

# 三维裂纹应力强度因子计算综述

## Ⅰ、数值算法\*

上海交通大学工程力学系 张永元

### 一、前言

对于三维裂纹应力强度因子的计算,在第一部分中曾介绍了一些分析解法,但这类方法由于数学上的困难还存在较大的局限性。为了解决上述矛盾,近年来,近似的数值计算方法有了相当大的发展[1, 2]。本文将对近十年来国际上在三维裂纹问题方面所发展的各种数值解法作一简要的综述。在三维裂纹问题的计算中,目前比较行之有效的数值解法有边界积分方程法[3—7]、有限单元法[8—13]、有限差分法[14—16]、直线分析法[17—19]以及边界积分方程和有限单元的混合应用法[20—21]等。总的来说这些方法,尽管离散化的模型有所不同,一般都归结为用电子数字计算机解线性代数方程组(如边界积分方程法、有限单元法和有限差分法等),或者归结为解常微分方程组(如直线分析法),从而求得其数值解。然后,再按直接法或其它数值技巧推算裂纹尖端区域的应力强度因子值。文中我们将着重介绍有限单元法以及颇有发展前途的边界积分方程法和直线分析法等两种半分析的方法。

### 二、三维裂纹计算的有限单元法

有限单元法是计算三维裂纹问题的一种有效手段,近十年中有很重要的发展。这一方法的优点首先在于其通用性较强,对于单元间的边界条件具有一定的灵活性;其次,它在网格布局上较有限差分法更为合理,更能适应比较复杂的几何边界不规则的问题;同时,它还能方便地推广处理象非均质、几何非线性、物理非线性等方面的问题,可使问题的力学特性基本上被保持,并保证一定的精度和收敛性。但在另一方面,对裂纹问题中存在的高应力梯度的区域,为了确保精度,就需要有密集细分的结构单元网格。这样,在电子计算机的输入数据处理上显得较为困难,并且,联立线性代数方程组的求解规模也有可能超过一般电子数字计算机系统的容量。因此,针对求解三维裂纹问题,就特别需要改进数值解法的技巧[22]使尽可能减少未知参数的线性代数方程组。

有限单元法的基本思想是直接将一个体系 $\nabla$ 离散为有限个数目的单元 $\nabla_n$ 的集合,即所谓的“物理离散”。对每个单元 $\nabla_n$ 用有限个参数来描述它的力学特性,然后应用一个适当的方法,将各个单元的关系式结合组成一个包含有限个未知参数的方程组;有效地解出此方程组,就能求得问题的近似解。有限单元法的离散化方法,通常是基于常用的几个变分原理,如最小势能原理(或虚位移原理)、最小余能原理和Reissner广义变分原理等。最小势能原理取用的变量是位移,其位移必须在体系内部保持连续;最小余能原理中的变量是应力,其应力必须在体系内部保持平衡;在Reissner的广义变分原理中位移和应力都取为变量,所以在列有限单元公式时,需要在每个单元内假设应力和位移。在三维裂纹问题的有限单元计算中,目前主要应用最小势能原理和最小余能原理的方法。

\* 1980年12月17日收到。

1. 最小势能原理和位移协调模型 根据最小势能原理, 体系的总势能泛函  $\Pi_p$  的变分为零。对于离散成有限个单元的连续体来说, 其总势能的泛函  $\Pi_p$  可以写成:

$$\Pi_p = \sum_n \left\{ \int_{V_n} \left[ \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - F_i u_i \right] dV - \int_{S_{\sigma n}} \bar{T}_i u_i dS \right\}$$

式中  $C_{ijkl}$  是刚度系数,  $V_n$  是第  $n$  个单元的体积,  $S_{\sigma n}$  是第  $n$  个单元受面力  $\bar{T}_i$  作用的边界。

应用最小势能原理时, 位移函数必须满足连续性条件。而第  $n$  个单元上的位移函数  $u$ , 由插值函数  $L$  和待定参数  $q_n$  近似地表示,  $q_n$  是在有限个单元节点上的位移值, 称为广义节点位移。插值函数使两个相邻单元间边界上的节点位移协调一致的同时, 还应使沿单元间的边界各点的位移协调。设第  $n$  个单元的位移用矩阵形式表示为

$$u_i = \sum_p L_{ip} q_n$$

式中  $q_n$  是单元的广义节点位移,  $L_{ip}$  是插值函数, 它依赖于单元节点的坐标, 确定第  $n$  个单元的位移形式。

此外, 第  $n$  个单元的应变 - 位移和应力 - 应变关系矩阵分别为:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= B u \\ \bar{\sigma} &= D \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

式中  $B$  为偏微分算子矩阵,  $D$  为弹性常数矩阵。将  $\bar{\varepsilon}$  和  $u$  代入总势能的泛函, 得

$$\Pi_p = \sum_n \left( \frac{1}{2} q_n^T K_n q_n - q_n^T R_n \right)$$

式中  $K_n = \int_{V_n} B^T D B dV$  称为单元的刚度矩阵; 而  $R_n = \int_{V_n} L^T F dV + \int_{S_{\sigma n}} L^T \bar{T} dS$  为规定的负荷 (体力  $F_i$  和面力  $\bar{T}_i$ ) 产生的广义力向量。

为了满足单元间节点位移的协调性, 还必须按总体节点序号进行组合, 为此引用一个  $3N \times 3t$  ( $N$  为体系的节点总数,  $t$  为单元的节点个数) 的变换矩阵  $P_n$ , 把各个单元的节点位移  $q_n$  与一系列全局位移  $q$  联系起来。  $q$  的分量就是在体系内所有节点的广义位移, 即

$$\sum_n q_n = P_n q$$

这样,  $\Pi_p$  的表达式就可以写成  $\Pi_p = \frac{1}{2} q^T K q - q^T R$

$$\begin{aligned} K &= \sum_n P_n^T K_n P_n \\ R &= \sum_n P_n^T R_n \end{aligned}$$

分别为结构的总体刚度矩阵和作用的广义节点力的列矩阵,  $q$  为总体节点位移列阵。由于最小势能原理可以表示为总势能泛函  $\Pi_p$  的变分为零, 于是就得到一个线性代数方程组

$$K - R = 0$$

这就是整个体系的节点平衡方程, 即刚度方程, 由此式可以计算未知节点位移。有了节点位移, 就可以分别计算出应力场和位移场。

绝大部分现有的有限单元公式是根据最小势能原理与位移协调模型建立的。当假定的位移函数在单元内连续, 在单元间协调, 并包含单元的刚体位移和常应变状态时, 则有限单元法的位移模型给出体系真实刚度的上界。显然, 随着体系单元的尺寸不断减小, 其位移解将愈益接近于弹性力学的精确解。这种按位移在单元间协调列出的有限元公式的模型, 称为位移协调模型。

在用这种位移协调模型解三维裂纹问题时, 变分泛函中只出现位移函数的一阶导数, 因此, 在单元间的边界仅要求位移分量的连续可微性, 这时, 建立同时满足单元内连续和单元

间协调条件的插值函数是不困难的。在三维裂纹问题中，最简单的单元有四面体和六面体单元，插值函数可以是线性的或高阶的，其节点除位于单元的顶点外，还可以位于单元的边上或面上。文献 [ 23 ] 在离散时采用几个三角棱柱的四面体拼成的平行棱柱单元，这种单元的缺点是裂纹体将离散为大量的单元，刚度方程的阶数较高，必须占用大量的计算机存储单元和过长的计算时间，而且计算精度较差，因而需采用两步解法，即首先使用粗网格进行解析，然后根据求出的节点力当作载荷条件，再用精细网格解析裂纹尖端。

为了提高有限单元法的精度，在求解三维裂纹问题中，一般常采用特殊单元，如等参数单元 [ 24—27 ]、奇异性单元 [ 28—31 ] 和平方根单元等三种单元及其组合 [ 32—35 ]。应用等参数变换，还可以建立曲边或曲面的单元插值函数。等参数单元或称线性应变单元，可以用于除裂纹前沿外的任何地方。文献 [ 36 ] 用 20 个节点的等参数单元求解了表面裂纹问题。奇异性单元由于在其假设的位移函数中有平方根项，因而在裂纹前沿引起一个  $\sqrt{r}$  的奇异性应力场，故奇异性单元仅用于裂纹前沿处。平方根单元在其假设的位移函数中也有平方根项，而用于靠近裂纹前沿和奇异性单元的周围。在文献 [ 37 ] 中给出了 8 节点六面体等参数单元、五面体奇异性单元、8 节点六面体平方根单元的形状函数以及各种单元的刚度矩阵，并给出了各种有限厚度断裂试件的数值例子。

对于等参数单元和奇异性单元的刚度矩阵为

$$k_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 B^T D B \det |J| d\xi d\eta ds$$

对于平方根单元的刚度矩阵为

$$k_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\beta_1}^{\beta_2} B^T D B \det |J| d\xi d\eta ds$$

式中的雅可比矩阵 [ J ] 的行列式 | J | 可分别地由等参数单元、奇异性单元和平方根单元的坐标变换而得。

此外，文献 [ 38 ] 采用能量释放率决定复合型裂纹的应力强度因子，而文献 [ 39 ] 则采用刚度导数有限单元确定二维和三维裂纹问题裂纹尖端区域的应力强度因子。

2. 修正的余能原理和杂交应力模型 修正的余能原理可以用来推导另一种解三维裂纹问题的有限单元模型。采用这种原理列出有限单元公式时，在每个单元内建立假定的应力  $\sigma_{ij}$  边界位移  $\bar{u}_i$  通过有限数的广义节点位移  $q_n$  来内插，以代替考虑边界力的平衡。在此模型中，如果裂纹前沿是曲线时，则必须用一组直线逼近，其中每一条直线作为一组块状的特殊裂纹尖端单元的边，如图 1 所示。在分析中，整个裂纹体用通常的规则有限单元围绕这些特殊单元。用于推导这种单元公式的变分泛函为

$$\Pi(\sigma_{ij}, \bar{u}_i) = \sum_K \left\{ \int_{V_K} \frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV - \int_{\partial V_K} T_i \bar{u}_i ds + \int_{S\sigma_n} \bar{T}_i \bar{u}_i ds \right.$$

式中  $\sigma_{ij}$  满足平衡方程， $S_{ijkl}$  是弹性柔度张量， $T_i$  是由应力  $\sigma_{ij}$  得到的表面力，即  $T_i = \sigma_{ij} n_j$ ， $\bar{u}_i$  是边界位移和  $\bar{T}_i$  是在  $S\sigma_n$  范围内的表面力。于是，独立的变量是应力  $\sigma_{ij}$  和和边界位移  $\bar{u}_i$ 。在裂纹前沿单元中，假设的应力不仅包括齐次多项式，而且包含应力的奇异性项，因此，在包含裂纹尖端的单元中，假设应力为

$$\sigma_{ij} = \sum_m B_{ijm} \epsilon / r^{\alpha_m} + \sum_n A_{ijm} (x, y, z) \beta_n$$

此假设的应力既要满足平衡方程，又要满足裂纹面自由的条件。假设的边界位移  $\bar{u}_i$  用节点

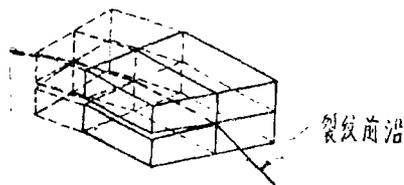


图 1 绕裂纹前沿的有限单元

位移  $q_n$  表示, 此节点位移包含裂纹前沿界面位移变量, 在所有内部单元边界的位移协调条件是完全满足的, 于是,  $\bar{u}_i$  表示为

$$\bar{u}_i = \sum_n L_{in} q_n \quad (i=1,2,3)$$

式中  $q_n$  是广义节点位移,  $L_{in}$  是插值函数。把  $\sigma_{ij}$ ,  $\bar{u}_i$  代入泛函  $\Pi(\sigma_{ij}, \bar{u}_i)$  式, 然后对于泛函  $\Pi(\sigma_{ij}, \bar{u}_i)$  关于  $\beta_i$  使用稳态条件, 消去应力参量  $\beta_i$ ,  $\Pi(\sigma_{ij}, \bar{u}_i)$  就可以用广义位移  $q$  和应力强度因子  $K_m$  ( $m=I, II, III$ ) 表示。对于整体结构, 涉及同一个节点位移的项汇集在一起。然后,  $\Pi(q, K_m)$  对于  $q$  和  $K_m$  的稳态条件导致如下形式的代数方程

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rs} \\ K_{rs} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ K_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q \\ 0 \end{Bmatrix}$$

由上述方程, 能获得广义位移  $q$  和应力强度因子  $K_m$ , 也以只考虑裂纹前沿的单元组, 并形成

一个超单元, 消去  $K_m$ , 超单元的刚度矩阵  $K$  可以由  $K = K_{rr} - K_{rs} K_{ss}^{-1} K_{rs}^T$

求得。文献 [40] 中采用了 8 节点、12 节点和 16 节点三种类型的奇异性单元, 对于裂纹平面对称的问题可以用 12 节点、20 节点和 26 节点的半单元, 对于非对称问题, 则可以用 20 节点、36 节点和 46 节点的超单元。由几种问题的分析结果表明, 对于三维断裂分析, 连最简单的 8 节点单元 (12 节点半单元和 20 节点超单元) 已经足够满意。

3. 修正的势能原理和杂交位移模型 [41—45] 应用传统的最小势能原理时, 变分的泛函只有在整个体系上连续的位移场。然而, 在有限单元法中, 允许在沿单元间边界引进位移协调条件作为约束条件, 因此, 在泛函中就可能出现对于单元内部的位移场和单元间边界位移采用分别的变量, 这两个变量在单元边界的协调条件可以采用拉格朗日乘子的方法, 这乘子仍可以认为是边界力, 但它对于相邻两单元是各自独立的。于是, 包含有相应的拉格朗日乘子, 即单元间的边界力  $T_{ip}$  作为附加量来修正这个泛函, 修正后的变分泛函为

$$\Pi(u_i, T_{ip}, \bar{u}_{ip}) = \sum_n \left\{ \int_{V_n} \left[ \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - F_i u_i \right] dV - \int_{\partial V_n} \bar{T}_i u_i ds - \int_{\partial V_n} T_{ip} (u_i - \bar{u}_{ip}) ds + \int_{S_{un}} T_i (u_i - \bar{u}_i) ds \right\}$$

式中  $\bar{u}_{ip}$  是单元间的边界位移。在这个变分原理中的变量是单元位移  $u_i$ , 单元间的边界位移  $\bar{u}_{ip}$

和单元的边界力  $T_{ip}$ 。在应用有限单元列式时, 考虑一个特殊的裂纹前沿的奇异单元, 其中嵌入一个  $\sqrt{r}$  阶的渐近位移场。于是, 在杂交位移公式中, 对于此奇异单元内部位移、边界位移和边界力分别假设为

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_n [u_i^A(r, \theta)] K_m + \sum_n u_i^B(r, \theta, z) \beta_n \\ \bar{u}_{ip} &= \sum_n L_{in} q_n \\ T_{ip} &= \sum_n R_{in} d_n \end{aligned}$$

式中  $u_i^A$  是渐近位移,  $u_i^B$  是在  $(r, \theta, z)$  坐标系中的任意阶多项式,  $L_{in}$  是通过裂纹前沿的边界表面上包含  $\sqrt{r}$  阶变化的插值函数, 而  $R_{in}$  是经过裂纹边界的表面上包含  $1/2$  阶变化的插值。把

$u_i$ ,  $\bar{u}_{ip}$  和  $T_{ip}$  代入  $\Pi(u_i, T_{ip}, \bar{u}_{ip})$  式, 由于  $T_{ip}$  和  $u_i$  式中都含有应力强度因子, 而  $\bar{u}_{ip}$  中含有广义节点位移, 于是, 取泛函的变分, 得如下形式的最终方程

$$\begin{bmatrix} K_0 & K_1 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

式中  $K_m = [K_0^T, K_1^T, K_2^T]$  是沿裂纹前沿所有节点处混合模型的应力强度因子,  $j=1, 2, 3, \dots, m$ 。于是, 应力强度因子和结构的广义节点位移  $q$  一起直接算出。就推算裂纹尖端的应力强度因子来说, 此杂交位移模型已证明是一个有效的方法。

三维裂纹问题的困难通常在于自动地满足离裂纹有限距离处复杂的位移和力的边界条件

以及复杂的几何形状。在这方面，有限单元法的优点是众所周知的，但是，为了改进解的精度，需要改进裂纹前沿区域的单元网格，或者需要改进这种数值解法的技巧。改进数值解法的技巧一般有如下几种：

1) 根据位移推算的直接法 直接法分为按计算位移推算的方法和按计算应力推算的方法，由于应力场是通过对位移场的偏导而求得的，所以，位移法能得到比应力法更精确的结果。为了计算矩形块体表面裂纹尖端区域的应力强度因子，文献[23]使用了按裂纹前沿的张开位移推算的直接法。

2) 根据裂纹尖端奇异性的渐近性质的叠加法 根据弹性力学中的叠加原理，把有限单元解和解析解叠加后用作断裂力学分析，通过一种通常的有限单元网格和经典的奇异性的线性组合，以确定裂纹尖端区域的应力强度因子。文献[46]成功发展了二维断裂分析的叠加法，文献[47]—[49]则把它推广到有几个数值例子的三维裂纹问题。

3) 根据修正的虚位移原理的叠加法 文献[50]建议了一种计算应力强度因子的另一种叠加法。在这种方法中，把常规有限单元法的节点位移与解析解的未知常数一起通过修正的虚位移原理来确定。此方法不仅可以用于三维裂纹分析[51—53]，还可以用于具有轻微奇异性的裂纹板的弹塑性分析[54]。

4) 应力差法 文献[55]提出了一种用常规有限单元法求精确的应力强度因子的程序。首先，计算结构中没有裂纹时在假想裂纹尖端处单元的应力 $\sigma_g$ ；其次，计算同一结构有裂纹时裂纹尖端单元的应力 $\sigma_{tip}$ ；最后，按应力差 $(\sigma_{tip} - \sigma_g)$ 与应力强度因子成比例，用 $(\sigma_{tip} - \sigma_g)$ 与标准结构的比确定应力强度因子，因为标准结构的应力强度因子是已知的文献[56, 57]则将上述技巧用于三维裂纹的分析。

5) 数值试验法 通过用有限单元法计算的裂纹尖端区域的应力值与该区域相应的解析应力分布的平均值的比较，导出了应用数值试验的公式，于是，应力强度因子可以简单地确定[58]。此方法是基于这样的考虑，如果单元的类型和裂纹尖端区域的有限单元数两者都保持不变，由有限单元法分析的裂纹特性可以只取决于裂纹尖端处的单元尺寸，文献[58]不仅把此法应用于三维裂纹的张开模型，而且也用于滑开模型和撕裂模型。

6) 离散误差法 根据有限单元技术的离散误差的断裂力学分析方法是文献[59—61]提出的，文中用一种有效的方法获得了二维和三维裂纹的应力强度因子。当三维裂纹前沿的坐标由图2定义时，用有限单元法计算的应力强度因子值可以写成如下形式：

$$K = K_{ex} + A_1 N_1^{-\delta_1} + A_2 N_2^{-\delta_2} + A_3 N_3^{-\delta_3}$$

式中 $K_{ex}$ 是当单元数无限增加时应力强度因子的精确值， $N_i$  ( $i=1, 2, 3$ )表示在方向 $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ )所用的单元数， $\delta_i$  ( $i=1, 2, 3$ )

表示关于与 $N_i$  ( $i=1, 2, 3$ )有关的离散误差大

小的参数(正数)，而 $A_i$  ( $i=1, 2, 3$ )是在方向 $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ )误差的大小。因为绕图2所示的裂纹尖端的应力场奇异性被认为只在方向 $x_1$ 和 $x_2$ ， $\delta_3$ 比 $\delta_1$ 和 $\delta_2$ 大得多，此事实导致如下近似关系：

$$N_1^{-\delta_1} / N_3^{-\delta_3} \approx N_2^{-\delta_2} / N_3^{-\delta_3} \approx 0$$

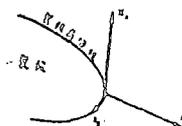


图2. 三维裂纹中的局部坐标系

用上述关系, 并取  $N_{ij}^0$  为常数  $\beta$ , 于是得  $K = K_{ex} + a N_{ij}^0$  式中  $a = A_1 \beta^{-1/2} + A_2$ .  
 假设  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ , 因此, 应力强度因子只取决于距裂纹尖端的距离。这样, 上式中的未知数是  $K_{ex}$ ,  $a$  和  $\delta$  为了决定应力强度因子  $K_{ex}$ , 重复进行三次有限单元计算, 以得到三个对应于  $N_{11}^0$ ,  $N_{22}^0$  和  $N_{33}^0$  的应力强度因子的近似值  $K_{(1)}$ ,  $K_{(2)}$  和  $K_{(3)}$ , 于是, 使用所得到的  $K_{(i)}$  ( $i=1,2,3$ ), 就可以由联立方程  $K_{(i)} = K_{ex} + a N_{ij}^0$  ( $i=1,2,3$ ) 容易地决定  $K_{ex}$ 。

最后指出: 对于三维裂纹的分析, 为了尽可能减少计算机的运算时间和内存容量, 以获得经济的效果, 又不致降低必要的计算精度, 需要进一步改进数值解的技巧。与此同时, 在工程应用中, 有关的三维裂纹问题的有限单元法的分析结果, 已有不少文献加以报导[62—66]。

### 三、 三维裂纹计算的边界积分方程法

边界积分方程法起源于经典弹性力学 [67—69], 随着电子数字计算机的发展, 近十年来获得了广泛的应用; 并由 Rizzo, Shippy, Cruse 和 Lee 等人发展推广到断裂问题的计算。边界积分方程法所以引起人们广泛的兴趣是由于它有两个重要的特点: 1) 不需要模拟物体内部, 所有数值模拟只在边界面上进行; 2) 用远较连续数据为少的自由度模拟边界面上的数据, 因而, 不用承担巨大的分析费用, 就允许相当程度的模型精度。

因此, 它与有限单元法相比, 缩减了问题的因次, 这不仅大大地减小了数值计算的容量, 而且增加了精度; 它与有限差分法相比, 更能适应边界形状和应力的急剧变化。此外, 边界积分方程法计算的是边界面上的数据, 断裂力学中按位移法推算应力强度因子的裂纹面的张开位移值, 可以直接用边界积分方程法算出, 从而由裂纹面张开位移的数据来推算应力强度因子, 它远比通过内部应力数据来推算为精确。所以, 边界积分方程法对于几何形状急剧变化的结构情况特别有效。

边界积分方程法的基本思想是利用弹性位移的积分恒等式, 即弹性力学中 Betti 的功互等定理的 Betti 第三恒等式, 以及在无限体内一个集中点载荷问题的 Kelvin 解相结合, 而将体内任意一点的位移用边界值的积分形式来表达。当载荷点  $p$  由一个具有表面  $S^0$  的无限小球面  $R^0$  所包围时, Betti 第三恒等式为  $\int_{S^0} (u_i T_{ji} - t_i u_{ji}) ds = 0$   
 式中  $u_i$ ,  $t_i$  是未知应力状态下的位移和应力。于是, Betti 定理建立了已知边界力、边界位移和未知力、未知位移之间的关系式。

在无限体中, 按照点载荷问题的 Kelvin 解的位移矢量可以表示为:

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{1}{r}\right) \left[ \frac{3-2\nu}{4(1-\nu)} \delta_{ij} + \frac{1}{4(1-\nu)} r_{,i} r_{,j} \right]$$

而与三个坐标方向的每一个点载荷相对应的位移和力矢量用基矢  $e_i$  表示为  $U_j = U_{ij} e_i$ ,

$t_j = T_{ij} e_i$  于是, 对于点载荷问题 Kelvin 解的力矢量由 Hooke 定律和位移矢量式得出为  $T_{ij} = -\frac{k}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2}\right) \left[ \frac{2\nu}{1-\nu} (\delta_{ij} + \frac{3-2\nu}{1-2\nu} r_{,i} r_{,j}) - n_j r_{,i} + n_i r_{,j} \right]$  式中  $k = \frac{E(1-2\nu)}{2(1-\nu)}$ 。

用通常方法取极限  $R^0 \rightarrow 0$ , 则  $\int_{S^0} t_i u_{ji} ds = 0$  和  $\int_{S^0} U_i T_{ji} ds = U_j(p)$ ,

于是, 对于边界点  $Q(x)$ , 得到对于已知面力和位移的弹性体内部位移的 Somigliana 恒等式。即  $U_j(p) = \int_{S^0} u_i(Q) T_{ji}(Q,p) ds + \int_{S^0} t_i(Q) U_{ji}(Q,p) ds$  式中  $u_j(p)$  是内部点  $p(x)$  的位移矢量,  $t_i(Q)$ ,  $u_i(Q)$  是力和边界值的位移值, 核函数  $T_{ji}(Q,p)$ ,  $U_{ji}(Q,p)$  是由于在  $p(x)$  点  $x_i$  方向的单位荷重而引起的在  $Q(x)$  点  $x_j$  方向的力和位移。

内部点的应力矢量  $\sigma_{ij}(p)$  式可以用  $u_j(p)$  式对载荷点  $p(x)$  的微分而得

$$\sigma_{ij}(p) = -\int_S u_k(Q) S_{kij}(Q, p) ds + \int_S t_k(Q) D_{kij}(Q, p) ds$$

式中张量  $D_{kij}$  和  $S_{kij}$  分别为

$$D_{kij} = \frac{k}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2}\right) (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k} + \frac{3}{1-2\nu} r_{,i} r_{,j} r_{,k})$$

$$S_{kij} = \frac{k\mu}{4\pi} \left(\frac{2}{r^3}\right) \left\{ 3\frac{\partial r}{\partial n} [\delta_{ij} r_{,k} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i})] - \frac{5}{1-2\nu} r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right. \\ \left. + \frac{3\nu}{1-2\nu} (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + 3n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ki} + n_i \delta_{kj} - \frac{1-4\nu}{1-2\nu} n_k \delta_{ij} \right\}$$

在边界上,  $P(x)$  是不同于  $Q(x)$  的边界点, 则让内部的点  $p(x)$  从物体内部趋近于边界点  $P(x)$ , 即使  $p(x) \rightarrow P(x)$ , 就得到  $u(p)$  式的一个极限形式, 这就是一组联系边界位移和边界力的积分约束方程——边界积分方程 [67, 68]:

$$U_j(p)/2 + \int_S u_i(Q) T_{ji}(Q, p) ds = \int_S t_i(Q) U_{ji}(Q, p) ds$$

式中核函数  $T_{ji}(Q, P)$  和  $U_{ji}(Q, P)$  是由于在边界点  $P(x)$  上三个正交的点载荷作用而在  $Q(x)$  点上产生的应力和位移量。因为整个边界上的力和位移不是同时知道的, 这样, 就可以通过求解一组不同类型的联立边界积分方程来获得其余未知的边界值。

上述边界积分方程的求解一般都采用数值解法。在具体计算时, 可以用一系列平面分段离散物体的边界表面  $S$ ; 并进一步假设在每一边界段  $\Delta S_n$  上力矢量和位移矢量的分量为常数 [70] 或线性变化的函数 [71, 72]。若边界分段设为常数时, 则可将边界积分方程化为具有相同未知边界值数量的方程组成的线性代数方程组

$$U_j(p_m)/2 + \sum_{n=1}^N u_i(Q_n) \Delta T_{ji}(p_m, Q_n) = \sum_{n=1}^N t_i(Q_n) \Delta U_{ji}(p_m, Q_n)$$

式中  $m = 1, 2, \dots, N_j$

$$\Delta T_{ji}(p_m, Q_n) = \int_{\Delta S_n} T_{ji}(p_m, Q) ds$$

$$\Delta U_{ji}(p_m, Q_n) = \int_{\Delta S_n} U_{ji}(p_m, Q) ds$$

这里  $u_i(Q_n)$ ;  $t_i(Q_n)$  是  $u_i$ ,  $t_i$  在单元  $\Delta S_n$  上的常数近似值。

为了更好地计算在  $\Delta S_n$  上的参数  $u_i$  和  $t_i$ , 点  $P_m$  和  $Q_n$  一般取在单元  $\Delta S_n$  的形心处, 于是得

$$\sum_n \left\{ \left[ \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{mn} + \Delta T_{ji}(m, n) \right] u_i(n) \right\} = \sum_n \left[ \Delta U_{ji}(m, n) t_i(n) \right]$$

用矩阵表示为

$$\left\{ \frac{1}{2} [I] + \Delta T \right\} \{u\} = [\Delta U] \{t\}$$

式中  $[I]$  是单位矩阵, 通常为了得到混合边界值问题的解, 若  $n, m = 1, 2, 3, \dots, n, \dots, N$ , 则  $3N$  个线性代数方程为

$$[A] \{u\} = [B] \{t\}$$

于是, 对于给定位移的问题, 可以直接解上式得未知力矢量; 对于给定力的问题, 在固定物体以防止刚体运动后, 可以解上式得未知位移矢量。较常见的边界值问题是混合型的, 即在部分边界上已知某些力矢量的分量和在部分边界上已知某些位移矢量的分量。在任意给定的边界分段上, 必须知道三个边界数据, 而三个边界数据是未知的, 对于这类问题, 上述方程有  $3N$  个已知数和  $3N$  个未知数, 在重新排列方程后, 用标准矩阵归纳法可以求解上述方程式。

组，以求得未知数。

在解出了上述方程式组后，就可以得  $3N$  个边界力和  $3N$  个边界位移，再用  $N$  个平面分段代替边界面，通过对任意内部点  $P(\bar{x})$  处的位移张量式  $u_j(p)$  和应力张量式  $\sigma_{ij}(p)$  的积分，就可以求出内部的未知位移和未知应力为

$$u_j(p) = - \sum_{n=1}^N U_i(Q_n) \Delta T_{r_i}(Q_n, p) + \sum_{n=1}^N t_i(Q_n) \Delta U_{j_i}(Q_n, p)$$

$$\sigma_{ij}(p) = - \sum_{n=1}^N U_{k_i}(Q_n) \Delta S_{k_{ij}}(Q_n, p) + \sum_{n=1}^N t_k(Q_n) \Delta D_{k_{ij}}(Q_n, p)$$

式中积分核  $U_{ij}$  和  $Q_{ij}$  同前；并且是通过规定边界分段的位和方向以封闭形式计算的。

从文献 [4, 68, 69, 73] 中的三维裂纹问题的应力分析结果可以证明这一方法的正确可靠性。文献 [71] 进一步在平面三角形边界段中采用了 Taylor 级数展开式的线性项以代替上述模型中采用的常数（即 Taylor 级数的第一项），且考虑的是节点的未知数而不是单体形心的，这不仅减少了固有的未知数的数目，而且裂纹平面也能离散为保持一个平面的、理想的裂纹模型，它可以在不增加计算时间的前提下，提高解的精度。

此外，在有限单元法和有限差分法的模型中，裂纹平面通常是一个对称面或反对称面，它构成离散模型的一个边界。在这两种方法中，用一般的有限单元法的内部网格或者用有限差分法的差分点代替物体的体积时，为了模拟裂纹平面，在裂纹尖端附近的内部网格需要高度细分，以便能适当地表示应力场的奇异性。而在边界积分方程法中，为了模拟各类片状裂纹，需要使用有限裂纹面间隔的模型 [70, 74]，即裂纹面用一个张开的切口面代替，也就是裂纹平面用一相应边界平面（对于三维裂纹问题）或边界分段（对于二维裂纹问题）来代替。在二维裂纹问题中，有时可用特殊的 Green 函数法分析，以消除这种对裂纹的模拟，但它增加了边界积分方程公式的复杂性。对于三维裂纹问题还都是应用张开切口面或对称裂纹平面的直接数值模拟。因为要将裂纹视作数学间断面模拟时，上、下两个裂纹平面将变成共平面。于是，在  $u_j(p)$  式中相应于裂纹表面上、下两点的  $P(x)$  的矩阵  $\Delta T_{ij}$  中的行互成相等。此外，矩阵  $\Delta U_{ij}$  与裂纹面力的乘积，在上、下表面点处也相互抵消了，即

$$\int_{\Delta S} U_{ij}(p, Q) t_i(Q) ds = 0$$

这样，就失去了在裂纹面边界上的数据。因此，必须尽可能适当地模拟一个完全裂纹，而不使两个裂纹面相重合，这就是有限间隔的裂纹面模型。对于有限间隔裂纹面模型必然引进一个如何恰当模拟的新问题；即在裂纹平面的两尖端处两裂纹表面应如何相连接的问题。因为边界段是分段平面，接在裂纹平面尖端的分段通常将有一个小于  $180^\circ$  的夹角，文献 [70, 74] 对于圆片状裂纹采用了间隔距离为  $2a/2s$ ，形状比为 2:1 的椭圆闭合。而且，有限间隔裂纹平面—这种模型的明显限制是：它只能模拟对称的 I 型裂纹问题。所以，为了模拟两个共面的裂纹表面，现在的研究方向是设法发展一个新的边界积分方程法 [70]，使它不致在数值解上出现上述的困难。

至于对裂纹尖端区域应力强度因子的数值计算，与其它数值方法的处理一样，可以用裂纹尖端前沿的应力或裂纹表面的张开位移外推。在文献 [74] 中叙述了关于圆片状裂纹与半圆形表面裂纹的外推技巧。文献 [75] 则叙述了一个利用应变能释放率  $G$  推算应力强度因子的新方法，这种方法比外推法更精确，并特别适用于三维裂纹问题。文献 [70] 评述了椭圆形内埋裂纹和表面裂纹的最新结果，认为用能量释放率推算应力强度因子比用局部位移推算

的精度有较大的提高。文献 [76] 则同时用三种方法完成了对这类三维裂纹应力强度因子的数值计算，结果是用裂纹张开位移推算的误差为 8%，用应变能释放率推算的误差为 9%。

最后，还应该指出边界积分方程法的进一步发展关键在于改进模型。此外，这种方法不仅能研究更广范围的几何裂纹形状和加载情况，而且还可以推广应用到弹-塑性或其它非线性问题 [77]。

#### 四、三维裂纹问题中的直线分析法

直线分析法是一种半解析的分析方法，由于其部分解是作为沿所选择的直线的连续函数而得出，可以用粗糙的网格获得相对地好的计算精度，所以，它能给出有限几何形状的三维裂纹问题的比较完全和精确的结果。

直线分析法是解偏微分方程中很有用的一种方法 [78]。在三维裂纹问题的应用中，当二个变量  $x, y$  被离散时，另一个变量  $z$  仍然是连续的；同理，当二个变量  $y, z$  或  $z, x$  被离散时，另一个变量  $x$  或  $y$  仍然是连续的。这样分别离散后，再对  $x, y$  或  $z$  的导数用适当的有限差分表示式代替，则用位移  $u, v, w$  表示的三维问题的偏微分方程——Navier 方程就可以化成独立变量  $x, y$  和  $z$  的联立常微分方程组，即差分-微分方程。这样，问题将归结为求解这些沿  $x, y$  和  $z$  的常微分方程组。若常微分方程组的解可以表示为有限形式，则所求得的函数组将近似地表示为偏微分方程的解；因此，它是一种半解析的方法。但如用数值方法来求解所得的常微分方程组，则可得偏微分方程的数值解；因此，它又是一种数值解法。此外，如沿  $x, y$  和  $z$  方向应用解常微分方程的有限差分方法把问题离散时，则直线分析法就是差分格式的一个变种。然而，在应用这种方法时，通常沿一个方向的离散远比沿另一个方向稀疏得多，所以，处理的乃是由非常长的矩形柱体组成的柱形网格，由于这个理由，直线分析法与通常的网格（差分格式）方法在性质上又有较大的不同。

利用这种直线分析法解偏微分方程的概念不是新的；不过它的早期应用仅仅是限于解简单的例子 [10]。而直线分析法应用于三维裂纹问题的分析则还在 70 年代以后 [79—81]。直线分析法与其它数值解法相比对于三维有限尺寸的裂纹体，由于其部分解是作为沿所选择的直线的连续函数而得出的，似乎可以得到比较完整而精确的结果。特别是在所得的常微分方程组是属于线性常系数的情况时，应用直线分析法是十分有效的 [82]。

对于具有矩形边界的有限几何体，在线弹性的范围内，Navier 方程为：

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \mu \nabla^2 u &= 0 \\(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \mu \nabla^2 v &= 0 \\(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial e}{\partial z} \right) + \mu \nabla^2 w &= 0\end{aligned}$$

假定体力为零。其中体积膨胀系数  $e$  为  $e = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)$

现对于具有矩形边界的有限几何体，沿某一坐标轴  $x$  作  $L = N_Y \times N_Z$  根平行直线；同样，沿  $y$  和  $z$  轴相应地作  $m = N_Z \times N_X$  和  $n = N_Y \times N_X$  根平行直线。每一组平行线都垂直于对应的坐标面，如图 3 所示。由图 3 可见， $L = N_Y \times N_Z$  中  $N_Y$  是给定平面中  $y$  方向的直线数。 $N_Z$  是  $z$  方向的直线数。若定义沿这些直线的位移为  $u_1, u_2, \dots, u_l$ ，在这些直线上， $y$  方向的位移对  $y$  的导数定义为  $v'_1, v'_2, \dots, v'_l$ ； $z$  方向的位移对  $z$  的导数定义为  $w'_1, w'_2, \dots, w'_l$ 。

$w|_j, w|_1, \dots, w|_j$ 。于是, 这些位移及其导数只是  $x$  的函数, 因为它们在  $x$  方向是变量。当采用这些定义时, 沿  $ij$  线的常微分方程可以写成

$$\frac{d^2 u_{ij}}{dx^2} + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \left[ -\left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right) u_{ij} + \frac{1}{h_x^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{h_y^2} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \right] + \frac{f_{ij}(x)}{2(1-\nu)} = 0$$

式中  $f_{ij}(x) = \frac{d^2 v}{dx^2} |_{ij} + \frac{d^2 w}{dx^2} |_{ij}$ ,  $v = \frac{dv}{dy}$  和  $w = \frac{dw}{dz}$

同理, 可以得到沿  $x$  方向的其它直线的微分方程, 在这个方向, 共有  $2l$  个这种二阶的常微分方程。

若把  $w$  的导数看作一组  $l$  个附加未知数, 即定义  $u_{2l+1} \equiv \frac{dw_1}{dx}$ ,  $u_{2l+2} \equiv \frac{dw_2}{dx}, \dots$  则  $l$  个二阶微分方程就简化为  $2l$  个一阶微分方程。用一个一阶的矩阵微分方程表示, 可写成

$$\frac{dU}{dx} = A_1 U + R(x)$$

式中  $U$  和  $R$  是  $2l$  个元的列阵,  $A_1$  是  $2l \times 2l$  个元的常系数矩阵。

用同样的方法作  $y$  和  $z$  方向的直线, 得

$$\frac{dV}{dy} = A_2 V + S(y), \quad \frac{dW}{dz} = A_3 W + T(z)$$

式中  $V, W$  和  $S, T$  分别是  $2m$  和  $2n$  个元的列阵,  $A_2, A_3$  分别是  $2m \times 2m$  和  $2n \times 2n$  个元的常系数矩阵。显然, 这是一组一阶的矩阵常微分方程, 但是, 它们不是独立的, 而是通过矢量  $R, S$  和  $T$  相联系, 系数矩阵  $A_1, A_2$  和  $A_3$  的各元都是常数, 仅与坐标增量和波桑比有关。

对于具有圆周边界的有限几何体, 可以采用圆柱坐标系的 Navier 方程

$$\left. \begin{aligned} (\nabla^2 / \partial r^2) + (1-2\nu) [(\nabla^2 r^2) u - 2r^2 (\partial u / \partial \theta)] &= 0 \\ r^{-1} (\partial^2 / \partial \theta^2) + (1-2\nu) [(\nabla^2 r^2) v + 2r^2 (\partial u / \partial \theta)] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$(\partial^2 / \partial z^2) + (1-2\nu) \nabla^2 w = 0$$

其中  $\nabla^2 = (\partial^2 / \partial r^2) + r^{-1} (\partial v / \partial \theta) + (u/r) + (\partial^2 / \partial z^2)$

同理, 它可离散成下列独立变量  $r, \theta$  和  $z$  的联立常微分方程组:

$$\frac{dU}{dr} = A_r(r) U + R(r), \quad \frac{dV}{d\theta} = A_\theta V + S(\theta), \quad \frac{dW}{dz} = A_z W + T(z)$$

式中矩阵  $U$  的元  $U_i$  定义为

$$U_1 = r u_1, U_2 = r u_2, \dots, U_l = r u_l$$

$$U_{l+1} = r^{-1} [d(r u_1) / dr], U_{l+2} = r^{-1} [d(r u_2) / dr], \dots, U_{2l} = r^{-1} [d(r u_l) / dr]$$

系数矩阵  $A_r(r)$  的元不再是常数, 而是  $r$  的函数, 但系数矩阵  $A_\theta$  和  $A_z$  仍为常数。

所有这些常微分方程组都可以用任意一种标准方法求解。对于直角坐标表达式

$$dU/dx = A_r(r) U + R(r)$$

其解可以写为  $U(r) = \Omega(A_r) U(r_0) + \Omega(A_r) \int_{r_0}^r [\Omega(A_r)]^{-1} R(\eta) d\eta$

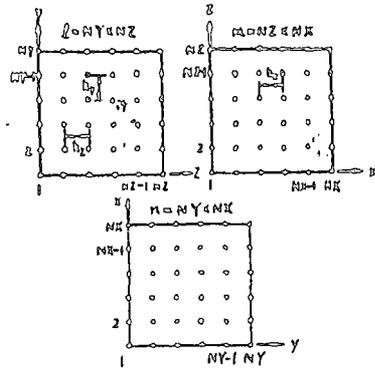


图3 平行于  $x, y$  和  $z$  坐标并垂直于对应的坐标平面的三组直线

式中  $U(0)$  是从边界条件确定的初始值矢量。而极坐标形式的常微分方程

$$\frac{du}{dr} = A_r(r) U + R(r)$$

由于它的系数不再是常数，求解就比较复杂；它可以表达为

$$U(r) = \Omega(A_r)U(r_0) + \Omega(A_r) \int_{r_0}^r [\Omega(A_r)]^{-1} R(\eta) d\eta$$

式中  $r_0$  是  $r$  的初始值，它可能为零，也可以不等于零。而矩阵  $\Omega(A_r)$  则为无穷矩阵积分级数如下：

$$\Omega(A_r) = I + \int_{r_0}^r A_r(\eta_1) d\eta_1 + \int_{r_0}^r A_r(\eta_2) d\eta_2 + \int_{r_0}^{\eta_2} A_r(\eta_1) d\eta_1 + \int_{r_0}^r A_r(\eta_1) d\eta_1 \int_{r_0}^{\eta_2} A_r(\eta_2) d\eta_2 + \int_{r_0}^{\eta_2} A_r(\eta_1) d\eta_1 \int_{r_0}^{\eta_2} A_r(\eta_2) d\eta_2 + \dots$$

这里，必须指出，所得的常微分方程组及其边界条件都是高度耦合的，直接计算它们的解通常是不可能的。因此，需要用逐步近似法来求解。一旦用逐步近似法算出体内的位移场，并且逐步近似的过程得收敛到则利用应力—位移方程可以直接得到应力分布，而剪应力则只能通过对于要求的位移梯度的有限差分近似来计算。此外，由于一个二阶的微分方程只能满足二个边界条件，而三维弹性力学问题在边界面的每一点处有三个边界条件。因此，有的边界条件必须拼入表面的直线微分方程。如将剪切应力的边界数据拼入表面直接的微分方程，正应力和位移条件即可确定齐次解的全部常数。

从现有的一些初步研究结果表明，直线分析法对于有限几何体的三维裂纹分析有相当大的潜力，它有可能推广应用到更为一般的三维裂纹问题；特别对于具有规则边界的裂纹体。文献 [83, 84] 计算了具有矩形表面裂纹的有限几何体的应力强度因子。对于半椭圆表面裂纹问题，如果改变裂纹面某些节点处的边界条件，也可以用直线法进行分析 [85]。

最后指出，在具体进行数值计算时，精度和效率往往是矛盾，解决矛盾的折衷办法是混合应用边界积分方程法和有限单元法，即 BIE/FEM 法。这种混合法，由于兼备两种方法的优点，将提供显著的应用灵活性 [20, 21]。不过，在现有的文献中，这种方法还仅限于在二维裂纹问题中的应用。此外，直接刚度有限单元和边界积分方程模型的结合，也曾在二维裂纹问题中有所应用。

本文承罗祖道教授审阅并提出不少宝贵意见，谨在此表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] Lexmoore, A. R. and Owen, D. R. J. (1978), Ed., Numerical methods in fracture mechanics, Proc. of the 1st Intern. Conf., Swansea, U.K.
- [2] Proceeding: Intern. Symp. on Innovative Numerical Analysis in Applied Engineering Science, Versailles - France.
- [3] Baker, C. T. H. (1977). The Numerical Treatment of Integral Equations Clarendon Press, Oxford.
- [4] Cruse, T. A. and Van Buren, W. (1971). Three-Dimensional Elastic Stress Analysis of a Fracture Specimen With an Edge Crack, Int. J. Fracture Mech., 7: 1-15.
- [5] Cruse, T. A., Meyers, G. J. and Wilson, R. B. (1977). Fatigue Growth of Surface Cracks, Flow-Growth and Fracture ASTM STP, 63L: 174-189.
- [6] Cruse, T. A. and Wilson, R. B. (1978). Advanced applications of BIE Methods, Nuclear Eng. and Design, 46, 1: 223-234.

- [7] Cruse, T. A. and Besner, P. M. (1975). Residual Life Prediction for Surface Crack in Complex Structural details, AIAA J. of Aircraft, 12, 4: 369—375.
- [8] Zienkiewicz, O. C. (1971). The Finite Element Method in Engineering Science, Second ed., McGraw-Hill Book Co., Inc.
- [9] Marcal, P. V. (1972). Three-dimensional finite element analysis for fracture mechanics, 《The Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions》, Ed. by Swedlow, J. L.: 187—202.
- [10] Tracey, D. M. (1974). Finite element for 3-D elastic crack analysis, J. Nuclear Eng. and Design, 26, 2: 282—290.
- [11] Schmitt, W., et al. (1976). Calculation of SIF of crack in nozzles, Int. J. Fracture, 12, 3: 381—390.
- [12] Blackburn, W. S. (1976). Calculation of SIF for straight cracks in grooved and ungrooved shafts, Engn. Fracture Mech., 8, 4: 731—736.
- [13] Reynen, J. (1976). On the use of F-E in fracture analysis of pressure vessel components, J. of pressure vessel technology, Trans. of the ASME, Series J, 98, 1: 8—16.
- [14] Foraythe, G. E. and Wasow W. R. (1960). Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc.  
偏微分方程的有限差分方法, 上海科学技术出版社, 胡祖炽、吴文达、陈永和译。
- [15] Ayres, D. J. (1970). A numerical procedure for calculating stress and deformation near a slit in a 3-D elastic-plastic solid, Engin. Fracture Mech., 2, 2: 37—106.
- [16] Chen, Y. M. and Wilkins, M. L. (1977). Numerical solutions of 3-D dynamic crack problems and simulation of dynamic fracture phenomena by a non-standard finite difference method, Inter. Symp. on Innovative Num. Analysis, in Applied Eng. Science, Versailles.
- [17] Faddeeva, V. N. (1974). The method of lines applied to some boundary problems, Trudy Mat. Inst. Steklov, 28: 73—103.
- [18] Jones, D. J., South, J. C. and Klunker, E. B. (1972). On the numerical solution of elliptic partial differential equations by the method of lines, J. of Comput. Phys., 9: 496—527.
- [19] Gyekenyesi, J. P. (1972). Solution of some mixed boundary-value problems of 3-D elasticity by the method of lines, Ph. D. Thesis, Michigan State University.
- [20] Cruse, T. A., Osias, J. R., and Wilson, R. B. (1976). Boundary-integral equation method for elastic fracture mechanics analysis, AD-A-027716.
- [21] Osias, J. R., Wilson, R. B. and Seitelman, L. H. (1977). Combined boundary-integral equation/finite element analysis of cracked solids, Intern. Symp. on Innovative Num. Analysis in Applied Eng. Science, Versailles, 1-103—1-106.
- [22] Ando, Y. and Yagawa (1977). Recent development in finite element method of 3-D crack problem in Japan, proc. of an Inter. Conf. on fracture mechanics and Technology, Held at the Convention Centre, Hong Kong, Vol II, 1513—1528.

- [23] Miyamoto, H. and Miyoshi, T. (1971), Analysis of SIF for surface-flawed tension plate, high speed computing of elastic structure, Proc. of Symp. of IUTAM Univ. de Liege: 137—155.
- [24] Hellen, T. K. and Blackburn, W. S. (1975), Calculation of SIF for combined tensile and shear loading, Intern. J. of Fracture, 11: 605—617.
- [25] Hellen, T. K. and Blackburn, W. S. (1975), The calculation of SIF in 2 and 3-D using F-E, Computational Fracture Mechanics, E. F. Rykicki and S. E. Benzley, ed., ASME: 102—119.
- [26] Hilton, P. D., Kiefer, B. V. and Sih, G. C. (1978), Specialized finite element procedures for 3-D crack problems, Proc. of the 1st Intern. Conf., Swansea: 411—421.
- [27] Hilton, P. D. (1977), The 3-D finite element method specialized to crack problems, in Mechanics of Fracture, vol. II, plates and Shells with Cracks (G. C. Sih, ed.), Noordhoff: 273—297.
- [28] Tracey, D. M. (1973), 3-D elastic singularity element for evaluation of k along an arbitrary crack front, Inter. J. of Fracture, 9: 340—343.
- [29] Levy, N., Marcol, P. V. and Rice, J. R. (1971), Progress in 3-D elastic-plastic stress analysis for fracture mechanics, J. Nuclear Eng. and Design, 17: 64—75.
- [30] Marcol, P. V. (1972), 3-D finite element, analysis for fracture mechanics, The Surface crack: Physical Problems and Computational Solutions, Ed. by Swedlow, J. L.; 187—202.
- [31] Levy, N. and Marcol, P. V. (1971), 3-D elastic-plastic stress and strain analysis for fracture mechanics, Phase II: Improved Modeling, Brown University Engineering Report HSST-IR-17.
- [32] Raju, I. S. and Newman, J. C. Jr. (1979), Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates, Eng. Fracture Mech., 11, 4: 815—827.
- [33] Raju, I. S. and Newman, J. C., Jr. (1978), SIF for corner cracks at the edge of a hole, NASA Technical Memorandum, NASA 35 TM-78728.
- [34] Raju, I. S. and Newman, J. C., Jr. (1977), Improved SIF for semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plate, NASA TMX-72825.
- [35] Hechmer, J. L. and Bloom, J. M. (1977), Determination of SIF for the corner-cracked hole using the isoparametric singularity element, Intern. J. of Fracture (oct.)
- [36] Barsoum, R. S. (1976), On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, Intern. J. for Numer. Methods Engn., 10, 1: 25—37
- [37] Raju, I. S. and Newman, J. C., Jr. (1977), 3-D finite element analysis of finite-thickness fracture specimens, NASA Technical Note, NASA TND-8414, 42
- [38] Hellen, J. K. (1975), On the method of virtual crack extensions, Intern. J. for Numer. Method in Engn., 9, 1: 187—207

- [39] Parks, D. M. (1975), A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors, Intern. J. of Fracture, 10, 4.
- [40] Pian, T. H. H. and Moriya (1978), 3-D fracture analysis by assumed stress hybrid elements, «Numerical Methods in Fracture Mechanics» Proc. of the 1st Intern. Conf., Editors. Luxmoore, A. R. and Owen, D. R. J.: 363—373
- [41] Tong, P. and Altur, S. N. (1977), On hybrid finite-element technique for crack analysis, Proc. of and Intern. Conf. on Fracture Mechanics, and Technology, Held at the Convention Centre, Hong Kong: 21—25
- [42] Kathiresan, K. (1976), 3-D linear elastic fracture mechanics analysis by a displacement hybrid finite element model, Ph. D. Thesis, Georgia Institute of Technology.
- [43] Atluri, S. and Kathiresan, K. (1975), An assumed displacement Hybrid finite element model for 3-D linear — fracture mechanics analysis, Proc. 12th Annual meeting of the Society of Eng. Science, Univ. of Texas, Austin, Texas: 391—399
- [44] Apostol, M. C., Jordan, S. and Marcal, P. V. (1975), F-E technique for postulated flaw in shell structures, EPRI SR-22, Special Report, Electric power Research Institute, Palo Alto.
- [45] Atluri, S. N., Kobayashi, A. S. and Nakagaki, M. (1975), An assumed displacement hybrid finite element method for fracture mechanics, Intern. J. of Fracture, 11: 257—271
- [46] Yamamoto, Y. and Tokuda, N. (1973), Determination of SIF in cracked plate by the finite element method, Intern. J. for Num. Methods Engn., 6: 427—439
- [47] Yamamoto, Y. and Sumi, Y. (1976), SIF for 3-D cracks, Paper Present at the 14th Intern. Cong. on Theor. and Applied Mechanics, Delft.
- [48] Yamamoto, Y. and Sumi, Y. (1978), SIF for 3-D cracks, Intern. J. of Fracture, 14,1: 17—38
- [49] Bartholomew, P. (1976), Solution of elastic crack problems by superposition of FE and singular fields, RAE Technical Report, 76165
- [50] Yagawa, G., Nishioka, T., Ando, Y. and Ogura, N. (1975), The FE calculation of SIF using superposition, Computational Fracture Mechanics, E. Rybicki and S. Benzley, eds., ASME Special Publication: 21—34
- [51] Nishioka, T., Yagawa, G., Ogura, N. and Ando, Y. (1976), The FE analysis of SIF for 3-D through-wall cracks, Preprint of JSME, 760-12 10—12
- [52] Yagawa, G. and Nishioka, T. (1977), A finite element analysis of SIF for semicircular surface cracks, Preprint of JSME, 770-11: 1—3
- [53] Yagawa, G. and Nishioka, T. (1978), 3-D finite element analysis for through-wall crack in thick plate, Intern. J. for Num. methods Engn., 12, 8: 1295—1310
- [54] Yagawa, G., Nishioka, T. and Ando, Y. (1975), Nucl. Engin. and Design, 34: 247—254

- [55] Murakami, Y. (1976), A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method, *Engin. Fracture Mech.*, 8,4: 643—655
- [56] Murakami, Y. and Okazaki, Y. (1976), A simple procedure for the accurate determination of SIF by FEM, *Preprint of JSME*, 760-13: 104—111
- [57] Murakami, Y. (1978), A simple procedure for the accurate determination of SIF by FEM, *proc. of the 1st Intern. Conf.*, Editors A. R. Luxmoore and D. R. J. Owen; 322—335
- [58] Miyata, H. and Kusumoto, S. (1975), A method of evaluation of 3-D SIF using the FEM, *Paper Presented at the 1975. Joint JSME—ASME Applied Mechanics Western Conf. Honolulu*
- [59] Yagawa, G., Ichimiya, M. and Ando, Y. (1976), An analysis method of SIF based on discretization error in F-E technique, *Preprint of JSME*, 760-127—9
- [60] Yagawa, G., Ichimiya, M. and Ando, Y. (1977), F-E analysis of 3-D SIF based on discretization error, *Prelim. Proc. JSME*, 770-1: 29—36
- [61] Yagawa, G., Ichimiya, M. and Ando, Y. (1978), Two- and three-dimensional analysis of SIF based on discretization error in finite elements, *Proc. of the 1st Intern. Conf.*, Editor S. A. R. Luxmoore and D. R. J. Owen; 249—267
- [62] Carmichael, G. D. T. (1971), The application of 3-D F-E to the analysis of propped boiler type prestressed concrete pressure vessels, *J. Nucl. Engn. and Design*, 16: 35—44
- [63] Hellen, T. K. and Dowling, A. R. (1975), 3-D crack analysis applied to an LWR nozzle-cylinder intersection, *Intern. J. of Pressure Vessels and Piping*, 3, 1: 57—74
- [64] Blackburn, W. S. and Hellen, T. K. (1977), Calculation of SIF in 3-D by FEM, *Intern. J. for Numer. Methods in Engn.* 11, 2: 211—229
- [65] Blackburn, W. S. and Hellen, T. K. (1974), Calculation of SIF for elliptical and semi-elliptical cracks in blocks and cylinders, *Central Electricity Generating Board.*, RD/B/N 3103, July.
- [66] Blackburn, W. S. and Hellen, T. K. (1977), F-E stress intensity evaluations in two and three dimensions, *«Fracture Mech. in Engr. Practice»*, Ed. by P. Stanley; 97—112
- [67] Rizzo, F. J. (1967), An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatic, *Quarterly of Applied Mathematics*, 25: 83—95 (《边界积分方程应用译文集》, 上海交通大学技术情报室, 1979, 2: 70—86)
- [68] Cruse, T. A. (1969), Numerical solutions in three-dimensional elastostatics, *Intern. J. of Solids and Structure*, 5: 1259—1274 (《边界积分方程应用译文集》, 上海交通大学技术情报室, 1979, 2: 52—60)
- [69] Cruse, T. A. (1973), Application of the BIE method to 3-D stress analysis, *Computers and Structure*, 3: 509—527

- [70] Cruse, T. A. and Rizzo, F. J. (editors) (1975), BIE Method Computational Applications in Applied Mechanics, ASME AMD-11, 31, New York (《边界积分方程应用译文集》, 上海交通大学技术资料情报室, 1979, 2: 9—27)
- [71] Cruse, T. A. (1974), An improved BIE method for 3-D elastic stress analysis, J. of Computers and Structure, 4, 4: 741—754 (《边界积分方程应用译文集》, 上海交通大学技术资料情报室, 1979, 2: 87—104)
- [72] Lachat, J. C. and Watson, J. O. (1975), A second generation BIE program for 3-D elastic analysis, ASME Conf. on Integral Equation Methods, New York 23, 5
- [73] Cruse, T. A. (1970), Lateral constraint in a cracked 3-D elastic body, Intern. J. of Fracture Mech., 6, 3: 326—328
- [74] Cruse, T. A. (1972), Numerical evaluation of elastic SIF by the BIF methods, 《The surface Crack: Physical Problem and Computational Solutions》, ASME, New York (《边界积分方程应用译文集》, 上海交通大学技术资料情报室, 1979, 2: 29—51)
- [75] Cruse, T. A. (1975), Elastic fracture mechanics analysis for 3-D cracks, Proc. of the Symp. on Advanced Analysis Methods for Fracture Mechanics, ASCE
- [76] Cruse, T. A. and Meyers, G. J. (1977), 3-D fracture mechanics analysis, J. of the Structural Division, Proc. ASCE, 103, ST2: 309—320
- [77] Rzasnichi, W. and Mendelson, A. (1975), Application of BIE method to elastoplastic analysis of V-notched beams, Intern. J. Fracture, 11, 2: 329—342
- [78] Makoto Irobe (1968), Method of numerical analysis for 3-D elastic problems, Proc. of the Japan National Congress for Applied Mechanics, Central Scientific Publ: 1—7
- [79] Gyekenyesi, J. P., Mendelson, A. and Kring, J. (1973), 3-D elastic stress and displacement analysis of tensile fracture specimens containing cracks, NASA TND-7231
- [80] Gyekenyesi, J. P., Mendelson, A., and Kring, J. (1973), 3-D elastic stress and displacement analysis of finite circular geometry solids containing cracks, NASA TMD-7266
- [81] Gyekenyesi, J. P. and Mendelson, A. (1974), 3-D elastic stress and displacement analysis of finite geometry solids containing cracks, Presented at the Seventh U. S. National Congress of Applied Mechanics, Boulder Colorado.
- [82] Gyekenyesi, J. P. and Mendelson, A. (1975), 3-D elastic stress and displacement analysis of finite geometry solids containing cracks, Intern. J. Fracture, 11, 3: 409—429
- [83] Gyekenyesi, J. P. and Mendelson, A. (1975), Stress analysis and SIF for finite geometry solids containing rectangular surface cracks, Technical paper to be presented at Winter Annual Meeting of the ASME, Houston, Texas; NASA TMX-77694.
- [84] Gyekenyesi, J. P. and Mendelson, A. (1977), Stress analysis and SIF for finite geometry solids containing rectangular surface cracks, J. of Applied Mech., Trans. ASME, series E, 44, 3: 442—448.
- [85] Kring, J., Gyekenyesi, J. and Mendelson, A. (1977), 3-D elastic stress and displacement analysis of finite geometry solids containing cracks, NASA TM-73717