceedings of the Seventh Canadian Congress of Applied Mechanics, Sherbrooke, 27 May, 1979."
- [21] McClintock, F. A. and Irwin, G. R. (1965), *ASTM STP 381*: 84.
- [22] Broek, D. (汪克仁等译), *工程断裂力学基础*, 科学出版社, 1980.
- [23] Vittek (1976), *J. Mech. Phys. Solids*, 24: 263.
- [24] Shaeffer, B. J., Liu, H. W. and Ke, J. S. (1971), *Experimental Mechanics*, 11: 172.
- [25] Underwood, J. H. et al. (1969), *Experimental Mechanics*, 9: 293.
- [26] Hsu chi Lin (徐纪林) and Wang Tzu chiang (王自强) (1981), An elastic-plastic fracture model of plane stress and its finite element analysis, to be published ICF 5, 1981.
- [27] Paris, P. C., et al. (1979), *ASTM STP 668*.
- [28] Garwood, S. J., et al. (1975), *Int. J. Fracture*, 11: 528
- [29] Hutchinson, J. W. and Paris, P. C. (1979), *ASTM STP 668*.
- [30] Rice, J. R., et al. (1979) *Division of Engineering, Brown University, Technical Report No. 65, May, 1979*.
- [31] 高玉强 (1980), *力学学报*, 1.
- [32] Dean, R. H. and Hutchinson, J. W., to be published in *ASTM STP 700*.