论粘性流体的一维运动方程*

中国科学技术大学研究生院　黄瑞新

提要　从三维运动方程组出发，利用边界层理论和积分平均的概念，导出工程中常用的一维粘性流动的运动方程组，为工程应用提供了较严密的理论基础，并对粘性力的作用作了深入的剖析。

一、引　　言

牛顿流体在层流状态下服从 Navier-Stokes 方程。目前已经可以用计算机直接求解二维的 N-S 方程。但是，由于一维近似能迅速地提供有用的结果，所以在工程计算中还广泛采用。吴仲华[1]对粘性流体的一维运动作了深刻的分析，澄清了过去某些含糊不清的提法。但是论证中仍采用通常的一维模型，比如既认为流动是一维的，又假定壁面上流体粘附而"无滑移"。因此在概念的澄清方面有些美中不足，有必要从较为严格的角度出发来建立一维流动方程。

实际的流动都是三维的，一维只是一种近似。三维情况下导出的方程和结果应具有普遍的意义，它应当适用于二维和一维的情况。通常推导一维运动方程的办法有两种。一种是在导出严格的三维动流方程后，再在方程中引用一维简化而得一维流动方程；另一种是在简化的一维模型下直接导出其微分方程。前者概念较严密，多见于理论书刊，后者物理模型简单，推导简明扼要，多见于工程书刊。但正是由于后者模型过于简化，有时易造成概念上的含糊；反之，从前一种角度出发，我们可以较清楚地看到一维简化是基于哪些假设，适用范围如何，会有多大的偏差。

本文将采用前一种办法，以期与〔1〕中的分析相对比。目的是以一维粘性流动为题来说明气流参数的积分平均这个概念和方法。这个方法加以推广后将可以获得更为有益的结果。

* 1978年12月15日收到。

Whinnery, J.R., et al. (1967), Thermal convetion and spherical aberration distortion of laser beam in low-loss liquids, *IEEE J.Quantum Electronics*, *QE*-3, 9: 382-383.

Wohlers, M.R. (1972), Approximate analyses of the refractive attenuation of laser beam intensities by turbulent absorbing media, *Appl.Opt.*, 11, 6: 1389—1398.

赵伊君 (Zhao Yi-jun) (1978)，强激光脉冲辐照金属材料时产生高压力效应的估计。

二、三维粘性流动的运动方程组

钱学森[2]对三维粘性流体的层流运动的基本方程作了统一的严格推导。在静止直角坐标系中，在无外力场，无化学反应热及 $\mu'\equiv 0$ 的条件下，基本方程为（注意采用了张量的求和约定）：

连续方程： $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)=0 \tag{1}$$

动量方程： $$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{2}$$

能量方程： $$\frac{D}{Dt}\left(h+\frac{1}{2}u_iu_i\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}u_j) \tag{3}$$

其中

$$\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{4}$$

方程（2）又可写成

$$\frac{D}{Dt}u_i=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j},\ i=1,\ 2,\ 3$$

上式两边同时乘以u_i，并求和，有

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}u_iu_i\right)=-\frac{1}{\rho}u_i\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}u_i\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{5}$$

上式表明，流体微团动能的变化是压力和粘性力做功的结果。若引入耗散函数

$$\Phi=\tau_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 \tag{6}$$

则由（3），（5）可得

$$\frac{Dh}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{DP}{Dt}+\frac{\Phi}{\rho} \tag{7}$$

由热力学函数的定义，$h=u+pv$，故由（7）得

$$\frac{Du}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)-p\frac{Dv}{Dt}+\frac{\Phi}{\rho} \tag{8}$$

由热力学关系，上式可写为

$$T\frac{DS}{Dt}=\frac{Du}{Dt}+p\frac{Dv}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{\Phi}{\rho} \tag{9}$$

不难证明Φ总是非负的，故上式符合热力学第二定律

$$T\frac{DS}{Dt}\geqslant-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) \tag{10}$$

从（9）看到，对于流体微团的绝热流动（$k=0$），不可逆过程的熵增完全是由于粘性所致，且

$$\left(T\frac{DS}{Dt}\right)_{绝热.不可逆}=\frac{\Phi}{\rho} \tag{11}$$

因此在粘性流动中，用Φ来衡量不可逆程度是极其自然的。

我们注意到，粘性力做功率的大小是

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\tau\vec{v})&=\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}u_j)\\&=u_j\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_i}+\Phi\end{aligned}$$

可见粘性力在能量平衡中起着两种作用，一种是使流体微团熵增（对应于耗散函数Φ），另一种是使流体微团动能发生变化（见（5））。由上所述可知，流体微团的内能、焓、总机械能和总焓的变化分别为

$$\left(\frac{Du}{Dt}\right)_{绝热}=\frac{\Phi}{\rho}-p\frac{Dv}{Dt} \tag{12}$$

$$\left(\frac{Dh}{Dt}\right)_{绝热}=\frac{\Phi}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} \tag{13}$$

$$\left[\frac{D}{Dt}\left(pv+\frac{1}{2}u_iu_i\right)\right]_{绝热}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}+p\frac{Dv}{Dt}+\frac{1}{\rho}u_i\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{14}$$

$$\left[\frac{D}{Dt}\left(h+\frac{1}{2}u_iu_i\right)\right]_{绝热}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{\rho}u_i\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\Phi}{\rho} \tag{15}$$

注意，在粘性流体运动过程中，流体微团的总焓并不守恒，这是因为各微团之间由于粘性力做功而存在着能量交换。边界层理论的分析表明，边界层的不同层次中总焓的变化情况亦不同。

三、粘性流体的平面运动方程组

令$\frac{\partial}{\partial z}\equiv 0$，$w\equiv 0$，则由三维方程得到二维方程。若记速度矢量为$\vec{v}=(u_x,\ u_y)$，则有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y)=0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right) \tag{17}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}\right) \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\left[h+\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)\right]=&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\\&+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}u_x+\tau_{xy}u_y)\\&+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}u_x+\tau_{yy}u_y)\end{aligned} \tag{19}$$

或 $$\frac{D}{Dt}\left[h+\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)\right]=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\left(u_x\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+u_y\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+u_x\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+u_y\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}\right)+\frac{\Phi}{\rho}\tag{20}$$

其中

$$\Phi=\tau_{xx}\frac{\partial u_x}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial u_y}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial u_x}{\partial y}+\tau_{yy}\frac{\partial u_y}{\partial y}\tag{21}$$

四、一维简化下的运动方程组

假定有一条宽度为H的二维对称管道。取 x 轴方向与管道的中心线重合，y 轴垂直于管道中心线，并假定：

1）管的中心线是近似直线（管中心线弯曲时，只要其曲率半径比管子的特征半径大得多，则弯曲的影响可忽略）；

2）管子各截面间参数变化足够缓慢；

3）管子各截面上的参数除在边界层附近的一薄层 δ 外都是均匀的，$\delta << H$ 为边界层厚度；

4）由于粘性，在壁面上 $u_x=u_y=0$；在边界层外缘 $u_x=U$（主流速度）。

利用量级分析可将运动方程组大大简化。以下结合积分平均的概念导出一维简化下的运动方程。字母上的“—”表示积分平均，如 $\bar{\rho}=\frac{1}{H}\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}\rho dy$。

1. **连续方程** 由（16）对 y作积分平均，由于对 y向的对称性，所以$\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}\rho u_y d_y=0$。

因此，

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\,\bar{u}_x)=0$$

或近似地有

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho u_x})=0\tag{22}$$

在不可压缩统体中 $\rho=\bar{\rho}$，以上关系是严格成立的；在可压缩流体中以$\bar{\rho}\,\bar{u}_x$代替$\overline{\rho u_x}$有小小的偏差。

2. **动量方程** 由量级分析，垂直方向速度速小于水平速度，故垂直方向上的运动不重要，其动量分量方程不必讨论。水平方向动量方程中粘性力只须保留主要项 $\tau_{xy}\approx\mu\frac{\partial u_x}{\partial y}$，故为

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tag{23}$$

视μ为常数，则

$$\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) dy = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\Big|_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = -2\tau_w$$

故由（23）乘 ρ 后取积分平均得

$$\overline{\rho\frac{\partial u_x}{\partial t}} + \overline{\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} - \frac{2\tau_w}{H}$$

或其近似式

$$\frac{\partial \overline{u}_x}{\partial t} + \overline{u}_x \frac{\partial \overline{u}_x}{\partial_x} = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} - \frac{2\tau_w}{\overline{\rho} H} \qquad (24)$$

上式又可写为通用形式

$$\frac{\partial \overline{u}_x}{\partial t} + \overline{u}_x \frac{\partial \overline{u}_x}{\partial x} = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} - \frac{4\tau_w}{\overline{\rho} D_e} \qquad (25)$$

其中 D_e 为等效直径：对于圆管，D_e 等于管径 D；对于正方管，D_e 等于管宽 B，对于二维平面槽道，D_e 等于二倍槽宽（所谓二维平面槽道是指不计及槽底的作用）。

3. **能量方程** 由量级分析，粘性力作功项只须保留两项：$u_x\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \approx u_x\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$ 及 $\Phi \approx \tau_{xy}\frac{\partial u_x}{\partial y}$，故（20）化为

$$\frac{D}{Dt}\left(h + \frac{1}{2}u_x^2\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{\rho}u_x\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) + \frac{\Phi}{\rho}$$

两边乘以 ρ 后对 y 方向积分，得

$$\int_{-H/2}^{H/2} \rho\frac{D}{Dt}\left(h + \frac{1}{2}u_x^2\right) dy = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\right)H - k\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{-H/2}^{H/2} + \frac{\partial \overline{P}}{\partial t}H + \int_{-H/2}^{H/2} u_x\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)dy + \int_{-H/2}^{H/2}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dy \qquad (26)$$

其中右侧第四项利用边界上 $u_x \equiv 0$，又可化为

$$\begin{aligned}\int_{-H/2}^{H/2} u_x\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)dy &= \int_{-H/2}^{H/2}\frac{\partial}{\partial y}\left(u_x\mu\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)dy - \int_{-H/2}^{H/2}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dy \\ &= u_x\mu\frac{\partial u_x}{\partial y}\Big|_{-H/2}^{H/2} - \int_{-H/2}^{H/2}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dy \\ &= -\int_{-H/2}^{H/2}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dy\end{aligned}$$

代入（26）中，与末项相抵消。同时若记传热项为 $\frac{D\overline{q}}{Dt}$，则由（26）得近似的能量方程为

$$\frac{D}{Dt}\left(\overline{h} + \frac{1}{2}\overline{u_x^2}\right) = \frac{D\overline{q}}{Dt} + \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{P}}{\partial t} \qquad (27)$$

4. **熵增方程** 上面已指出，$\Phi \approx \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2$，故（9）化为

$$T\frac{DS}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 \qquad (28)$$

两边乘ρ后对y作积分，

$$\int_{-H/2}^{H/2}\rho T\frac{DS}{Dt}dy = -\int_{-H/2}^{H/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dy - \int_{-H/2}^{H/2}\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy + \int_{-H/2}^{H/2}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dy$$

今假定 μ，k 为常数，壁面绝 热：$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$，$y = \pm\frac{H}{2}$，则上式化为

$$\bar{\rho}\bar{T}\frac{D\bar{S}}{Dt}H = -\frac{\partial}{\partial x}\int_{-H/2}^{H/2}k\frac{\partial T}{\partial x}dy + \mu\int_{-H/2}^{H/2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dy$$

或

$$\bar{T}\frac{D\bar{S}}{Dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}}k\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\bar{\rho}H}\int_{-H/2}^{H/2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dy \qquad (29)$$

显然在上述假设条件下，仅在边界层中$\frac{\partial u_x}{\partial y} \neq 0$，故

$$\mu\int_{-H/2}^{H/2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dy = 2\mu\int_{H/2-\delta}^{H/2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dy$$

a）假定边界层中速度剖面是线性的，即$\partial u_x/\partial y = U/\delta$为常数，则

$$\mu\int_{-H/2}^{H/2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dy = 2\mu\frac{U^2}{\delta} = 2\tau_w U$$

故（29）化成

$$\bar{T}\frac{D\bar{S}}{Dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}}k\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial x^2} + \frac{2\tau_w U}{\bar{\rho}H} \qquad (30)$$

或引入等效直径 D_e 后写成

$$\bar{T}\frac{D\bar{S}}{Dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}}k\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial x^2} + \frac{4\tau_w U}{\bar{\rho}D_e} \qquad (31)$$

这与〔1〕中式(30)是一致的。

b）实际上边界层内速度分布是非线性的，一般$\partial u_x/\partial y$在壁面处绝对值为最大，故

$$2\mu\int_{H/2-\delta}^{H/2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dy < 2\mu\left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{\text{壁面}}\int_{H/2-\delta}^{H/2}\left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|dy = 2\tau_w U$$

故有

$$\bar{T}\frac{D\bar{S}}{Dt} < -\frac{k}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial x^2} + \frac{4\tau_w U}{\bar{\rho}D_e} \qquad (32)$$

若假定边界层内速度剖面为二次抛物线，则（31）应改为

$$\bar{T}\frac{D\bar{S}}{Dt} = -\frac{k}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial x^2} + \frac{8}{3}\frac{\tau_w U}{\bar{\rho}D_e} \qquad (33)$$

若采用 Howarth 的平板不可压缩边界层速度剖面，则相应得

$$\overline{T}\frac{D\overline{S}}{Dt}=-\frac{k}{\overline{\rho}}\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial x^2}+\frac{3.152\tau_w U}{\overline{\rho}D_e} \tag{34}$$

c）为了反映流动的不可逆程度，除了熟知的边界层位移厚度和动量厚度外，还可以引入（注意，为简单起见，以下设 $y=0$ 为壁面）

熵增厚度：

$$\frac{\rho_\infty U_\infty^3}{2}\frac{d\sigma}{dx}=\int_0^\delta \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dy \tag{35}$$

$$\sigma=\int_0^x\int_0^\delta \frac{2\mu}{\rho_\infty U_\infty^3}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 dy dx \tag{39}$$

按 Schlichting[3]，定义边界层的动能损失厚度为

$$b=\int_0^\delta \frac{\rho u_x}{\rho_\infty U_\infty^2}\left(1-\frac{u_x^2}{U_\infty^2}\right)dy \tag{37}$$

则在上述简化条件下，可证明熵增厚度与动能损失厚度间存在以下关系：

$$\sigma=b+\int_0^x\int_0^\delta \frac{2\rho u_x u_y}{\rho_\infty U_\infty^3}\frac{\partial u_x}{\partial y}dydx \tag{38}$$

显然，在一般情况下熵增厚度大于动能损失厚度，因为前者还包括了压力的损失在内。

五、讨　　论

在推导平均意义下的一维方程时，最主要的假设是边界层厚度相对于管宽很薄，并且在平均时以 $\overline{\rho}\ \overline{u_x}$ 代替 $\overline{\rho u_x}$，$\overline{\rho}\ \overline{u_x^2}$ 代替 $\overline{\rho u_x^2}$，$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\overline{h}+\frac{1}{2}\overline{u_x^2}\right)$ 代替 $\overline{\rho\frac{D}{Dt}\left(h+\frac{1}{2}u_x^2\right)}$ 等项。当介质为液体或低速气流时，可认为 $\rho\equiv\overline{\rho}$ 因此上述平均后的方程是相当精确的。

由(27)知，对于粘性流体的稳定、绝热运动，在前述的一维简化假定下总焓 $\left(h+\frac{1}{2}u_x^2\right)$ 的整个截面的平均值是守恒的。但是，在三维情况下沿每条微元流管总焓并不守恒，这是由于粘性力做功使各元流管之间产生能量的交换。利用边界层理论可以详细分析绝热或非绝热情况下边界层的不同层次中总焓的变化情况，此处从略。特别应强调的是，前述的总焓守恒只是在一维平均意义下的守恒，不可搬用到真正的三元流动中去。

本文初稿写于1973年。1978年温殿忠[4]把这一想法推广到叶轮机械的平均流面上获得了新的结果。希望这种方法的推广还将产生其它的成果。

参 考 文 献

〔1〕吴仲华(1965)，静止与运动坐标下的气动热力学基本方程，机械工程学报，4：43—67。

〔2〕钱学森（徐华舫译，1966），气体动力学诸方程，科学出版社。

〔3〕Schlichting, D.H.（1955），Boundary Layer Theory, New York, Mc Graw—Hill Book Co.

〔4〕温殿忠（1978），粘性气体在叶轮机械中平均流面上的求解，第二届工程热物理学术交流会论文。