

陀螺力学中的非线性振动方法*

上海交通大学工程力学系 刘延柱

研究陀螺仪的力学发源于古典刚体动力学,由于实际陀螺仪表的结构和力学模型日趋复杂,严格的解析方法逐渐被各种近似分析方法所取代,使陀螺力学区别于古典刚体动力学而形成独立的力学分支。本世纪初开始建立起来的陀螺仪线性理论和章动理论已发展得十分完善,成为指导各类陀螺仪表设计的理论基础。但随着技术的发展,陀螺力学中的非线性问题愈来愈显示出重要性,因为

1. 各类陀螺仪表都可能存在轴承干摩擦,或带有开关、死区、饱和、滞环等本质非线性特征的力矩器。

2. 随着精度要求的提高,线性理论中被忽略了非线性项对运动的细微影响日益变得不可忽视。

3. 静电场、磁场或流体场支承的自由转子陀螺仪的出现伴随着转子不受约束的大幅度运动。

考虑非线性因素的陀螺运动是一种特殊形式的非线性振动。近二十年来,各种非线性振动方法,包括几何方法或解析方法在陀螺力学中广泛使用,给这门比较古老的力学学科注入了新的内容。本文概述这方面的进展情况,并介绍刚体定点运动的一阶正规形微分方程组在处理自由转子陀螺仪非线性问题中的应用情况。

一、几何方法

顶点轨迹(或陀螺尖轨迹)是陀螺力学用以形象地描绘陀螺仪运动特征的几何工具。进动理论所确定的顶点轨迹正是一阶自治系统的相轨迹。

设 α, β 为陀螺的内外环偏角, H 为转子动量矩,转子上的力矩分量 M_x, M_y 只与位置有关且不显含时间变量时,陀螺的进动方程为

$$H\dot{\alpha} = -M_y(\alpha, \beta), \quad H\dot{\beta} = M_x(\alpha, \beta) \quad (1)$$

将以上二式相除,得到一阶常微分方程

$$d\beta/d\alpha = -M_x(\alpha, \beta)/M_y(\alpha, \beta) \quad (2)$$

方程(2)的奇点对应于陀螺的平衡位置,不同的奇点类型对应于平衡位置附近顶点轨迹的不同类型。因此只要正确判断各个奇点的类型,就能定性确定陀螺顶点轨迹的几何性质,从而避免寻求方程(2)解析积分的困难。以线性理论为例[9]:

无阻尼陀螺摆或罗经——中心

径向修正陀螺垂直仪——稳定结点

带阻尼陀螺摆或罗经——稳定结点或焦点

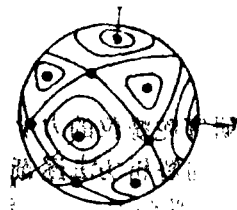
对于非线性情形,上述相平面法是分析自由转子陀螺全局运动图画的有效工具。在全局范围内找出方程(2)的全部奇点,逐个判断每个奇点的类型,则全局范围内的陀螺顶点轨迹的几何特征即完全确定。图1为考虑转子离心变形静电陀螺仪的典型奇点分布,全局范围内共

* 1980年10月30日收到。

有 26 个奇点, 其中 14 个中心, 12 个鞍点

[8, 21]。

利用相平面法分析各种本质非线性力矩作用下的陀螺运动则有更早得多的历史 [2]。



图

二 解析方法

陀螺力学中的近似解析方法建立在对陀螺仪实际运动的观测基础上, 陀螺的定轴性和进动性是最初级的观测结果:

现象 A 无定向陀螺极轴保持惯性空间中确定的方位, 力矩作用下极轴在惯性空间中缓慢地进动。

较精确的手段可观测到陀螺的章动:

现象 B 陀螺极轴在平均位置附近作高频微幅章动, 无定向陀螺极轴的平均位置保持惯性空间中确定的方位, 力矩作用下极轴的平均位置在惯性空间中缓慢地进动。

随着精度要求和量测技术的提高, 观测到更精细的陀螺章动漂移现象:

现象 C 无定向陀螺极轴在平均位置附近作高频微幅章动, 同时极轴的平均位置在惯性空间中缓慢地漂移。

上述各种不同精度水平的观测现象对应于逐次近似法的不同近似程度。1932年 Кривош 以现象 A 为零次近似, 现象 B 为一次近似, 在线性理论范围内计算陀螺摆的章动规律 [1]。1955年 Magnus 以现象 C 为二次近似, 考虑运动方程的非齐次项, 计算无定向陀螺的章动漂移, 导出 Magnus 公式 [10]。以现象 A 为零次近似, 还可计算载体角振动引起的陀螺漂移及其它动力学问题 [4, 9]。

动力调谐陀螺仪是一种内卡尔丹环式的弹性支承陀螺仪。由于组成陀螺仪的全部构件都参与高速旋转, 这种陀螺仪的力学原理比一般框架陀螺仪复杂得多。利用逐次近似法, 以陀螺定轴性为零次近似, 计算平衡环的振动规律及由此产生的对转子的力矩作用, 可求出转子在平衡环力矩作用下的一次近似进动规律和二次近似章动规律 [23]。

逐次近似法往往与平均法概念同时使用, 这是由于陀螺仪的自旋或章动角速度远远高于进动角速度, 以自旋或章动频率周期变化的外部作用对陀螺进动的影响可用其平均效果完全等效地代替。Ишлинский 以不同时间尺度为依据, 提出在分析陀螺仪及受控载体之间的相互动力学作用时可遵循以下原则: 讨论陀螺仪的进动时忽略载体受控运动的过渡过程, 讨论载体的受控运动时忽略陀螺仪的进动 [3]。

几乎与 Magnus 同时, Plymale 和 Goodstein 用小参数法独立地推出与 Magnus 相同的结果 [11, 12]。他以框架受瞬时扰动后的起始角速度或经常扰动的幅值作为小参数 ε , 其零次、一次、二次近似分别与上述现象 A, B, C 相对应, 但计算过程比较繁琐。

小参数法也用于解决自由转子陀螺 [8, 14] 或弹性支承陀螺 [21, 25] 的动力学问题。后者使用了双重时间尺度, 引入尺度缩小的时间变量 $\tau = \varepsilon t$ 以避免长期项困难, 导出动力调谐陀螺章动运动的稳定性条件和章动漂移公式。

有时小参数法在线性理论中也能找到用武之地。例如计算摆式罗经第二类冲击误差时,

如将摆的偏置角 ε 取作小参数, 可使冗长的计算工作变得十分简便 [9]。

除逐次近似法或小参数法以外, *Magnus* 公式也可用其它近似解析方法导出。对于考虑安装误差、转子动静不平衡、框架弹性变形、轴承摩擦、基座振动等实际条件下的框架陀螺章动漂移问题, 涌现出大量文献, 采用各种近似解析方法导出漂移计算公式。文献 [16, 19] 详尽地综述了这个领域内的研究成果。

1962年Слезкин 提出用 Крылов - Боголюбов 渐近法处理以下普遍形式的陀螺运动方程组 [13]:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \dot{\beta} &= \varepsilon f_1(\ddot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}, \beta, \alpha, \beta) \\ \dot{\beta} - \dot{\alpha} &= \varepsilon f_2(\ddot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}, \beta, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (3)$$

其一次近似与平均法等同。虽然更高次的近似往往伴随着繁琐的计算过程, 但原则上使用渐近法可得到任意精确程度的近似解。在关于框架陀螺章动漂移的文献中, 渐近法的使用也十分普遍。

三、刚体定点运动的正规方程组

1965年Белёцкий分析轴对称自旋卫星绕质心转动规律时, 建立动量矩坐标系 (XYZ) , Z 轴与刚体的动量矩矢量 \vec{H} 重合。以动量矩的模 H 及相对惯性坐标系的角度坐标 α, β , 以及刚体相对 (XYZ) 的 Euler 角 ψ, ϑ, φ 作为六维相空间中的相坐标, 导出与 Lagrange 行星摄动方程类似的一阶正规形微分方程组 [5, 6, 9]:

$$\begin{aligned} H &= M_z, & \dot{\alpha} &= -\frac{1}{H \cos \beta} M_y, & \dot{\beta} &= \frac{1}{H} M_x, \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{1}{H} (M_x \sin \psi - M_y \cos \psi) \\ \dot{\psi} &= \frac{H}{A} - \frac{1}{H} [M_x \operatorname{ctg} \vartheta \cos \psi + M_y (\operatorname{ctg} \vartheta \sin \psi - \operatorname{tg} \rho)] \\ \dot{\varphi} &= -H \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C} \right) \cos \vartheta + \frac{1}{H \sin \vartheta} (M_x \cos \psi + M_y \sin \psi) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 A, C 为刚体的赤道惯性矩和极惯性矩, M_x, M_y, M_z 为刚体的外力矩对 (XYZ) 的投影。方程组 (4) 与传统的 Euler 方程相比, 无论对近似解析分析或数值积分都具有明显优点, 因此也被用来分析自由转子陀螺仪以代替 Euler 方程。

无力矩作用时, 从方程组 (4) 直接得到 $H, \alpha, \beta, \vartheta, \psi, \varphi$ 的常数解, 陀螺极轴围绕指向不变的动量矩矢量作频率为 H/A 的 Euler-Poinsot 运动, 或自然规则进动。有微弱力矩作用时, 陀螺的运动仍具有自然规则进动的特征, 但各运动参数 $H, \alpha, \beta, \vartheta, \psi, \varphi$ 随时间缓慢变化, 称为拟自然规则进动。这时 6 个相坐标可区分为两组: $H, \alpha, \beta, \vartheta$ 为慢变量, ψ 或 φ 为快变量。利用平均法, 将正规方程组 (4) 中前四个方程右端的项以对快变量 ψ 或 φ 的平均值代替, 计算各慢变量的摄动规律。其中 H 的变化反映转速的增长或衰减过程, α, β 的变化为陀螺的漂移过程; ϑ 的变化则表示陀螺的章动阻尼过程。

利用正规方程组可成功地处理有质量偏心的非轴对称陀螺的运动 [15], 静电陀螺仪在磁场中的运动 [24], 转子质心运动与绕质心转动互相耦合的带有径向质量偏心的静电陀螺的运动 [17, 18], 以及振动载体上自由转子陀螺接近谐振状态的运动 [20], 后者除上述相坐标外还对不同的谐振状态增加不同的慢变参数。

参 考 文 献

- [1] Крылов, А. Н., Крутков, Ю. А. (1932), Общая теория гироскопов, Изд. АН СССР, Л.
- [2] 柯兹洛夫 (1959), 航空陀螺仪原理, 国防工业出版社.
- [3] 依希林斯基 (1973), 陀螺系统力学, 科学出版社.
- [4] 陆元九 (1964), 陀螺及惯性导航原理 (上册), 科学出版社.
- [5] Белецкий, В. В. (1965), Движение искусственного спутника относительно центра масс, «Наука», М.
- [6] Leimanis E. (1965), The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point, Springer, Berlin.
- [7] Magnus, K. (1971), Kreisel, Theorie und Anwendungen, Springer, Berlin.
- [8] 刘延柱 (1979), 静电陀螺仪动力学, 国防工业出版社.
- [9] 刘延柱 (1980), 陀螺动力学, 上海交通大学讲义.
- [10] Magnus, K. (1955), Beiträge zur Dynamik des kraftfreien Kardansch gelagerten Kreisel, Z. Angew. Math. und Mech., 35, 1/2.
- [11] Plymale, M. T., Goodstein, R. (1955), Nutation of a free gyro subjected to an impulse, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 22, 3.
- [12] Goodstein, R. (1959), A perturbation solution of the equations of motion of a gyroscope, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 26, 3.
- [13] Слезкин, Л. Н. (1962), О применении асимптотических методов к исследованию гироскопических систем, ДАН СССР, 147, 1.
- [14] Данилин, В. П., Мартыненко, Ю. Г., Новожилов, И. В. (1970), Зависимость времени выбета электростатического гироскопа от дебаланса ротора, Изв. АН СССР, МТТ, 2.
- [15] Климов, Д. М., Космодемьянская, Г. Н., Черноусько, Ф. Л. (1972), О движении гироскопа с неконтактным подвесом, Изв. АН СССР, МТТ, 2.
- [16] Бутенин, Н. В., Климов, Д. М., Луц, Я. Л., Степаненко, Н. П. (1973) Нелинейные задачи теории гироскопических систем, «Развитие механики гироскопических инерциальных систем»: 379—401.
- [17] Мартыненко, Ю. Г. (1974), Движение несбалансированного гироскопа с неконтактным подвесом, Изв. АН СССР, МТТ, 4.
- [18] Бирючков, В. Г., Мартыненко, Ю. Г. (1976), Уходы несбалансированного гироскопа в неравновесном электростатическом подвесе, Изв. АН СССР, МТТ, 6.
- [19] Ishijinsky, A. Yu. (1977), On mechanics of gyroscopes in gimbal suspensions, «Dynamics of Multibody Systems Symposium, Munich»: 87—96.
- [20] Мартыненко, Ю. Г., Савченко, Т. А. (1977), Резонансные движения гироскопа с неконтактным допвешением, подвесом на вибрирующем основании, Изв. АН СССР, МТТ, 6.
- [21] Fox, C. H. J., Burdess, J. S. (1978), The dynamics of a Hooke's joint gyroscope with Non-orthogonal Flexure axes, J. Mech. Engng Sci., 20, 2.
- [22] 刘延柱 (1978), 静电陀螺仪大范围漂移运动, 上海交通大学学报, 1.
- [23] 刘延柱 (1979), 动力调谐陀螺仪动力学, 上海交通大学学报, 2.
- [24] 洪嘉振 (1980), 静电陀螺仪在磁场中的运动, 上海交通大学研究生毕业论文.
- [25] 刘延柱 (1980), 动力调谐陀螺仪的章动运动, 上海交通大学科技资料, 81489.