

船舶兴波理论

六机部七院702 研究所 陈静剑

提 要

本文评述了船舶兴波理论的发展概况,及其在船舶工程设计中的应用情况。讨论了船舶兴波理论研究的难点。指出了船舶兴波问题理论与试验研究相结合的重要性,波形测量分析工作的意义,有限元数值计算方法在船舶兴波非线性理论中的发展,并讨论了粘性流体兴波理论中的碎波理论和奇异波理论。

一、前 言

1871年付汝德首先建造了 $35 \times 14 \times 4$ 米的试验水池,开创了船舶兴波阻力的试验研究道路。1893年Mechelli提出了计算船舶兴波阻力的薄船理论,开创了理论研究船舶兴波阻力的道路。此后,船舶兴波理论始终沿着试验研究和理论研究两条道路平行地发展,并且不断地相互影响。本世纪50年代末日本东京大学乾崇夫创立了波形测量的研究方法以后,二者的结合更为密切。由于船舶的试验研究需要昂贵的经费,周期长,通常都是在确定了船形的船模上试验,因此人们常期待分析研究能发挥作用。但是几乎直到本世纪60年代前,船舶兴波理论一直被视为仅仅是理论探讨性的研究工作,用来进行研究的数学船型或最佳船型与实际使用的船舶线型差距很大。广大造船工程师对它的兴趣不是很大。船舶快速性研究的主要途径仍然依赖于试验。

电子计算机和数值计算方法的发展,使人们对船舶兴波阻力问题的理论计算寄予很大的希望。但目前为解决实际问题时还存在不少困难,还不能很好地定量预估实际船舶的阻力,在设计实践中的应用也不很多。然而可以看出,虽然可用于设计实践中的完整理论尚未完成,但其萌芽已在成长。特别是随着波形测量分析这种半试验半理论方法的发展和推广应用,以及球鼻、极小兴波阻力等实用性理论的迅速发展,兴波阻力理论被看作纯理论性探讨的局面正在扭转。看来,船舶兴波理论对船型设计起重要作用的时代即将到来。1976年2月在日本召开的国际波浪阻力会议^[1]检阅了这方面的成果。

兴波理论研究的困难,首先在于难以确定兴波阻力的值。目前还不能从水池中直接测量到兴波阻力值。人们已通过尾流测量的分析获得粘性阻力,通过波形测量的分析获得波形阻力,期望通过测量分析得到的这两部分阻力之和能与水池常规拖曳试验所测量得到的船模总阻力相等。但是正象第15届国际拖曳水池会议阻力委员会所统计的,目前世界各国水池对波形测量和尾流测量所分析得到的阻力分量之和低于所测得的总阻力约5—10%。分析其原因,除了粘性、碎波以及尾流所产生的波对自由波的影响之外,兴波阻力在理论上的确切定义还尚未完成,也对这一问题的解决带来一定的影响。

兴波理论分析的另一个困难,在于自由表面绕流问题难于在数学上处理。特别对于非线性自由边界的边值问题,即使应用电子计算机计算,目前也仅能对简单的自由边界用半经验

* 1980年8月11日收到。

方法进行处理。兴波现象是范围广、形状复杂的自由边界问题。近年来虽然在非线性波理论方面有了较大的发展,但是在船舶兴波理论中还未见到应用。看来,对船波及波浪阻力的研究,还需要继续提出更合适的力学模型和数学方法。

二、基本假设和基本方程

目前兴波理论的绝大多数工作是依据理想流体位势理论展开的。其首要前提是著名的付汝德假设,即把船舶在静水中匀速前进所受到的水阻力分成仅依赖于雷诺数 Re 和仅依赖于付汝德数 Fr 的两部分。于是兴波阻力可视为与流体粘性无关而作为理想流体求得。

除了付汝德假设外,还假定流场是均匀不可压的,运动是定常无旋的,船体没有纵倾和升沉。用这样的理论计算获得的结果,需要通过试验来检验其正确性。一旦发现有较大的差异,除了应该分析计算方法中的误差外,还应该分析其假设的近似性。

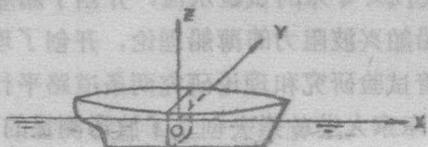


图1 船体坐标系

船体坐标系见图1,原点在船体中心线的中央静水表面处, X轴为船前进方向, Y轴为船宽方向, Z轴垂直向上。设船速为 U , 船体表面方程为 $y = \pm f(x, z)$, 自由表面为 $z = \zeta(x, y)$, 于是绕船体流动的扰动速度势 ϕ 满足拉普拉斯方程 $\Delta\phi = 0$, 而扰动速度向量 $(u, v, w) = -\text{grad } \phi$, 整个流场速度势为 $\Phi = Ux + \phi$ 。在船体表面上的运动学边界条件为

$$\left(u + \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

在自由表面上除了运动学边界条件

$$\left(u + \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

外,还必须满足动力学边界条件

$$\frac{1}{2}U^2 = g\zeta + \frac{1}{2} \left[\left(u + \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 \right]. \quad (2.3)$$

若令 $P = \left(u + \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2$, 并对(2.3)关于 x 和 y 求偏导数后解出 $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$; 代入(2.2)得到

$$2g \frac{\partial\phi}{\partial z} + \left(u + \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

这是自由表面精确的非线性边界条件,它的物理意义表明在自由表面上压力 $\rho g z + \frac{1}{2}P$ 的实质微商处处为零。

自由表面上的边界条件(2.4)的非线性以及满足该边界条件的边界位置在求解前是未知的,使得这值问题成为极其困难的数学问题,目前都必须对它进行近似处理来求解。

除了船体表面边界条件(2.1)和自由表面边界条件(2.4)外,还必须满足无穷远前方无波条件以及水底运动学边界条件。

三、理想流体线性兴波理论及其应用

线性兴波理论, 即对非线性自由表面边界条件 (2.4) 作线性化近似的理论, 发展得最早, 研究得最多。其中主要有两个学派: 以英国数学家 Havelock 为代表的学派和以苏联 Коши 为代表的学派。50 年代起以 Weiblum 为代表的一些学者开始重视线性兴波理论的实际应用。目前, 在乾崇夫所倡导的波形测量和镜像体理论的基础上发展起来的实用兴波理论 [2], 已受到广泛重视和发展。

1. 线性化自由表面条件和 Havelock 兴波理论 [3]

为了对波面条件 (2.4) 进行线性化处理, 必须作如下的微波假设: 船舶所兴起的波的波幅与波长相比是个小量; 船体的扰动速度与均匀来流速度相比是个小量。略去高阶小量后即得线性化自由表面边界条件

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \text{在 } z=0 \text{ 上} \quad (2.5)$$

其中 $K_0 = g/U^2$, 而波高由下式计算:

$$\xi = -\frac{U}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=0}$$

在流体力学绕流问题中, 通常采用源汇、偶极子和涡等奇点分布来表示物体。在线性兴波理论中采用 Havelock 源来代替无界流场中的 Rankine 源。它是满足线性兴波边值问题中除了船体表面边界条件外所有其他条件的基本解。分布在 (x_1, y_1, z_1) 点上单位强度的 Rankine 源的格林函数为 $G(x, y, z; x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{r} = 1/\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$ 利用零阶贝塞尔函数拉普拉斯变换的李普希兹公式重新表达后, 可以求得 Havelock 源的格林函数为

$$G(x, y, z; x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty \frac{k}{k - K_0 \sec^2 \theta} \exp[k(z+z_1)] \cos[k(x-x_1)] \cdot \cos \theta \cdot \cos[k(y-y_1) \sin \theta] dk - 2K_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp[K_0(z+z_1) \sec^2 \theta] \sin[K_0(x-x_1) \sec \theta] \cdot \cos[K_0(y-y_1) \sin \theta \cdot \sec^2 \theta] \sec^2 \theta d\theta \quad (2.6)$$

其中 $1/r'$ 表示分布在 $(x_1, y_1, -z_1)$ 点上单位强度的 Rankine 源, (2.6) 在远后方的渐近式为

$$G \approx -4K_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp[K_0(z+z_1) \sec^2 \theta] \sin[K_0(x-x_1) \sec \theta] \cos[K_0(y-y_1) \sin \theta \sec^2 \theta] \times \sec^2 \theta d\theta \quad (2.7)$$

利用上述 Havelock 源, 以一定的强度 $\sigma(x_1, y_1, z_1)$ 分布在某一曲面 S 上, 即得扰动速度势

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(x_1, y_1, z_1) G(x, y, z; x_1, y_1, z_1) ds \quad (2.8)$$

其中未知的源强分布 σ 需满足绕流条件

$$\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial n} \right]_{\Sigma} \sigma(x, y, z) G(x, y, z; x_1, y_1, z_1) ds \Big|_{z=+j(x, z)} = -U \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.9)$$

根据理想流体动量变化定理可知,兴波阻力由远后方流动状况确定。船舶兴波可以分成两部分: $\zeta(x, y) = \zeta_e(x, y) + \zeta_f(x, y) + \zeta_g(x, y)$, $\zeta_e(x, y)$ 为局部波系,集中在船体附近随着船体一起前进, ζ_f 为自由波系,从船后一直传播到很远,该波系随船舶向前航行向前延伸,其能量来自于船舶对它所作的功,即兴波阻力的反作用力对流体所作的功,所以理想流体兴波理论仅关心自由波系的性质,波动速度势也只关心远后方的渐近形式。(2.9)中的格林函数 G 用(2.7)来代替后得到

$$\phi \approx -\frac{K_0}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [P \sin(K_0 p \sec^2 \theta) - Q \cos(K_0 p \sec^2 \theta)] \exp(K_0 z \sec^2 \theta) \sec^2 \theta d\theta \quad (2.10)$$

其中:

$$\left. \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right\} = \int_{\Sigma} \sigma \frac{\cos}{\sin} \{K_0 p_1 \sec^2 \theta\} \exp(K_0 z_1 \sec^2 \theta) ds.$$

$$p = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$p_1 = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta, \text{ 自由波系为}$$

$$\zeta_f(x, y) = \frac{K_0}{\pi U} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [p \cos(K_0 p \sec^2 \theta) + Q \sin(K_0 p \sec^2 \theta)] \sec^2 \theta d\theta \quad (2.11)$$

从动量变化定理和富里哀积分定理导得 [4.5]:

$$R = \frac{\rho K_0^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [P^2(\theta) + Q^2(\theta)] \sec^3 \theta d\theta \quad (2.12)$$

若把自由波系表示为

$$\zeta_f(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [S(\theta) \sin(K_0 p \sec^2 \theta) + C(\theta) \cos(K_0 p \sec^2 \theta)] d\theta \quad (2.13)$$

则兴波阻力为

$$R = \frac{1}{2} \rho U^2 \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [S^2(\theta) + C^2(\theta)] \cos^3 \theta d\theta \quad (2.14)$$

其中波幅函数

$$S(\theta) = \frac{K_0}{\pi U} \sec^3 \theta \cdot Q(\theta), \quad C(\theta) = \frac{K_0}{\pi U} \sec^3 \theta \cdot P(\theta).$$

(2.13) 表明自由波系是基元波 (图 2) 的线性叠加, 构成了著名的 Kelvin 波系 (图 3)

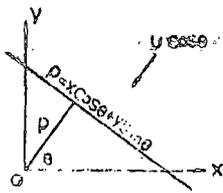


图 2 基元波

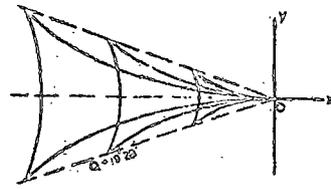


图 3 Kelvin 船波系

Kelvin 波系包含两组波系: 横波和散波, 前者包括 $|\theta| = 0^\circ - 35^\circ 16'$ 的基元波, 后者包括 $|\theta| = 35^\circ 16' - 90^\circ$ 的基元波。基元波的概念导出船波与波阻之间的简明关系, 成为线性兴波理论的基础。

线性兴波理论的关键问题是怎样用某曲面 S 上的源汇分布来表示船型, 一旦这一步解决了, 整个流场的速度势、自由波系和兴波阻力均可计算得到。然而由“几何表达”的船型转化为“流体表达”的船型是比较困难的, 下面从几个方面来看这一问题的的发展。

2. 线性兴波理论解析方法:

兴波理论中发展得最早的是解析方法, 在简化的假设下求出某曲面上源汇分布强度的解析式, 并求得兴波阻力。由于假设偏离实际船型太远, 得到的结论只能供定性分析使用。

(1) 薄船理论 Mechell 把船宽与船长、吃水相比是小量的船型称为薄船。(2.1) 式略去高阶小量后就得到薄船表面边界条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \pm U \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{在 } y = \pm 0 \text{ 上} \quad (2.15)$$

假如采用船体中心面 S 上分布强度为 $\sigma(x, z)$ 的源汇奇点来表示船型, 由单层势法向导数的性质立即得到 $\sigma(x, z) = 2U \{ \partial f / \partial x \}$, 所以薄船的扰动速度势、波幅函数及兴波阻力由 (2.10) — (2.14) 立即得到。令 $\sec \theta = \lambda$, 则得到

$$R = \frac{439^2}{\pi U^2} \int_0^\infty \frac{(J_0^2 + J_1^2)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \lambda^2 d\lambda \quad (2.16)$$

其中 $\int_0^\infty \frac{J_0^2 + J_1^2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \lambda^2 d\lambda = \int_S \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \{ K_0, x, \lambda \} \exp \rho \{ K_0, z, \lambda^2 \} ds$, 它首先由 Mechell 得到, 称为 Mechell 积分。Weiblum 和 Sharma 等人对薄船进行了许多计算和试验比较工作, 都表明很小时计算是有效的 [6]。但是实用船舶的吃水一般不符合薄船条件, Weiblum 对系列 60 的船模计算表明, 方形系数越大, 计算的误差也越大。用薄船理论计算的兴波阻力值与试验结果比较, 在低速部分偏高, 反复出现试验曲线中没有的峰谷现象, 在高速部分却明显偏低 (图 4)。

由于薄船理论发展得最早, 具有完备的理论模型和方便的计算方法, 在理论上有一定地位, 在实用中常以它为基础进行各种修正。

(2) 扁平船理论 线性理论还适用于吃水浅的扁平船, 设吃水长度比小量, 船体表面方程表示为 $z = f(x, y)$, 船体表面边界条件成为

$$\left(U + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

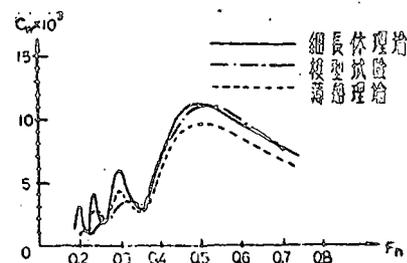


图 4 线性理论与试验曲线的比较

它可以线性化为 $\partial\phi/\partial z = U\partial f/\partial x$ (在 $z=0$ 上) 假如在 $z=0$ 平面上的区域 S 内布置强度为 $\sigma(x_1, y_1)$ 的源汇奇点, 扁平船的扰动速度势为

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(x_1, y_1) G(x, y, z; x_1, y_1, 0) dS \quad (2.17)$$

但源密度 $\sigma(x_1, y_1)$ 不能直接用船型函数来表达, 利用贝努利方程和富利哀积分可以导得 [5] $\sigma(x, y) = \frac{1}{\rho U K} \frac{\partial P}{\partial x}$, 其中 $P(x, y)$ 为作用于船底的压力分布, 适合于这种理论的船是吃水很浅的高速滑行艇等, 但船底压力分布通常是未知的, 因此扁平船理论同样存在求解积分方程的困难。

(3) 细长船理论 兴波理论在薄船理论未能达到预期效果时, 航空领域中发展了细长体理论。在薄船假设中, 船宽与长度和吃水等量相比都是小量, 对于实际船舶, 宽度与吃水是同量级的, 因此假设船宽和吃水都比船长小得多的细长船理论得到发展。考虑将奇点分布集中在中心线上, 扰动速度势为

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int \sigma(x_1) G(x, y, z; x_1, 0, 0) dx_1 \quad (2.18)$$

由 σ 产生的源流量与物面边界条件式中的 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ 沿物面轮廓积分得到的流量相等可以导得 $\sigma = U \frac{dS(x)}{dx}$ 其中 $S(x)$ 为船体横剖面面积, 根据 σ 即可求得兴波阻力等其他量。按细长船理论计算兴波阻力, 除了付汝德数很高的情况外, 结果很不好 (见图 4)。

3. 线性兴波理论中的数值方法

在解析兴波理论中, 对船体几何的限制离实用船舶差距很大, 为改进计算结果, 有必要考虑精确满足船体绕流条件的问题。随着电子计算机的发展, 美国道格拉斯飞机公司的 Hess 和 Smith 于 1962 年首先提出了任意形状三维物体的无升力势流数值计算方法, 对造船界是一个促进 [7], 1972 年美国海军舰艇研究和发展中心编制了标准程序 [8] 作为船舶流体力学数值计算的工具体, 国际船舶计算流体力学会议 [9, 10] 进一步总结了数值方法的发展。

关于 Hess—Smith 方法在线性兴波理论中的应用, 英国的 Gadd [11], 日本的小林正典等 [12], 美国的 Adee [13] 等人均分别做过探讨, 他们用 Havelock 源代替无界流场的 Rankine 源, 以待定的源密度函数 $\sigma(x_1, y_1, z_1)$ 分布在船体表面 S 上, 扰动速度势 ϕ 用 (2.8) 表示, 由绕流条件求得第二类 Fredholm 积分方程

$$-U \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2\sigma(x, y, z) + \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(x_1, y_1, z_1) \frac{\partial^2}{\partial n^2} G(x, y, z; x_1, y_1, z_1) dS \quad (2.19)$$

这样的力学模型, Brard 称之为 Neumann—Kelvin 问题, 因为在船体表面上的边界条件是 Neumann 型的, 在自由表面上的边界条件是 Kelvin 型的。

利用有限元法 [7] 把积分方程 (2.19) 离散化为线性代数方程进行求解, 往往要求计算机容量比较大, 计算时间比较长。美国海军舰艇研究和发展中心的保琦等 [14, 9, 10] 改进了 Hess—Smith 方法, 采用物体表面上的偶极子分布, 对于同样的计算精度, 控制元的数目可大量减少, 卡氏方法的优点在于它便于计算控制点外的速度和压力分布, 易于处理不定常问题。

用有限元法计算船舶兴波, Gadd 通过船侧波形和横向波形与 Mechell 理论、二阶理论进行比较 [11], 表明采用船体表面分布计算得到的波形与实际波形的偏差, 与采用船中平面分布的偏差几乎是同量级的, 并未获得显著的改进。这是因为该方法的二个基本假定: 自由表面线性化及忽略流体的粘性都是成问题的。事实上, Neumann—Kelvin 问题本身在精度上是自相矛盾的。计算实践表明, 在线性化自由表面条件的限制下, 精确的物面条件没有给计算结果带来益处, 它是一种不相容的理论。

近来对线积分问题展开着讨论，线积分是船体表面与自由表面交线上的积分项，由格林定理得出它的存在性，这是水面船舶的特点。首先由日本的别所提出，以后 Wehausen，丸尾孟，Eggers 和 Brard 等人都进行过研究，一方面认为线积分属于高阶项，线性理论不必考虑；另一方面发现线积分对兴波阻力影响很大，特别是对于肥大型船舶更是明显。但是线积分的存在在数学处理上困难复杂得多，看来线积分项表明船舶兴波的非线性特性，是很重要的问题。

4. 波形分析

船舶在航行时兴起波浪及受到阻力是同一现象的两个侧面，波浪是流体表现的运动形式，兴波阻力是其动力形式，两者之间必然有内在的联系（图5），波形测量和分析正是揭露这种内在联系的研究手段。

在船模试验时，定性地观察船模运动时所兴起的波浪是水池试验工作者所重视的，但是把船模所兴起的波浪用一定的方法定量地测量记录下来，并从中分析兴波阻力的量值，仅仅在50年代由乾崇夫所倡导。他在美国造船工程师学会船波委员会的第十八届会议上所提出的研究成果推动了国际范围内波形测量分析工作的开展，到了1963年第一次国际兴波阻力理论讨论会上[15]，就已经提出了近十种不同的方法，后来又有许多发展[16, 1, 6]，其中主要有：



图5 船波与兴波阻力的关系

(1) 立体摄影法 这是乾崇夫最初提出的方法，它能获得整个波形的全貌，但测量经费较贵，数据分析困难，难于推广。

(2) 横切法 沿着垂直于船的运动方向，在船后一定距离测量两道或多道波形，它不受池壁的限制，但易受尾流干扰，测量设备要和船模一起前进，需要同时测量许多点的波形值。

(3) 纵切法 这是目前使用最广泛最方便的方法，用浪高仪固定在水池的某固定位置，当船模前进时，浪高仪即获得纵向波形信息，但对窄小水池需要处理池壁反射问题。

除此之外，还有 $x-y$ 法、斜切法、矩阵法等，除了测量波高以外，还有测量斜率等。目前许多国家已将它列为常规试验内容，据十五届国际水池会议统计，有24个水池开展波形测量工作，其中有14个水池采用纵切法，3个采用横切法，6个两者都用，有4个水池采用立体摄影法。

随着波形测量方法的不同，分析方法也各不相同，目前的分析方法均基于理想流体线性兴波理论的结果，它是兴波理论的一种应用，但是由于分析所依据的波形信息是直接由测量得来的，似乎更可信一些，为了区别起见，通常把波形测量分析得到的阻力分量称为波形阻力 (Wave Pattern Resistance)。目前运用最多的是单点纵切测量法（图6），用 Newman—Sharma 方法 (N—S法) 分析。美国的 Ward [18] 和日本的加用芳男 [19] 均已发表了他们用 N—S 法分析波形的 FORTRAN 程序，国内许多水池也建立了相应的 ALGOL—60 程序。

用 N-S 法分析波形时，所记录的波形数据只有在池壁反射波到达之前的一段才有用，当 y_0 取得小些，有效记录段 N_0M_0 可以长些，但当 y_0 太小，记录的自由波形容易受到局部波系的干扰，通常取 $y_0/L \geq 0.25$ 对于非高速船已经足够了。至于 M_0 点以后的波形则采用 Kelvin 波系的渐近形式 $S = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) / \sqrt{|x|}$ 。

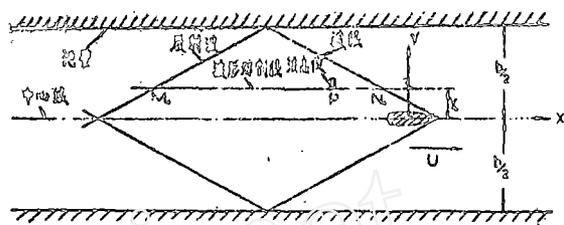


图6 纵切法波形测量示意图

N-S 法以 (2.13) 作为自由波型的数学模型，以 (2.14) 作为兴波阻力计算公式，波幅函数 $s(\theta)$ 和 $c(\theta)$ 利用测得的纵切波形及拟合得到的渐近波形通过富里哀变换求得。为了计算的稳定性，Sharma 采用积分变换 $S = \sec \theta$ ， $u = \sec^2 \theta \sin \theta$ ，于是自由波形为

$$S_y = \int_0^\infty [F(u) \sin(Sx + uy) + G(u) \cos(Sx + uy)] du \quad (2.20)$$

波形阻力为
$$R = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \{ [F(u)]^2 + [G(u)]^2 \} \frac{2S^2 - 1}{S^2} du \quad (2.21)$$

其中 $F(u) = K_0 s(\theta) / [S(2S^2 - 1)]$ ， $G(u) = K_0 c(\theta) / [S(2S^2 - 1)]$ ，线尺度用 K_0 无量纲化，阻力用 $K_0^2 / (\rho U^3)$ 无量纲化。

波形分析是一种半试验半理论的方法，它是用测量的波形，理论的方法计算得到阻力，是船波研究的有效手段，自从波形测量分析发展起来以后，兴波阻力的研究工作有了新的起色，在它的基础上发展起来的球首设计方法，最佳船型理论以及船型主尺度与兴波阻力的关系等实用兴波阻力理论工作受到船体设计者的关注，同时，它对于检验兴波阻力理论，研究阻力分类问题以及船模—实船相关换算等问题都具有重要的作用。

5. 波形叠加原理及其应用

波形分析的实际应用常要用到波形叠加原理：把带球首船型的波形认为是主船和球首波形之和；把改型船的波形认为是原型船和修正薄船波形之和。日本堤孝行等 [1] 对此作了试验研究，发现在相位角 $\theta < 40^\circ$ 叠加原理基本符合，而在 $\theta > 40^\circ$ 时，差异较大。

乾崇夫 [17] 首先提出利用波形分析研究最佳船型。Sharma [20] 把它用于球首设计，他用波形分析求出主船和装有球首的试验船的波谱 $F_m, G_m, F_{I_0}, G_{I_0}$ ，于是得到单独球首的波谱 $F_b = F_{I_0} - F_m$ ， $G_b = G_{I_0} - G_m$ ，为了获得最佳球首的相对尺度 p 和相对位置 q 。Sharma 进一步假定球鼻尺度变化仅改变波高，纵向位置变化仅改变相位，求得变化的球鼻波谱为

$$\left. \begin{aligned} F_b(u) &= p [F_{b_0}(u) \cos(SqL) + G_{b_0} \sin(SqL)] \\ G_b(u) &= p [-F_{b_0}(u) \sin(SqL) + G_{b_0} \cos(SqL)] \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

将此球鼻装在主船上后波谱为 $F_I = F_m + F_b$ ， $G_I = G_m + G_b$ ，波形阻力按 (2.21) 计算。为了衡量球鼻的消波效果，Sharma 将组合体波阻与主船波阻之比作为球鼻影响因子 η (p, q) 作出等值线图 (图7)。

堤孝行等 [21] 将 Sharma 方法得到的球鼻本身的波谱叠加到其他船型上去, 同样取得良好的效果, 于是可以如此积累球鼻波形资料以供使用。

日本马场 [22] 于 1972 年提出的方法, 原型船的波形由测量得到, 叠加上去的薄船用 Mecheil 理论计算, 然后用变分法求出在一定约束下最佳修正量。由于原型船对薄船波形的干扰, 马场由大量试验统计出薄船波形振幅和相位的修正因子, 在长崎水池应用相当成功。

另外, 堤孝行等 [21] 在波形分析的基础上, 通过系列试验和统计分析, 进一步研究了船型主尺度与波形阻力的关系, 并利用系列结果来估算兴波阻力和最佳船型设计 [1, 23]。

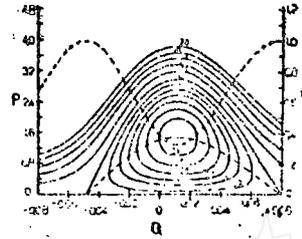


图 7 球鼻影响因子等直线及最佳值

6. 镜像体理论和流线追踪法

兴波理论的解析方法从船体几何求出相应的奇点分布, 乾崇夫发现如此求解误差很大 (图 8)。他提出一种新的研究方法, 倒过来由奇点分布求相应船型的方法 (图 9)。在乾崇



图 8 船体几何的比较

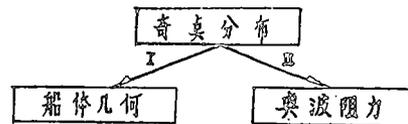


图 9 镜像体近似船型设计法

夫方法中, 过程 II 采用自由表面的零阶近似, 即以静水面作自由表面, 它相当于对称重叠体在无界流场中的绕流问题, 用流线追踪法从船首驻点开始求出流线即得到船体表面。过程 I 采用自由表面一阶近似, 即用 Havelock 理论计算兴波阻力。显然这是不相容的理论, 但工程应用方便而受到欢迎。Weiblum 高度评价了这一工作, 把乾崇夫用矩形中心面上源汇分布所求得的船型命名为 Inuid 船型。

1961 年美国的霍保琪到日本东京大学, 发展了乾崇夫的方法 [15], 他把奇点分布在船体内部的“次表面”上, 在水平的底部也分布奇点, 使之产生平底船, 并在“次表面”的端部轮廓上可以布置源或偶极子的线分布以进一步消波 (图 10), 用这种奇点配置由变分法

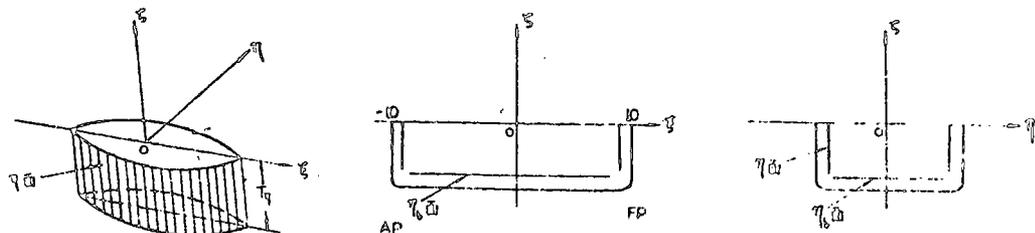


图 10 次表面

及流线追踪法求得的最佳船型被 Weiblum 命名为 Pienoid 船型。卡氏方法在美国用于小水线面双体船上获得相当成功,并建立了标准程序[24]。日本在1968年起由船舶研究所和七个主要造船公司合作改进卡氏船型设计程序,用高里衰级数表达奇点分布,并推广应用于V型船设计[1]。乾崇夫指出卡氏法计算的兴波阻力值与试验的差异:

(1) 在阻力试验兴波阻力曲线中达到最小值的付汝德数比设计的高出约0.02。

(2) 计算的阻力曲线在越过最低点后比试验曲线增加得快。

乾崇夫为解释这些差异,提出了“屏蔽效应”(Sheltering Effect)的概念。认为表达船体形状的奇点分布强度 $\bar{m}(\xi, \eta)$ —船体生成源,与产生自由波的奇点分布强度 $m(\xi, \eta)$ —兴波源之间有差异需要修正,令 $m(\xi, \eta) = \alpha(\xi) \bar{m}(\xi, \eta)$,屏蔽效应即由船体生成源减额因子 $\alpha(\xi)$ 所组成($\alpha \leq 1$)。由经验观察知道减额因子按横截面积变化,近首部小,近中部大,取 $\alpha(\xi) = 1 - \mu(1 - |\xi|)$ 形式设计了定期货轮和集装箱船,达到较好的效果。

四、理想流体非线性兴波理论

线性理论虽已开始用于工程,但其计算精度还未达到定量要求,促使人们从事非线性兴波理论的研究。由于数学处理上的困难,目前还没有成熟的方法,现有的方法计算量大,难于推广。非线性兴波理论的研究大多采用摄动法,选择一个小参数 ε ,将扰动速度势 ϕ ,自由表面 ζ 等物理量进行摄动展开[5]:

$$\phi = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \varepsilon^3 \phi_3 + \dots \quad (4.1)$$

$$\zeta = \varepsilon \zeta_1 + \varepsilon^2 \zeta_2 + \varepsilon^3 \zeta_3 + \dots \quad (4.2)$$

线性理论正是它的一阶近似,若引进高次项,就得到高次理论。另一类非线性方法是采用数值方法。

1. 薄船高次理论

通常采用的坐标有两种: Euler 坐标法和 Lagrange 坐标法,对于自由表面问题它们各有所长, Euler 坐标法用物理空间进行分析,自由表面位置是未知的,存在解的延拓、湿表面的变化、线积分的出现及奇异性等问题; Lagrange 坐标法是沿着流线进行分析,自由表面可由坐标来确定,但是处理物体表面边界条件不方便,流场支配方程不是拉普拉斯方程,位势理论不适用。

用 Euler 坐标法,将(4.1)和(4.2)代入拉普拉斯方程和边界条件(2.1), (2.2)和(2.3),取其二阶项得

$$\begin{cases} \Delta \phi_2 = 0 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \pm g(x, y), & \text{在 } y = \pm 0 \text{ 上} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \kappa_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = f(x, y), & \text{在 } z = 0 \text{ 上} \end{cases} \quad (4.3)$$

其中

$$f(x, y) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \zeta_1$$

$$F(x, y) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} (\text{grad } \phi_1)^2 + \frac{1}{\kappa_0} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \kappa_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \right]_{z=0}$$

为薄船 Mecheil 解 ϕ_1 的函数,而自由表面的二阶量为 $\zeta_2 = \left[-\frac{y}{g} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{1}{2g} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{y}{g} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial z} \zeta_1 \right]_{z=0}$

丸尾孟[25]从格林公式导得二阶扰动速度势为

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\kappa_0} \int_{L_0} F G ds + \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} g G ds - \frac{1}{2\pi\kappa_0} \int_{L_0} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} G ds \quad (4.4)$$

其中 L_0 为未扰动自由表面, S_0 为静水自由表面下船体表面在船中央平面上的投影, L_0 为未扰

动水线在船中央平面上的投影。Wehausen [15] 和 Eggers [26] 也分别导得二阶扰动速度势的表达式。日本的北泽高木 [1] 比较了上述三个方法, 利用分部积分把这三个结果统一起来, 丸尾孟的解仅仅多了线积分的项。

利用二次薄船理论计算常规水面船舶的实例甚少, Eggers 的计算给出了较好的二阶修正, 但仅从少数计算例还不能对高次理论作出确切的评价。另外, Newman [27] 还证明了定常的三阶速度势是不存在的。

Wehausen [28] 利用 Lagrange 研究薄船的兴波问题, 他的一阶近似解与 Meche II 解一致, 二阶近似解的计算较复杂。

2. Guillon 法

Guillon 是一位水泵设计师, 他对船舶兴波问题感兴趣, 为了改进 Meche II 理论, 他提出了一种把实际船型变换到一个线性船型的 Guillon 变换。在线性薄船理论中, 用船中心平面上的源汇分布表示船形, 如图 11 所示, 船型上 A 点的流动条件移到中心平面 B 点上来满足, 假如 $A_0 B_0 = \eta$, 在 B₀ 点上的源强 $\sigma = 2U \frac{\partial \eta}{\partial x}$, 于是 Meche II 理论相当于把 $y = 0$ 面上的流动状况移到 $y = \eta = \int_0^x \sigma dx$ 的线性船型上, Guillon 认为, 既然对 y 轴方向可以作变换, 那么也应该考虑 x 轴和 z 轴方向上类似的变换, 使 B₀ 点不是对应于 A₀ 点而是对应于 A 点, 其中垂向变换即为线性理论中的波面抬高关系式 $A_0 A' = A' A = \zeta = -U \eta / g$ 为求出纵向变换,

Guillon 认为流体质点以速度 U 沿 x 轴流到 B₀ 的时间大体上等于沿船形到达 A 的时间导

得 $x = x_0 + \xi = \int_0^{x_0} \frac{1 + (u/U)}{1 + (d^2/\zeta^2)} dx_0$,

其中 $d = \frac{\partial \eta}{\partial x}$, 因此得到对应于 B₀ ($x_0, 0, z_0$) 点的线性船型 A₀ (x_0, y_0, z_0) 与实际船型 A (x, y, z) 之间的变换关系式:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \xi = \int_0^{x_0} [1 + (u/U)] / [1 + (d^2/\zeta^2)] dx_0 \\ y &= y_0 = \int_0^{x_0} [\sigma / (2U)] dx_0, \quad \zeta = \zeta_0 + \zeta = \zeta_0 - U \eta / g \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Guillon 发表的变换方法 [29] 是从物理观点提出来的, 无解析基础, 难于理解它的意思, 当时没有顾及到应用, 后来 Emerson [30] 及 Gadd [31] 用该方法计算了几条船, 结果很好, 引起了人们的重视, 甚至 Gadd 认为: “兴波阻力理论至少已经是船型设计中有用的部分。” 后来 Noblesse [32] 和 Dagan [33] 分别独立地对 Guillon 方法进行分折论证, 他们所采用的方法都是把物理空间映照到一个变形空间, 通过坐标变换把自由表面和船体表面分别映照到未扰动的静水表面和船体中心面, 区别在于变形空间中船体中心面源强度的推导。

3. 低速理论

对于低速船舶, 日本的马场 [34] 把 Ogiwie 的二维低速波阻理论推广到三维的情况。由流场分析知道, 除了极靠近自由表面的地方外, 其余地方的流动与镜像体模型很一致, 因此自由表面附近的一层类似于粘性流体的边界层, 在那里波的影响不能忽略。将速度势分成两部分: $\phi = \phi_0 + \phi_1$, 其中 ϕ_0 为镜像体理论的速度势, ϕ_1 为考虑自由表面波动的项, 代入非

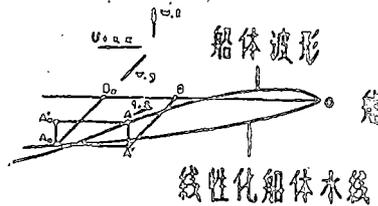


图 11 Guillon 变换

线性自由表面边界条件并应用格林公式得到

$$\phi_1 = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \phi_0 \frac{\partial G}{\partial x} dS + \frac{1}{4\pi K_0} \int_L (G \frac{\partial \phi_0}{\partial x} - \phi_0 \frac{\partial G}{\partial x}) dy - \frac{1}{4\pi K_0} \iint_{-\infty}^{\infty} (\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \phi_0) G ds$$

其中 $\phi_0 = [\frac{1}{2} (2 \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + u \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_0}{\partial y} + w \frac{\partial \phi_0}{\partial z}) (u^2 + v^2 + w^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} (2u + u^2 + v^2 + w^2)]_{y=0, z=0}$ 。上述积分方程 (4.6) 直接求解显然是困难的, 马场等忽略了 (4.6) 右端的前二项, 于是仅用 ϕ_0 就能得到 ϕ_1 。在 (4.6) 中可以看出, 若忽略 ϕ_0 后, 可以把它改写成线积分项, 这就表明线积分在计算低速船波阻时的重要性。马场 [10] 发表了四条常规船型的计算结果, 表明在方型系数宽广的范围内, 理论值与试验值符合得很好。

4. Rankine 源方法

Havelock 源仅能满足线性化自由表面条件, 但它的表达形式却非常复杂, 在非线性兴波理论中考虑采用 Rankine 源是很自然的。Gadd [1] 在船体表面和静水面上分布 Rankine 源, 并在镜像船体表面上也分布 Rankine 源, 用有限元法进行数值计算, 在计算中利用船体表面和自由表面精确边界条件反复迭代来求 Rankine 源强度, 该方法的 FORTRAN 计算程序所需的计算时间比 Guilloton 法等其他方法来得长, 因此适于计算首部的流动和平直船型的整体解, 如果船型比较复杂, 有限元分割要求计算机规模很大。Gadd 的计算实践表明, 即使在水平面上仅取三排面元, 这些面元还未能把船波整个盖住, 但计算的波形已经可以和 Guilloton 法比美, 对比较肥胖的船, Guilloton 法已经不适用了, 而本方法还能给出合理的结果。只有当船舶产生显著碎波时, 计算才出现问题。

上述 Rankine 源方法, 是 Hess - Smith 方法推广运用到非线性船波问题上的数值计算方法, 是很有发展前途的方法 [7]。

五、粘性流体兴波理论

上述兴波理论是在忽略流体粘性的假设下展开的, 但实际流体均有粘性, 粘波对波浪阻力的影响越来越受到人们的重视。

1. 粘性流体中的兴波阻力计算

这方面早期的工作主要是局限于对理想流体兴波阻力的经验修正, 1964 年蒋慰昌同志在这方面作了较全面的总结 [36], 但修正因子缺乏理论根据, 计算误差大, 近来这方面工作不多。近期研究有两类, 一类是求解带有自由表面的 N-S 方程, 另一类是应用边界层理论提出各种流动模型进行研究。

N-S 方程是非线性方程, 数学处理困难很大, 常用近似的 Oseen 方程来代替 [1]。关于运用边界层理论, 粘性对波阻的影响通过物体后的伴流模型来进行研究, 其中有旋伴流模型和势伴流模型两类。

旋伴流模型是假设在伴流区内有一个涡分布, 这种波浪理论首先由 Brard [37] 提出, Tatinclaux [38] 和 Beck [39] 利用这种模型计算了兴波阻力。

高雷诺数下, 涡被限制在边界层的伴流的有限区域内, 外面的流动认为是势流, 如果是薄船, 那么伴流的宽度可以看作与船宽同量级的小量, 波浪运动能够在边界层和伴流区外的无旋流场中进行讨论, 边界层和尾流的存在以它们的排挤效应给周围的势流以一定的影响, 它能够通过附加源或偶极子的某种实效分布来表示, 这种表示伴流排挤的源称为 Betz 源, 通常用带有假设源的势流场模拟实际流动的压力场来确定, 这一类模型中最典型的是自由流线所限制

的伴流早期的解假定自由流线延伸到无穷远下游，但是这类伴流模型没有描述真实的情况，因为伴流内部的压力是变化的，而自由流线假定在伴流内压力不变，虽然可以用实测压力，但实用上这种变化的压力是不容易处理的。丸尾孟 [1] 采用航空中改进的自由流线理论，把二维薄支柱的势伴流模型结果推广运用到计算薄船的兴波阻力，用二维流场的源分布 $r(x)$ 来表三维流场中 Havelock 源分布 $m(x, z) = (\frac{1}{2}) U r(x)$ ，进一步计算得到波阻系数及自由波型。

粘性流体兴波阻力的研究，离实际问题距离还远，历届国际水池会议均鼓励研究。

2. 碎波阻力理论和奇异波理论

随着造船事业的发展，船越造越大，首部丰满度渐渐增大，形成了船型学上肥胖船型分支，碎波阻力这个新的阻力成分就是在对肥胖船型的阻力进行研究时发现的。

早期研究工作认为船首研究的主要目的是减小兴波阻力，但由波形分析知道，当付汝德数小于 0.2 时，波形阻力也仅占很小部分，通常小于 5%，马场 [40] 为了分析阻力成分，在三菱船模试验池对各种船型的阻力的成分进行直接测量，发现了一个新的阻力成分，它起因于兴波机理，而转化为用横向布置毕托管法在船模后的尾流测量得到的粘性阻力的一部分，但是它是遵循付汝德相似定律，马场最初把它比拟成一种水跃现象，在 1969 年罗马举行的第十二届国际船模水池会议上正式取名为碎波阻力。

对于肥胖船周围流动的研究与马场同时，1969 年还有两篇论文发表，他们研究的是同一种流动现象，但研究方法不同，其一是日本的种子田和天本的工作 [41]，他们观察了一艘 19.54 米长的渔业调查船，并作了船模试验，在测试船体表面粘性边界层的时候，发现船尾的尾流在水表面上有明显的五个涡系，一个在船尾中央，由螺旋桨推进器产生，二个从靠近尾部二边由粘性边界层分离出来的。外边二个涡系是由首波产生。从首部开始的两个涡系，起因类似于水跃现象。在尾部附近也有类似的水跃现象，但比较弱些。由于从首部出发的涡看上去像一根挂在脖子上的项带，所以称之为“项带涡” (Neklace Vortex)，见图 12。船首附近不连续流动的结构见图 13。

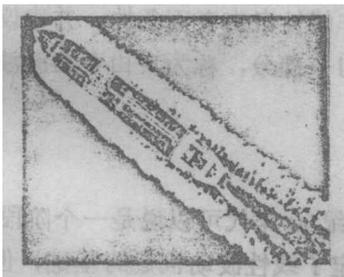


图 12 项带涡 [1]

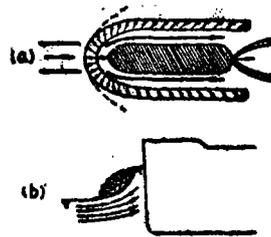


图 13 船首附近流动结构图

另一篇是 Dagom 和 Tulin 的文章 [42]，他们对通过一个半无限长的钝体的二维定常流动的非线性自由表面现象的理论研究，建立了两个定常流动的支配方程的渐近表达式，当物体前自由表面未破碎时，求得了表示小付汝德数流动的二阶解，对于钝头附近自由表面的破碎条件，在假定破碎是局部 Taylor 不稳定时，根据射流模型研究高付汝德数的解，并利用这种流动模型来计算首部的阻力。

虽然船波破碎现象研究对于船型设计，尤其是丰满船型的设计是很重要的，但由于现有

的复杂性,理论研究进行得很少,由于这种流动现象本质上是湍流,势流理论已不再完全适用于整个流动,因此碎波理论研究是非常困难的,它的机理并未完全搞清楚,目前较普遍的认识是由于波高较陡,波能转化为涡动量,然而又以湍流的形式耗散,因此波形阻力内不包含这一阻力成分,要从尾流亏损形式中测出。

日本的武隈克义 [43] 在他关于自由表面非线性问题研究的基础上,利用摄动法对碎波现象进行了理论计算,他同时对一艘6米长1米宽的简单船型船模进行船模试验,他用空间构架5孔毕托管(7mm直径)测量首部附近的流场,计算得到的碎波位置与实测结果比较接近他还观察到在浅吃水时自由表面扰动比深吃水时来得大。Sharma [44] 还发现丰满船型的伸头型球首(Protuding Bulb)在压载状态下使首部周围自由表面流动光滑化,从而对减小碎波阻力是很有效的,马场等人[45]的试验研究也得到类似的结论,他们对一艘 $C_b = 0.80$ 的油轮测得不带伸头型首的碎波阻力大约占总阻力的25%,带伸头型首的碎波阻力占10%,上述事实表明,丰满船型船首几何形状变化主要引起碎波阻力的变化。马场[1]在上述试验研究和流场测试的基础上提出了一个流动模型:把船首前不定常自由表面涡流看作为一层薄的自由表面层叠加到镜像模型速度势所诱导的非均匀流动上,通过理论计算定性地证明了浅吃水碎波现象严重的原因和伸头型球首在减少碎波阻力的作用。

近来乾崇夫等[46,47]对船舶近场波动的奇异性开展了试验研究,他们对船宽有较大幅度变化的系列船模及一个两因次简化船模通过波形分析、流场分析及动量损失测定,计算了波浪阻力、波形和扰动速度场,完整地考察了流动的物理现象,分析和讨论了近场波动的奇异性后得到下列结论:

(1) Kelvin - Havelock 兴波理论得不到船舶近场兴波的奇异特性,奇异波不仅出现在船首,由船型特征,它也能出现在其它部分。

(2) Newman - Sharma 波形分析不能提供完整的波浪阻力值。

(3) 兴波阻力系数 C_w 和波形阻力系数 C_{wp} 之间的差异可以通过船后的动量损失测得,它是由奇异波特性确定的,波浪破碎现象是奇异波的性质之一。奇异波类似于可压缩流体中的激波和浅水中的水跃现象,为了分析这些现象,应该考虑非线性自由表面条件。并建议把奇异波称为自由表面激波,由它引起的阻力分量是波浪阻力的一部分,称为自由表面激波阻力。

六、小 结

船舶波动的研究从上一世纪付汝德建造水池起到本世纪50年代可以说是一个阶段,在这阶段中 Mecheil, Havelock 等人经典性的研究工作奠定了线性波动问题的基础,但离实用差距较大,造船设计还是依靠试验方法来解决。本世纪50年代以后乾崇夫、卞保琪等人的工作,使经典理论向实用跨出了一大步,标志着船波研究进入了新的阶段。进一步完善船波理论需要解决好自由表面的非线性影响和粘性对波动的影响问题,关于非线性自由表面问题,大部分工作结果难以推广实用,其中 Rankine 源分布的有限元解法较有发展前途,但计算量大,受到计算机条件的限制。关于粘性的影响,所提出的流动模型还不够理想,需进一步开展基础性的研究工作。碎波及奇异波的对推动船波理论的发展起着重要的作用,进一步表明自由表面的非线性,流体的粘性以及近场船波对于兴波理论研究是不可忽视的,然而考虑这些因素完整的兴波理论,还有待进一步研究。

参 考 文 献

- [1] Intern. Seminar on Wave Resistance, Tokyo, 1976
- [2] 刘应中、何友声(1978), 实用兴波理论发展概述, 船舶工程, 2: 63-77
- [3] Havelock, T. H. (1934), Wave patterns and wave resistance. Trans. I. N. A., 74, 340 (1934), Calculation of wave resistance, Proc. of the Royal Society, London, Series A 144: 514
- [4] Lunde, J. K. (1951), On the linearized theory of wave resistance for displacement ship in steady and accelerated motion, Trans. SNAME, 59: 25
- [5] 丸尾孟(1965), 造波抵抗理论概说, 日本造船协会志, No. 434
- [6] Wehausen, J. V. (1973), The Wave Resistance of Ships, Berkeley, California
- [7] 陈伟剑(1975), 在流体力学研究中有阻元法的应用与发展概况, 七〇二所技术汇报 75-005
- [8] Dawson, C. W., Dean, J. S. (1972), The XYZ potential flow program, NSRDC, Report 3892
- [9] First Intern. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, 1975
- [10] Second Intern. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, 1977
- [11] Gadd, G. E. (1970), A method for calculating the flow over ship hull, RINA Trans., 112, 3
- [12] 小林正典、池畑光尚(1970), 船体 \odot 吹出 ∇ 分布关于 ∇ 考察, 日本造船学会论文集, 128
- [13] Adey, B. H. (1973), Calculation of the stream lines about a ship assuming a linearized free-surface boundary condition, J. Ship Res.-17, 3
- [14] Pien, P. C. (1975), Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies on doublet distributions, NSRDC Department Report SPD 601-01
- [15] Intern. Seminar on Theoretical Wave Resistance, Michigan, 1963
- [16] Eggers, K. W. H., Sharma, S. D., Ward, L. W. (1967), An assessment of some experimental methods for determining the wave making characteristics of a ship form, Trans. SNAME, 75: 112-157
- [17] Inui, T. (1962), Wave-making resistance of ships, Trans. SNAME, 70: 283-326
- [18] Ward, L. W., Hooff, R. W. (1976), The effect of probe location on a model wave resistance survey along a longitudinal cut, J. Ship Res. 20, 1
- [19] 加用芳男(1975), The analysis of wave pattern resistance by Newman-Sharma method 长研推进性能研究室, 技术报告, 75944
- [20] Sharma, S. D. (1966), An attempted application of wave analysis techniques to achieve bow-wave reduction, Proc. 6th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, D.C.
- [21] 堤孝行、荻原诚功、神中竜雄(1974-1975), 船の主要目と造波抵抗, 日本造船学会论文集, 136, 137, 138
- [22] Baba, E. (1972), An application of wave pattern analysis to ship form improvement, 日本造船学会论文集, 132
- [23] 堤孝行(1978), An application of wave resistance theory to hull form design, 日本造船学会论文集, 144
- [24] Chen, R. (1975), The Pien wavemaking resistance computation program, Part I., DTNSRDC, Report 4070, 4371
- [25] Maruo, H. (1966), A note on the higher-order theory of thin ships, Bulletin of the Faculty of Engineering, Yokohama National Univ., 16, 1-21

- [26] Eggers, K.W.H.(1966), Second-order contributions to ship waves and wave resistance, 6th Symp. on Naval Hydrodynamics, Washington, D.C.
- [27] Newman, J.N.(1971), Third-order interactions in Kelvin ship-wave systems, J. Ship Res., 15
- [28] Wehausen, J.V.(1969) Use of Lagrangian coordinates for ship wave resistance (First- and second-order thin ship theory), J. Ship Res., 13
- [29] Guilloton, R.(1964), L'Etude Théorique du Bateau en Fluide Parfait ATMA, 64: 537
- [30] Emerson, A.(1967), The calculation of ship resistance; An application of Guilloton's method, Trans. RINA, 109: 241
- [31] Gadd, G.B.(1973), Wave resistance calculation by Guilloton's method, Trans. RINA, 115: 377
- [32] Nobless F.(1975), A perturbation analysis of the wavemaking of a ship with an interpretation of Guilloton's method, J. Ship Res., 10, 3: 140
- [33] Dagan, G.(1975), A method of computing nonlinear wave resistance of thin ships by coordinate straining, J. Ship Res., 19, 3: 149
- [34] Baba, E. & Taketuma, K.(1975), A study on free-surface flow around bow of slowly moving full forms, 日本造船学会論文集, 137
- [35] Ogilvie, T.F.(1968), Wave resistance: The low speed limit, The University of Michigan, Department of Naval Architecture and Marine Engineering, No.002
- [36] 森島昌 (1964), 近代船舶兴波理论的发展, 研究汇报, 14
- [37] Brard, R.(1970), Viscosity, wake and ship wave, J. Ship Res., 14, 4: 207
- [38] Tatinciaux, T.C.(1970), Effect of a rotational wake on the wavemaking resistance of an ogive, J. ship Res., 14, 2: 84
- [39] Beck, R.F.(1971), The wave resistance of a thin ship with a rotational wake, J. Ship Res., 15, 3: 196
- [40] Baba, E.(1969), A new component of viscous resistance of ship, 日本造船学会論文集, 125, 23-34
- [41] Taneda, S. & Amamoto, H. (1969), On the neck lace vortex, Bulletin of Res. Inst. Appl. Mech, Kyushu Univ., No. 31
- [42] Dagan, G. & Tulin, M.P. (1969), Bow waves before blunt ships, Hydrodynamics, Inc., Technical Report 117-14
- [43] 成原克义 (1974), 船首附近自由表面之非線形運動に関する研究, 三菱重工技術, 11, 3: 415-421
- [44] Eckert, E. & Sharma S.D.(1970), Bugwülste für Langsame, Vollige Schiffe, Jahrb. Schiffbantechn. Ges., 64: 129-171
- [45] Taniguchi, K., Tamura, K., Baba, E.(1971), Reduction of wave-breaking resistance by MHI-bow, Mitsubishi Juko Giho, 8, 1: 146-152
- [46] 成原克义, 森島昌等(1979), Experiment investigations on the wave making in the near-field of ships, 日本造船学会誌, 173: 95-108
- [47] 成原克义, 森島昌等(1979), Non-linear properties of wave making resistance of wide-beam ships, 日本造船学会論文集, 140: 18-26